

CURSO DE
GEOMETRIA METRICA

TOMO II



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Departamento de Construcción e Ingeniería
de Fabricación



CURSO DE

GEOMETRIA METRICA

P O R

PEDRO PUIG ADAM

De la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Ingeniero Industrial, Doctor en Ciencias Exactas.
Profesor titular de la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid
y Catedrático del Instituto de San Isidro.

TOMO II.-COMPLEMENTOS

Comprendiendo:

Trigonometría plana y esférica.

Nociones de Geometría proyectiva y aplicaciones.

Estudios de las cónicas.

DECIMOTERCERA EDICION

MADRID 1.986

LIBR. 227531

©EULER EDITORIAL S.A.

Arturo Soria, 155. 28043 MADRID

Tf.: 4.13.33.18

ISBN: 84-85731-06-9

Depósito Legal: M. 41216-1.986

Impreso en Talleres Gráficos Peñalara.

Ctra. de Villaviciosa de Odón a Pinto Km. 15,180. FUENLABRADA

PALABRAS PRELIMINARES DE LA 1.^a EDICION

Hemos rotulado este segundo tomo con el subtítulo "COMPLEMENTOS" porque, en efecto, pretendemos en él completar el primero, tanto en su contenido como en su propósito formativo.

Alguien ha dicho, con frase esquemática, que la formación del técnico consiste en aprender a "ver" y a "pensar". Aunque la Matemática más parece destinada a esta segunda misión, no hay que divorciarla de la primer. Mejor que "ver" y "pensar" yo diría "ver pensando" y "pensar viendo"; en términos más precisos: Aprender a ver el contenido matemático abstracto de los hechos reales, y a proyectar en el campo concreto los resultados de los razonamientos abstractos.

En el tomo primero, todo él dedicado a la construcción del edificio geométrico y al estudio de los primeros materiales cognoscitivos que tal construcción requiere, la preocupación dominante ha sido de enseñar a razonar, a pensar correctamente.

En este segundo tomo, se complementan los recursos analíticos del aprendiz geómetra con el uso de las funciones y tablas trigonométricas, y sus recursos gráficos con la aportación de los métodos proyectivos, para terminar haciendo aplicación de los métodos métricos y proyectivos al estudio de las cónicas. Pero junto a esta complementación dogmática justo es que sazonemos también la comprensión de la estructura científica desarrollada, con la visión pragmática de sus aplicaciones. He aquí por qué hallará el lector, por ejemplo, junto al estudio teórico de la interdependencia analítica de los grupos de fórmulas trigonométricas, las más importantes aplicaciones de dichas fórmulas a la Topografía, Astronomía, Mecánica, ...; junto a la caracterización de las transformaciones métricas dentro del grupo proyectivo, algunas sugestivas aplicaciones de la proyectividad a los sistemas de representación, a la obtención de la perspectiva de un edificio, restitución de su planta a partir de una fotografía, ...

Esta doble aspiración teórico-práctica no se ha podido realizar sin dolorosas mutilaciones en uno y otro aspecto, que dejarán insatisfechos a teóricos y prácticos. Saciar plenamente a unos y otros hubiese sido correr el riesgo de congestionar el libro y al lector. Era, por ejemplo, imposible desarrollar en el marco de este curso un programa completo de Geometría proyectiva. Me he contentado con sentar las bases indispensables para las más inmediatas aplicaciones y escalar una altura asequible desde la que poder contemplar la Geometría métrica dentro de horizontes más amplios. Era asimismo quimérico pretender desarrollar los sistemas de representación con todo el despliegue de casos singulares. He creído suficiente una visión de conjunto del lenguaje descriptivo, atendiendo con ello gustoso la indicación que se me formuló en orden a los programas de ingreso en otras Escuelas.

Confesamos en el primer tomo nuestra resistencia a seguir líneas de pensamiento ajeno; agudizada en esta ocasión por la rapidez con que he tenido que

reducar este segundo tomo (ante el deseo de brindarlo en este mismo curso a los profesores y alumnos que nos han hecho el honor de adaptar su labor a nuestras lecciones), espero se me perdone la casi total independencia y espontaneidad con que ha sido escrito.

Pasando por alto singularidades de detalle que tal improvisación me ha sugerido en múltiples demostraciones (teorema de Staudt, identidad de las cónicas métricas y proyectivas, teorema de Legendre, ...) me limitaré sólo a llamar la atención del lector sobre la novedad que sin duda hallará en la exposición de la llamada teoría de las *transversales*. La utilización de un invariante métrico de la proyectividad que he llamado "de segunda categoría", análogo a la razón doble, me ha permitido demostrar con la máxima sencillez los teoremas de Menelao y Ceva lo mismo en el plano que en la radiación, y aun generalizar éstos a figuras de categoría superior.

El gran interés teórico e histórico de algunos problemas que han tenido en jaque a la Humanidad durante veintitantos siglos me ha inducido a cerrar este Curso con dos apéndices; uno sobre irresolubidad de problemas geométricos y otro sobre indemostrabilidad del postulado de Euclides. Ambos constituyen la concesión final a la curiosidad científica del lector. Hemos procurado elementalizar todo lo posible las demostraciones contenidas en ellos; con todo, su lectura exige un nivel algo más elevado que el resto de la obra, fácilmente alcanzable tras el estudio de unas pocas cuestiones de Álgebra.

Dije en el primer tomo que me situaba resignadamente entre el fuego cruzado de los críticos puros y de los críticos prácticos. Lo cierto es que sólo motivos de júbilo tengo por la acogida que unos y otros le han dispensado, por la que les quedo muy reconocido.

Mi deuda de gratitud con mi bondadoso amigo D. José Alvarez Ude, por su generosa y paciente lectura del primer tomo, queda considerablemente aumentada con la de éste. Sus observaciones y su crítica, siempre certera, han constituido para mí, el mayor descanso y garantía en mi trabajo. Pronto hará tres años que lo inicié y al recordar su origen quiero expresar también mi agradecimiento a D. Manuel Soto, director de nuestra Escuela, por el honor que me otorgó al expresarme su deseo de que este libro se hiciera. Sin este impulso inicial probablemente no me hubiera decidido a emprender tan larga tarea, que gustoso le entrego, después de realizada, como acto de servicio. Conste también, finalmente, mi gratitud a todos cuanto directa o indirectamente me han brindado colaboración y estímulo, y en especial al alumno de Nuestra Escuela D. José María Saez García por su eficaz ayuda en la delineación de figuras, y a mi buenísimo padre por su siempre dispuesta y callada prestación en múltiples tareas secundarias (descifrado y copia de borradores, corrección de pruebas, ...), generoso alivio de carga que me ha permitido atender mejor al fondo de mi trabajo.

Madrid, enero de 1948.

P. PUIG ADAM.

I N D I C E

PARTE PRIMERA.—TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO I.—*Los problemas clásicos de la Trigonometría rectilínea*

LECCIÓN 1. ^a —Las funciones circulares de ángulos agudos	1
» 2. ^a —Resolución de triángulos rectángulos. Aplicaciones	13
» 3. ^a —Resolución de triángulos oblicuángulos. Teoremas de los senos y del coseno	19
» 4. ^a —Resolución de triángulos oblicuángulos. El teorema de las tangentes y las fórmulas de Briggs	25

CAPÍTULO II.—*Propiedades de las funciones circulares*

LECCIÓN 5. ^a —Funciones circulares de ángulos cualesquiera	35
» 6. ^a —Las fórmulas de adición de argumentos	42
» 7. ^a —Nuevas aplicaciones geométricas de las funciones circulares	50
» 8. ^a —Las funciones circulares y los números complejos. Fórmula de Moivre	58
» 9. ^a —Las funciones circulares y las ecuaciones algebraicas	65

CAPÍTULO III.—*Los problemas clásicos de la Trigonometría esférica*

LECCIÓN 10.—Conceptos y fórmulas fundamentales	74
» 11.—Resolución de triángulos esféricos	80
» 12.—Aplicaciones de la Trigonometría esférica	89

PARTE SEGUNDA.—NOCIONES DE GEOMETRIA PROYECTIVA

CAPÍTULO IV.—*Invariantes métricos de la proyectividad*

LECCIÓN 13.—Incidencia y ordenación proyectivas. Leyes de dualidad	99
» 14.—La proyectividad según Poncelet y sus invariantes métricos	107
» 15.—Valores particulares de los invariantes métrico-proyectivos. Teoremas de Ceva y Menelao. Cuaternas armónicas	116

CAPÍTULO V.—*Proyectividad entre figuras de primera categoría*

LECCIÓN 16.—La proyectividad según Chasles y según Staudt. El teorema fundamental de la proyectividad	126
» 17.—Proyectividad e involución entre formas de primera categoría	131
» 18.—Introducción al estudio analítico de la proyectividad	139
» 19.—Proyectividad e involución en las series y haces circulares	147
» 20.—Aplicaciones de la proyectividad entre formas de primera categoría	153

CAPÍTULO VI.—*Proyectividad entre figuras de segunda y tercera categoría*

LECCIÓN 21.—Homografía y homología entre figuras planas	160
» 22.—Homologías y homografías particulares. Aplicaciones	166
» 23.—El grupo proyectivo. Geometría proyectiva y Geometría métrica	171

CAPÍTULO VII.—*Ideas enerales sobre los sistemas de representación y sus aplicaciones*

LECCIÓN 24.—Sistema diédrico ortogonal. Planos acotados	180
» 25.—Perspectivas exonométricas. Perspectiva caballeira	191
» 26.—La perspectiva cónica. El sistema gnomónico	201

PARTE TERCERA.—LAS CONICAS

CAPÍTULO VIII.—*Estudio métrico de las cónicas*

LECCIÓN 27.—Definiciones métricas de las cónicas	207
» 28.—Trazado de las cónicas. Puntos comunes con una recta	215
» 29.—Trazado de tangentes. Propiedades métricas	222
» 30.—Iniciación al estudio analítico de las cónicas	228

CAPÍTULO IX.—*Estudio proyectivo de las cónicas*

LECCIÓN 31.—Generación proyectiva de las cónicas	238
» 32.—Propiedades de las cónicas derivadas de su generación proyectiva	243
» 33.—Polaridad respecto de una cónica	249
» 34.—Propiedades métricas deducidas de las proyectivas	258
» 35.—Construcción de cónicas	263
» 36.—Ligeras nociones sobre cuádricas y conos cuádricos	270

APÉNDICE I.—SOBRE LA IRRESOLUBILIDAD DE ALGUNOS PROBLEMAS

ARTÍCULO 1.—Generalidades sobre campos de racionalidad	278
» 2.—Irresolubilidad de algunos problemas clásicos con regla y compás	284
» 3.—Irresolubilidad por radicales de la ecuación general de grado superior al cuarto	291
» 4.—Trascendencia de e y π	297

APÉNDICE II.—SOBRE LA INDEMOSTRABILIDAD DEL POSTULADO DE EUCLIDES

Enunciado de problemas de Geometría propuestos en los recientes exámenes de Ingreso en las distintas Escuelas especiales de Ingeniería	315
--	-----



PARTE PRIMERA

TRIGONOMETRIA

**Capítulo I.—LOS PROBLEMAS CLASICOS DE LA TRIGONOMETRIA
RECTILINEA**

LECCIÓN I.^a—LAS FUNCIONES CIRCULARES DE ÁNGULOS AGUDOS

1. **Origen y objeto de la Trigonometría.**—En el primer tomo hemos resuelto numerosos problemas de construcción de figuras. En particular aprendimos a construir triángulos planos y esféricos, dados algunos de sus elementos, obteniendo así *gráficamente* los elementos restantes. La limitada exactitud de los resultados obtenidos mediante tales construcciones justifica la necesidad de reemplazarlas por métodos de *cálculo* en los casos en que se requiere mayor precisión, como ocurre en Topografía, Astronomía, etc. (*)

Ahora bien; conocemos, por el tomo I, multitud de relaciones métricas entre segmentos de figuras (teorema de Pitágoras y su generalización, teorema de Ptolomeo, teorema de Stewart, ...), conocemos asimismo algunas relaciones entre ángulos (suma de los ángulos de un triángulo, ídem de los de un polígono, etc.); pero no disponemos hasta ahora de ninguna fórmula que relacione longitudes de segmentos con amplitudes de ángulos de una misma figura y que nos permita *calcular* los de unos mediante las otras. Problema gráfico tan sencillo como el de hallar los catetos de un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y uno de sus ángulos agudos, no puede resolverse por cálculo directo con los conocimientos adquiridos en el tomo I, más que para ciertos valores muy particulares del ángulo agudo.

La profunda razón de este hecho radica en que las relaciones entre segmentos y ángulos son de naturaleza *trascendente* (no algebraica) y, por tanto, no son expresables mediante las operaciones aritméticas. Los astrónomos griegos ya se dieron cuenta de ello, y resolvieron la dificultad al modo típico como los matemáticos afrontan dificultades análogas, cuando se enfrentan con relaciones de carácter nuevo: se procura reducir al mínimo las funciones que es necesario introducir y se tabulan sus valores particulares, calculándolos por métodos aproximados, de una vez para todas. Así vemos cómo Ptolomeo (siglo II) empieza su famoso tratado

(*) La Trigonometría esférica ha precedido históricamente, en muchos siglos a la Trigonometría rectilínea, precisamente por el hecho de que la predicción de los fenómenos astronómicos requiere métodos más finos que la medición de terrenos.

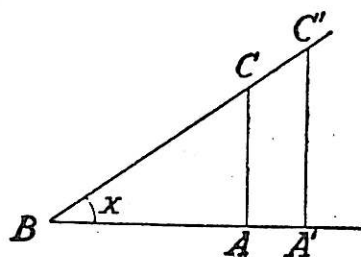
de Astronomía (que los árabes tradujeron con el nombre de «Almagesto») tabulando las medidas de las cuerdas correspondientes a ángulos variables de medio en medio grado. Con esta tabla tuvo suficiente para resolver los problemas astronómicos que se planteaba (*). El cálculo de tales cuerdas fué efectuado aplicando reiteradamente su famoso teorema, en la forma de que hemos dado idea en la lección 23, § 16, Tomo I.

Fueron los árabes quienes posteriormente perfeccionaron los métodos de cálculo de los astrónomos griegos, extendiéndolos al cálculo de los triángulos planos que presenta la Topografía. A ellos se debe la sustitución de la primitiva función trascendente *cuerda* por la función *seno* y la introducción de las demás funciones, de que hablaremos en seguida.

Queda con esto consignado el origen y el objeto de esta pequeña rama de la Matemática llamada *Trigonometría*, que se ocupa, como su nombre indica, del cálculo de triángulos (rectilíneos y esféricos) dados por ciertos elementos y de las figuras que con ellos se componen

Suele unirse a la Trigonometría propiamente dicha, formando cuerpo con ella, la exposición de las propiedades de las funciones trascendentes que utiliza, así como de algunas de sus interesantes aplicaciones al campo del Álgebra y del Análisis; propiedades que nosotros exponremos después de resolver los problemas puramente trigonométricos del plano, con objeto de no enmascarar la primitiva sencillez de éstos con innecesarios desarrollos algorítmicos.

2. Las funciones goniométricas de un ángulo agudo.—Sabemos que dos



triángulos rectángulos ABC , $A'BC'$ con un mismo ángulo agudo x en el vértice B son semejantes; por tanto, las razones entre los lados de uno cualquiera de ellos son las mismas que existen entre los lados homólogos en el otro. En cambio, dichas razones varían al variar el ángulo. Podemos, pues, decir que las referidas razones son *funciones* del ángulo x , y reciben los siguientes nombres y notaciones:

$$\frac{CA}{BC} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \text{sen } x,$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{1}{\text{sen } x} = \text{cosec } x$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } x,$$

$$\frac{BC}{BA} = \frac{1}{\text{cos } x} = \text{sec } x$$

$$\frac{CA}{BA} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \text{tg } x,$$

$$\frac{BA}{CA} = \frac{1}{\text{tg } x} = \text{cot } x$$

Los símbolos *sen*, *cos*, *tg*, se leen, respectivamente, *seno*, *coseno* y *tangente*; los símbolos *cosec*, *sec*, *cot*, se leen, *cosecante*, *secante* y *cotangente*. Estas tres últimas funciones son, respectivamente, inversas de las primeras, de modo que la división por un seno, coseno o tangente equivale a la multiplicación por una cosecante, secante y cotangente. Cuando todavía no se habían

(*) Con anterioridad a Ptolomeo, Hiparco de Nicea (siglo —II) y Menclao de Alejandria (siglo I) se ocuparon también de las relaciones entre arcos y cuerdas, suponiéndose que construirían tablas análogas, de las que no ha quedado rastro.

ideado los logaritmos (siglo XVI) se usaban las funciones inversas para evitar divisiones. Después de la invención de los logaritmos perdieron su interés práctico y se han ido conservando sólo por tradición, sin que ésta pueda evitar que vayan cayendo lentamente en desuso, como otras antiguas funciones (senoverso, cosenoverso), definitivamente olvidadas.

3. Relaciones entre las funciones goniométricas de un mismo ángulo. Del teorema de Pitágoras, aplicado a la figura anterior, se desprende :

$$\left(\frac{CA}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BA}{BC}\right)^2 = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{BA}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BC}^2} = 1, \text{ es decir } \boxed{\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1} \quad [1]$$

Dividiendo las razones que definen el seno y el coseno se tiene :

$$\frac{CA/BC}{BA/BC} = \frac{CA}{BA}, \text{ es decir } \boxed{\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \text{tg } x} \quad [2]$$

Estas dos relaciones entre las tres funciones, seno, coseno y tangente de un mismo ángulo, permiten calcular dos de ellas conocida la tercera. Así, si se conoce el $\text{sen } x$, se tendrá :

$$\text{por [1]} \quad \text{cos } x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} \quad \text{y por [2]} \quad \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}}$$

Si se conoce el $\text{cos } x$ se tendrá análogamente

$$\text{por [1]} \quad \text{sen } x = \sqrt{1 - \text{cos}^2 x} \quad \text{y por [2]} \quad \text{tg } x = \frac{\sqrt{1 - \text{cos}^2 x}}{\text{cos } x}$$

Si se conoce $\text{tg } x$, dividiendo [1] por $\text{cos}^2 x$ resultará

$$\text{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 x}, \quad \text{de donde} \quad \text{cos } x = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}}$$

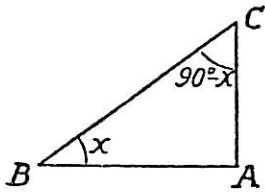
y dividiendo análogamente [1] por $\text{sen}^2 x$

$$1 + \frac{1}{\text{tg}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x}, \quad \text{de donde} \quad \text{sen } x = \frac{\text{tg } x}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}}$$

Dejamos al cuidado del lector expresar las funciones inversas, así como resolver los problemas análogos, supuesta conocida alguna de dichas funciones.

Estas sencillas relaciones ponen de manifiesto que es suficiente tabular una función goniométrica cualquiera, ya que pueden obtenerse algebraicamente a partir de ella las demás. Sin embargo, con objeto de abreviar trabajo a los calculadores todavía se tabulan modernamente el seno, coseno, tangente y cotangente, y aun en tablas de uso frecuente hallará el lector tabuladas las seis funciones antes definidas.

4. **Funciones de ángulos complementarios.**—Aplicaremos las definiciones al otro ángulo agudo del triángulo rectángulo antes considerado



$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \frac{BA}{BC} = \cos x$$

$$\operatorname{cos}(90^\circ - x) = \frac{CA}{BC} = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{BA}{CA} = \operatorname{cot} x$$

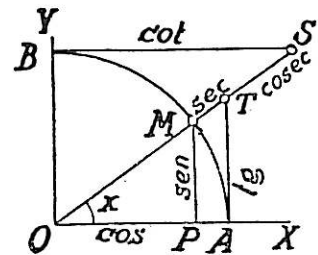
El seno, el coseno y la tangente de un ángulo agudo son, pues, respectivamente iguales al coseno, seno y cotangente del ángulo complementario. Análoga relación entre la secante y la cosecante.

Estas relaciones explican el uso del prefijo *co*. Indican además que basta tabular el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de ángulos comprendidos entre 0° y 45° para tener en la misma tabla los valores del coseno, seno, cotangente y tangente de los ángulos comprendidos entre 45° y 90° . O bien, que basta tabular el seno y la tangente entre 0° y 90° para tener en la misma tabla los valores del coseno y la cotangente de los ángulos complementarios. Es decir, permiten reducir la tarea de tabulación a la mitad, sea reduciendo a la mitad el intervalo o el número de funciones.

5. **Las razones goniométricas interpretadas como funciones circulares.** Tracemos un cuadrante de circunferencia AB y señalemos en él los arcos AM correspondientes a los distintos ángulos agudos x a partir de un lado origen fijo OA . Si referimos el extremo M variable a un sistema coordenado cartesiano cuyos semi-ejes positivos OX , OY pasen por los extremos A , B del cuadrante, se tendrá:

$$\operatorname{sen} x = \frac{MP}{OM} = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}}; \quad \operatorname{cos} x = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{AT}{OA}$$



De otro modo: $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, $\operatorname{tg} x$ son las medidas de los segmentos indicados en la figura, tomando el radio como unidad.

Por ser AT segmento de tangente en A al cuadrante, se ha dado tal nombre a esta razón. De esta sencilla interpretación se desprende:

El seno crece y el coseno decrece al crecer el ángulo. Ambos se conservan positivos y menores que la unidad, excepto para $x=0^\circ$, $x=90^\circ$, casos a los que no puede aplicarse la definición del § 2, pero si adoptamos esta interpretación como nueva definición, podemos escribir

$$\operatorname{sen} 0^\circ = 0 \quad \operatorname{cos} 0^\circ = 1 \quad \operatorname{sen} 90^\circ = 1 \quad \operatorname{cos} 90^\circ = 0 \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

La tangente crece al crecer el ángulo, pudiendo llegar a ser tan grande

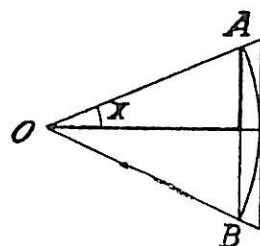
como se quiera para ángulos suficientemente próximos al ángulo recto. Esto lo expresaremos abreviadamente escribiendo $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.

La interpretación indicada y las generalizaciones posteriores a que dará lugar justifican el nombre de *funciones circulares* dadas a las razones goniométricas. La secante, cosecante y cotangente tienen la siguiente interpretación:

$$\sec x = \frac{OM}{OP} = \frac{OT}{\text{radio}} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{OM}{MP} = \frac{OS}{\text{radio}} \quad \cot x = \frac{OP}{MP} = \frac{BS}{\text{radio}}$$

6. Valores particulares notables.—Si x es el semiángulo central de algún polígono regular inscrito en la circunferencia del párrafo anterior, es decir, si $x = 360^\circ : 2n = 180^\circ : n$ (n entero), el seno es la razón del semilado al radio, el coseno la razón de la apotema al radio, y la tangente es la razón del semilado del polígono circunscrito al radio.

En la lección 30 del tomo I aprendimos a calcular estos elementos para algunos polígonos regulares inscritos: $n=3, 4, 5, 6, 10$, etc. Recordando los resultados allí obtenidos comprobará el lector fácilmente los siguientes



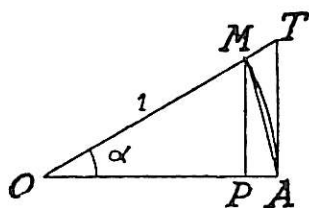
$$n = 3 \quad x = 60^\circ \quad \operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3} : 2, \quad \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$n = 4 \quad x = 45^\circ \quad \operatorname{sen} 45^\circ = \sqrt{2} : 2, \quad \operatorname{cos} 45^\circ = \sqrt{2} : 2 \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$n = 6 \quad x = 30^\circ \quad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{cos} 30^\circ = \sqrt{3} : 2 \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n = 10 \quad x = 18^\circ \quad \operatorname{sen} 18^\circ = (\sqrt{5} - 1) : 4 \quad \operatorname{cos} 18^\circ = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : 4$$

7. Senos y tangentes de ángulos pequeños.—Al disminuir el ángulo el seno y la tangente tienden a confundirse con la medida del ángulo en radianes. De modo más preciso Las razones $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$, $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ tienden a valer 1



En efecto, sea AOM el ángulo (figura) cuya medida en radianes vale α , y consideremos el sector correspondiente en el círculo de radio 1. Su área valdrá $\frac{1}{2} \alpha$. Comparando dicha área con las de los triángulos OAM y OAT , resulta

$$\frac{1}{2} PM < \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} AT$$

o sea

$$\operatorname{sen} \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha \quad [1]$$

Dividiendo $\operatorname{sen} \alpha$ por estos tres valores, resulta

$$1 > \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} > \operatorname{cos} \alpha$$

Dividiendo [1] por $\operatorname{tg} \alpha$

$$\cos \alpha < \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} < 1$$

Como $\cos \alpha$ tiende a valor 1, también tienden a 1 las razones $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ y $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ al disminuir α .

8. **Construcción de tablas.**—En el tomo I, lección 30, vimos el modo de calcular el perímetro de un polígono regular inscrito de $2n$ lados, conocido el de n lados. Dado el semilado del primero podemos, pues, obtener el semilado del segundo. De otro modo:

Dado el seno de $180^\circ : n$ podemos calcular el seno del ángulo mitad.

Vimos también (tomo I, lección 23) cómo el teorema de Ptolomeo permite calcular la cuerda de la suma o diferencia de dos arcos o ángulos conocidas las cuerdas de éstos. Puesto que la semicuerda es el seno del ángulo mitad, el tal teorema permite, en definitiva, resolver la siguiente cuestión (que será estudiada más adelante con toda generalidad):

Dados los senos de dos ángulos, calcular el seno de su suma o diferencia.

Combinando estas dos operaciones y reiterándolas a partir de los valores obtenidos en el § 6, podemos, pues, calcular los senos (y por tanto los cosenos y tangentes) de $15^\circ = 30^\circ : 2$, de $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ y de sus mitades sucesivas $1^\circ 30'$; $45'$; etc. A medida que disminuye el ángulo se observa que el seno y la tangente tienden a confundirse rápidamente, llegando a ser su diferencia de un orden decimal inferior al más pequeño de la tabla. Así, en tablas de cuatro decimales, para $\alpha \leq 3^\circ 21'$ es $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha < 0,0001$. Esta diferencia es $< 0,00001$ (tablas de cinco decimales) para $\alpha \leq 1^\circ 33'$, etc. A partir de estos ángulos en cada tabla el seno y la tangente se pueden obtener mucho más sencillamente sustituyéndolos por la medida del ángulo en radianes, que diferirá de cada una de ellas menos de lo que éstas difieren entre sí (v. [1] § anterior) y, por tanto, el error es menor que una unidad del último orden decimal considerado en la tabla.

En resumen: Por combinación de bisecciones, sumas y restas, podemos calcular los senos, cosenos y tangentes de un conjunto discreto de valores angulares y llenar los huecos agregando o restando ángulos pequeños cuyos senos se calcularán confundiéndoles con el arco en radianes.

Este fué, en líneas generales, el procedimiento de que se valieron los antiguos para calcular las primeras tablas de funciones circulares naturales. Después de la creación del cálculo infinitesimal (siglo XVIII) se idearon recursos mucho más rápidos y elegantes para obtener los valores de estas funciones con la aproximación prefijada. Estos métodos se fundan en los desarrollos en serie de dichas funciones, que el lector hallará en los tratados de Análisis

9. **Disposición y uso de las tablas.**—Existen multitud de tablas goniométricas que clasificaremos en *naturales* y *logarítmicas*.

TABLAS NATURALES.—Dan los valores del seno, coseno, tangente y cotangente, cuyo conocimiento *directo* es de utilidad en muchos problemas de física e ingeniería y por ello su uso se ha generalizado en formularios y manuales técnicos (*).

Su disposición más frecuente es en columnas de *simple entrada*, es decir, son tablas en las que el dato angular se lee en la columna inicial, y en la

(*) V., por ejemplo, *Hütte, Dubbel*.

misma fila los valores de las distintas funciones tabulares. He aquí, por ejemplo, la copia de un fragmento de las tablas naturales de Sánchez Ramos, en las que los ángulos varían de minuto en minuto. En ella leemos, por ejemplo,

27°					
'	Senos.	Cosenos.	Tang.	Cotang.	'
0	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	60
1	45425	89087	50989	96120	59
2	45451	89074	51026	95979	58
3	45477	89061	51063	95838	57
4	45503	89048	51099	95698	56

$$\text{sen } 27^{\circ}3' = 0,45477$$

coincidiendo con el valor del cos $62^{\circ}57'$ del ángulo complementario cuyos grados se leen en la parte inferior y cuyos minutos se leen en la última columna.

55	0,46819	0,88363	0,52985	1,88734	5
56	46844	88349	53022	88602	4
57	46870	88336	53059	88469	3
58	46896	88322	53096	88337	2
59	46921	88308	53134	88205	1
60	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	0
'	Cosenos.	Senos.	Cotang.	Tang.	'

La disposición de *doble entrada* permite economizar espacio y simplificar la búsqueda del dato. Damos a continuación una muestra sacada de unas tablas de senos y cosenos con cuatro decimales (*) en las

que los grados se leen en las columnas primera o última (según se trate de senos o de cosenos) y cuyos minutos (variando de 6 en 6) van en cabeza o al pie de las últimas columnas. En el cruce de la fila correspondiente a los 3°

SENOS NATURALES

Grados	Grados											Grados
	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0110	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85
42	0,6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	0,6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	0,6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	

COSENOS NATURALES

(leídos en la columna izquierda) y columna encabezada con 24' leemos 0,0593, que es a la vez el seno de $3^{\circ}24'$ y el coseno de $87^{\circ}36'$ (grados y minutos leídos, respectivamente, en la columna de la derecha y al pie).

TABLAS LOGARÍTMICAS.—En aquellas cuestiones en las que no interesa el conocimiento directo de las funciones circulares, sino que los valores de éstas

(*) Cuyo uso ha sido generalizado en la Enseñanza media española por don Julio Rey Pastor y el autor.

son objeto de operaciones de cierta complejidad, interesa mejor tener tabulados los logaritmos de dichas funciones. Tal ocurre, como veremos, con los problemas específicos de Trigonometría y sus aplicaciones a la Topografía, Geodesia y Astronomía, en las cuales, por otra parte, conviene sacrificar la rapidez a la exactitud, por lo cual se utilizan seis y hasta siete decimales. Las tablas más generalizadas en España son las de Schrön (7 decimales), de Vázquez Queipo (6 decimales) y Sánchez Ramos (6 decimales). De estas últimas reproducimos sendos fragmentos:

7°

'	Seno.	1"	Tangent.	1"	Cotang.	Coseno.	1"	'
0	085894		089144		0.910856	1.996751		60
1	086922	17.05	090187	17.51	909813	996735	00.26	59
2	087947		091228		908772	996720		58
3	088970		092266		907734	996704		57
4	089990		093302		906698	996688		56

Fragmento de tabla de Vázquez Queipo.

70

7° 00' — 7° 30'											
'	"	L. Seno.	D.	L. Cosec.	L. Tang.	D.	L. Cot.	L. Sec.	L. Cos.	"	'
0	0	1,0858 94	515	0,9141 06	1,0891 44	522	0,9108 56	0,0032 49	1,9967 51	0	60
	30	0864 09	513	9135 91	0896 66	521	9103 34	0032 57	9967 43	30	
1	0	0869 22	513	9130 78	0901 87	521	9098 13	0032 65	9967 35	0	59
	30	0874 35	512	9125 65	0907 08	520	9092 92	0032 73	9967 27	30	
2	0	0879 47	512	9120 53	0912 28	520	9087 72	0032 80	9967 20	0	58
	30	0884 59	512	9115 41	0917 47	519	9082 53	0032 88	9967 12	30	
27	0	1,1128 09	483	0,8871 91	1,1164 91	492	0,8835 09	0,0036 82	1,9963 18	0	33
	30	1132 92	483	8867 08	1169 82	491	8830 18	0036 90	9963 10	30	
28	0	1137. 74	482	8862 26	1174 72	490	8825 28	0036 98	9963 02	0	32
	30	1142 56	482	8857 44	1179 62	490	8820 38	0037 07	9962 93	30	
29	0	1147 37	481	8852 63	1184 52	490	8815 48	0037 15	9962 85	0	31
	30	1152 18	481	8847 82	1189 41	489	8810 59	0037 23	9962 77	30	
30	10	1,1156 98	480	0,8843 02	1,1194 29	488	0,8805 71	0.0037 31	1,9962 69	0	30
'	"	L. Cos.	D.	L. Sec.	L. Cot.	D.	L. Tang.	L. Cosec.	L. Seno.	"	'
82° 30' — 83° 00'											

82°

Fragmento de tabla de Sánchez Ramos (*)

Para su manejo nos remitimos a las instrucciones que dan en ellas los propios autores. En este último fragmento leemos, por ejemplo,

$$\log \text{sen } 7^{\circ}1'30'' = \bar{1},087435 \quad \log \text{tg} = \bar{1},090708$$

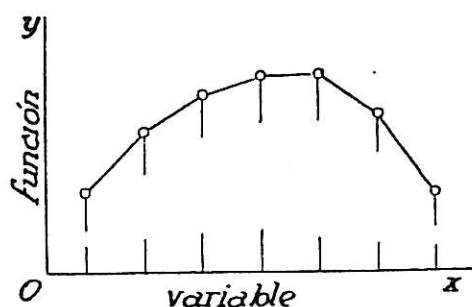
Las columnas encabezadas con *D* dan las llamadas *diferencias tabulares*, o sea la diferencia entre los valores consecutivos de la columna contigua. Así

(*) Reproducimos ambos fragmentos, amablemente autorizados por los editores señores Hernando.

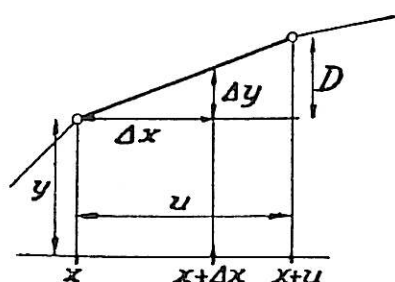
la diferencia entre $\log \text{sen } 7^{\circ}1'30''$ y $\log \text{sen } 7^{\circ}2'$ es 512 unidades del último orden. El objeto de tabular estas diferencias es facilitar la determinación aproximada de los valores de las funciones para valores intermedios entre dos consecutivos de la tabla, como se explica en el párrafo siguiente

Modernamente se tiende a usar en los instrumentos topográficos la división centesimal de los ángulos, lo que facilita notablemente las operaciones aritméticas con éstos. Por ello, esta división se ha introducido en las tablas para usos topográficos (*).

10. Interpolación lineal.—Las tablas descritas dan, para cada función, un conjunto discontinuo de valores correspondientes a valores de la variable equidistantes. Podríamos representar así un conjunto de puntos aislados de la gráfica cartesiana de la función. ¿Cómo hallar valores de la función para valores intermedios de la variable? Este problema es el llamado de *interpolación*, y se estudia con toda generalidad en los cursos de Análisis.



Para las tablas y problemas que nos ocupan es de suficiente aproximación la llamada *interpolación lineal*, que consiste en suponer lineal la variación de la función entre cada dos valores consecutivos de la tabla. Gráficamente: *en suponer la curva sustituida por el polígono cuyos vértices son los puntos tabulados*



Esto equivale a admitir que *en cada intervalo la variación Δy de la función es proporcional a la variación Δx de la variable*. Según este convenio, si u es la diferencia entre dos valores consecutivos de la variable, D la diferencia tabular correspondiente, se tendrá:

$$\frac{\Delta y}{D} = \frac{\Delta x}{u} \quad \text{de donde} \quad \Delta y = \frac{D \Delta x}{u} \quad [1]$$

Para hallar el valor $y + \Delta y$ correspondiente a un valor dado de la variable $x + \Delta x$ no tabulado, se hallará la diferencia Δx entre el valor dado y el valor inferior x más próximo de la tabla y se agregará el valor Δy calculado por [1] al valor y correspondiente a la función. Cuando la función *decrece* (como el coseno, la *cotangente* o sus logaritmos) hay que tener en cuenta que D es *negativa*.

Ejemplo Para hallar el $\log \text{sen } 7^{\circ}1'42''$ en la tabla de Sánchez Ramos del ejemplo anterior, tenemos

$$y = \log \text{sen } 7^{\circ}1'30'' = \bar{1}.087435$$

$$u = 30''; \quad D = 0.000512, \quad \Delta x = 12'', \quad \Delta y = \frac{12}{30} \cdot 0.000512 = 0.0002048$$

$$y + \Delta y = \log \text{sen } 7^{\circ}1'42'' = \bar{1}.087435 + 0.000205 = \bar{1}.087640$$

(*) V., por ejemplo, en España, las «Tablas taquimétricas», de Lapuente.

Análogamente,

$$\log \cot 82^\circ 58' 35'' = \log \cot 82^\circ 58' 30'' - \frac{0,000521 \cdot 5}{30} = \overline{1},090708 - 0,00087 = \overline{1},090621.$$

En este caso,

$$D = \log \cot 82^\circ 59' - \log \cot 82^\circ 58' 30'' = -0,000521.$$

Vázquez Queipo tabula el incremento correspondiente a un segundo y no hay más que multiplicar este incremento por el número de segundos. Así, leemos: $\log \sin 7^\circ 1' = \overline{1},086922$, al que hay que agregar $17,05 \times 42 = 716$ unidades del último orden para tener $\log \sin 7^\circ 1' 42'' = \overline{1},087638$.

TABLAS DE TRIPLE ENTRADA.—Para facilitar el cálculo de esta interpolación suelen llevar las tablas (v., por ejemplo, las de Vázquez Queipo, Schrön) unas tablitas auxiliares marginales que contienen los productos de las diferencias tabulares por los nueve números dígitos. En las tablas de cuatro decimales (como las que el autor ha publicado en colaboración con J. Rey Pastor en su colección didáctica elemental, y de las que hemos reproducido antes un fragmento) la corrección de interpolación correspondiente a números de minutos no tabulados, suele valer lo mismo para todos los valores de la misma fila, lo que permite tabular los valores de Δy al margen de los de y y en las filas correspondientes. La tabla se convierte así en *tabla de triple entrada*, según la disposición que a continuación se reproduce, ampliando la de la página 7.

Grados	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	Grados	Diferencias tabulares				
													1'	2'	3'	4'	5'
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89	3	6	9	12	15
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88	3	6	9	12	15
2	0,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87	3	6	9	12	15
3	0,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86	3	6	9	12	15
4	0,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85	3	6	9	12	14

Para leer, por ejemplo, el $\sin 3^\circ 26'$ se agrega al \sin de $3^\circ 24' = 0,0593$ el incremento correspondiente a $2'$ que se lee en la misma fila y debajo de la columna $2'$ en la tablilla de «diferencias tabulares» (tercera entrada de la tabla). Resulta así $\sin 3^\circ 24' = 0,0593$

$$\begin{array}{r} +6 \\ \hline \sin 3^\circ 26' = 0,0599 \end{array}$$

11. Logaritmos de senos y tangentes de ángulos pequeños.— Se comprende que la interpolación lineal da un valor tanto más aproximado cuanto más pequeñas sean las variaciones de la variable y de la función (*), y dejará de ser aplicable cuando las diferencias tabulares sean muy elevadas. Tal ocurre para ángulos muy pequeños en las funciones $\log \sin$ y $\log \operatorname{tg}$ (que tienden a $-\infty$ al tender a cero el ángulo). Esta es la causa por la que, en las tablas corrientes, la determinación de estas funciones para ángulos menores de 3° se rige por un método especial consistente en reducir el ángulo a segundos (sea n su valor), tabular $\log \frac{\sin n}{n}$, $\log \frac{\operatorname{tg} n}{n}$, y sumarles $\log n$.

Se tiene, en efectó,

$$\log \frac{\sin n}{n} + \log n = \log \sin n, \quad \log \frac{\operatorname{tg} n}{n} + \log n = \log \operatorname{tg} n$$

Las funciones $\log \frac{\sin n}{n}$, $\log \frac{\operatorname{tg} n}{n}$ ya no tienden a $-\infty$, sus diferencias tabulares son discretas y puede aplicarse a ellas la interpolación lineal. (Son las funciones S y T de las tablas de Schrön. En estas tablas se tabulan los logaritmos vulgares hasta 10.800, que es el número de segundos de 3° .)

(*) La limitación del error cometido por esta fórmula de interpolación es objeto de estudio en los cursos de Análisis.

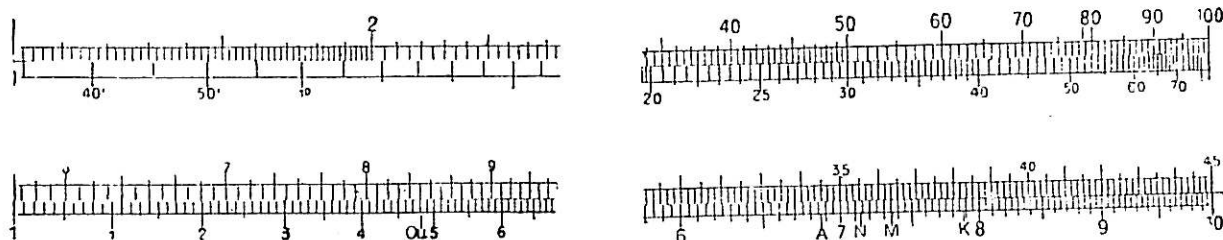
12. Lectura inversa.—Las tablas descritas, lo mismo naturales que logarítmicas, se aplican también en sentido inverso, es decir, permiten *hallar un ángulo agudo dada una de sus funciones circulares o su logaritmo*. Claro es que el seno y el coseno deberán ser <1 para que exista solución. Gráficamente se comprende que esta solución es *única* por no existir en el cuadrante más que un punto que tenga una abscisa o una ordenada dadas, y lo mismo ocurre dada la tangente.

Si el valor dado y coincide con alguno de los de la tabla, el ángulo x se determina por simple lectura. Si el valor dado $y + \Delta y$ se halla comprendido entre dos valores y e $y + D$ de la tabla, correspondientes a los valores x y $x + u$ del ángulo, la misma interpolación lineal da la corrección Δx que habrá que aplicar al valor x para tener el ángulo pedido, pues por la relación anterior [1] se tendrá

$$\Delta x = u \frac{\Delta y}{D}$$

Ejemplo Propongámonos encontrar, mediante la tabla de la página 8, el ángulo cuyo $\log \operatorname{tg}$ vale $\bar{1}.090815$. En la tabla vemos que este valor se halla comprendido entre $\bar{1}.090708 = \log \operatorname{tg} 7^{\circ}1'30''$ y $\bar{1}.091228 = \log \operatorname{tg} 7^{\circ}2'$. Se tiene: $D = 520$, $\Delta y = \bar{1}.090815 - \bar{1}.090708 = 0.000107$, por tanto, en segundos será $\Delta x = 30'' \cdot \frac{107}{520} = 6.2''$. Luego el ángulo pedido vale $7^{\circ}1'36''.2$.

13. Lectura de senos y tangentes en la regla de cálculo.—La reglilla central de la regla de cálculo corriente en nuestro mercado (*) suele llevar grabados en el dorso dos escalas, S y T . La escala S lleva una graduación angular desde $34'$ (ángulo cuyo seno es 0,01) hasta 90 (ángulo cuyo seno es 1). La escala T , desde $5^{\circ}43'$ (ángulo cuya tg es 0,1) hasta 45° (ángulo cuya tg es 1). Si se invierte la reglilla de modo que su dorso se acople al anverso de la regla, la escala S quedará enfrentada con la escala superior de la regla, de modo que los valores de esta escala evaluados en *centésimas* dan los senos de los

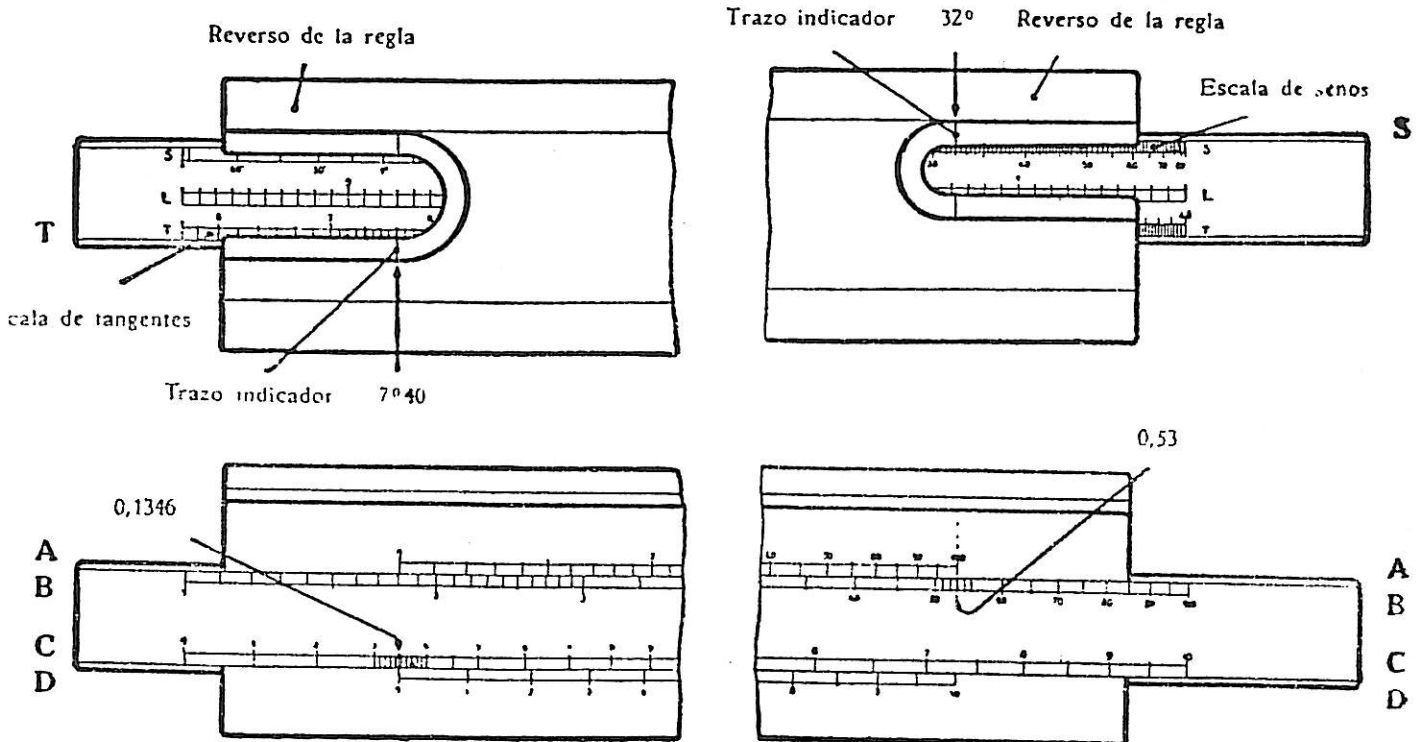


grados que tienen en frente. Así leemos, por ejemplo: $\operatorname{sen} 30^{\circ} = 50$ centésimas $= 0,5$; $\operatorname{sen} 1^{\circ}15' \simeq 2,18$ centésimas $= 0,0218$. La escala T queda enfrentada con la inferior de la regla, de modo que los valores de esta escala evaluados en *décimas* dan las tangentes de los ángulos que tienen en frente. Así leemos, por ejemplo, $\operatorname{tg} 35^{\circ} \simeq 0,7$. Para la tangente de un ángulo $>45^{\circ}$ se tomará el complementario y se hallará la inversa de su tangente (cotangente).

Sin necesidad de invertir la regla, pueden efectuarse las mismas lecturas corriendo la reglilla y leyendo los valores del ángulo en una señal situada en una

(*) A W Faber «Castell»

escotadura al dorso de la regla, sobre la escala S (o T) y los correspondientes del seno (o tangente) en el anverso, frente al origen o al extremo de la regla, como indican los ejemplos siguientes (*):



Para ángulos menores que los citados se puede tomar, dentro de la aproximación de la regla, la medida del ángulo en radianes como valor aproximado del seno o tangente.

Las escalas S y T se han construido llevando a partir del extremo los valores de $\log \operatorname{sen} \alpha$ y $\log \operatorname{tg} \alpha$ con las mismas unidades de las escalas superior e inferior de la regla y graduando los valores del ángulo α . Por eso, en cualquier posición de la reglilla invertida los números α de la escala superior (inferior) serán proporcionales a los senos (tangentes) de los ángulos α que tienen en frente, puesto que $\log \operatorname{sen} \alpha - \log \alpha = \text{constante}$, es decir, $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = \text{const.}$

EJERCICIOS

1. La *ley de refracción*, que se estudia en Física, dice que *la razón $\operatorname{sen} i : \operatorname{sen} r$ entre los senos de los ángulos de incidencia y de refracción de un rayo luminoso, al pasar de un medio a otro, es una constante llamada índice de refracción del segundo medio respecto del primero.* Así, por ejemplo, el índice de refracción del agua respecto del aire es aproximadamente $\frac{4}{3}$.

Calcular r para $i = 46^\circ 20'$. Idem i para $r = 18^\circ 43'$.

2. Calcular el *ángulo límite*, es decir, el ángulo refractado que corresponde a un ángulo incidente de 90° (rayo rasante).

3. Calcular los ángulos límites para el hielo (índice 1,3), para el diamante (2,4), para el vidrio Crown (1,516), para el Flint (1,56).

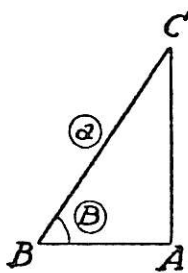
4. Resolver los anteriores problemas mediante la regla de cálculo.

(*) Figuras reproducidas del catálogo de A. W. Faber Castell, amablemente autorizados por la representación española.

LECCIÓN 2ª—RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS APLICACIONES

1. **Resolución de triángulos rectángulos.**—Según las definiciones establecidas en la lección anterior dar unas tablas trigonométricas es dar las razones existentes entre los lados de los triángulos rectángulos que tienen los ángulos agudos registrados en dichas tablas. Por consiguiente.

I Si se dan un lado y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo conoceremos por la tabla las razones entre el lado conocido y cada uno de los otros dos, lo que permite hallar éstos. Así resulta:



CASO 1.º DATOS: LA HIPOTENUSA a Y UN ÁNGULO AGUDO B . Buscaremos en la tabla $\text{sen } B (= b : a)$, $\text{cos } B (= c : a)$ y tendremos

$$b = a \text{ sen } B \quad \log b = \log a + \log \text{sen } B$$

$$c = a \text{ cos } B \quad \log c = \log a + \log \text{cos } B$$

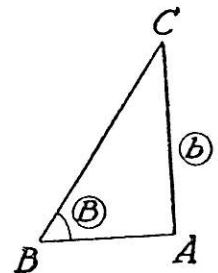
Un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo contiguo

CASO 2.º DATOS: UN CATETO b Y UN ÁNGULO AGUDO B .—El otro ángulo será complemento del dado $C = 90 - B$ Buscando en las tablas $\text{sen } B (= b : a)$ $\text{tg } C (= c : b)$ o sus logaritmos, se tendrá

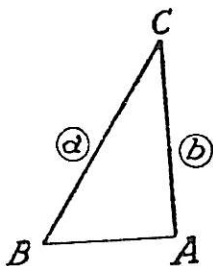
$$a = b : \text{sen } B \quad \log a = \log b - \log \text{sen } B$$

$$c = b \text{ tg } C \quad \log c = \log b + \log \text{tg } C$$

Un cateto es igual al producto del otro por la tangente del ángulo opuesto al primero, o por la cotangente del opuesto al segundo



II Si se dan dos lados del triángulo rectángulo se conocerá la razón entre ellos y, por medio de las tablas, el ángulo que corresponde a dicha razón. El otro ángulo será el complementario de éste, y el tercer lado podrá calcularse como en los casos anteriores, o bien, directamente, aplicando el teorema de Pitágoras. Así resulta



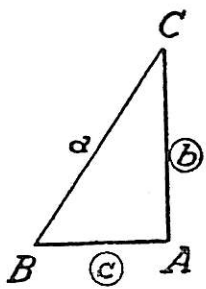
CASO 3.º DATOS: LA HIPOTENUSA a Y UN CATETO b —Se tiene:

$$\text{sen } B = b : a \quad \log \text{sen } B = \log b - \log a$$

Se leerá en la tabla el valor de B dado por su seno o por su log sen, y luego $C = 90^\circ - B$

Finalmente, calcularemos $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ fórmula a la que puede aplicarse logaritmos

$$\log c = \frac{1}{2} [\log (a+b) + \log (a-b)]$$



CASO 4.º DATOS: LOS DOS CATETOS b Y c .—Se tiene:

$$\operatorname{tg} B = b : c; \quad \log \operatorname{tg} B = \log b - \log c$$

Se busca en las tablas el ángulo B cuya tg , o cuyo $\log \operatorname{tg}$ tengan estos valores. Se tiene luego $C = 90^\circ - B$ (que en algunas tablas se lee simultáneamente a B).

Finalmente, calcularemos la hipotenusa por el teorema de Pitágoras $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; o bien, mediante la relación $a = b : \operatorname{sen} B$ a la que puede aplicarse el cálculo logarítmico.

Resumiendo: Para resolver triángulos rectángulos basta recordar las definiciones de las razones trigonométricas y disponer de unas tablas. Conviene, sin embargo, recordar los enunciados anteriormente escritos en cursiva, con objeto de ahorrar discurso. Unos ejemplos a continuación ilustrarán el modo de disponer los cálculos.

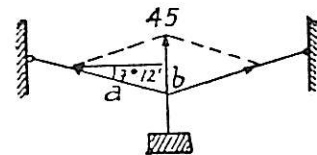
Ejemplo 1.º Una fuerza de 3,453 kgs. actúa oblicuamente sobre un plano formando con él un ángulo de $65^\circ 32'$; calcular las componentes normal y tangencial al plano.

Datos: $a = 3,453$, $B = 65^\circ 32'$. Incógnitas: b (componente normal); c (id. tangencial).

	$\log a = 0,5382$
$\log \operatorname{sen} B = \bar{1},9591$	$\log \cos B = \bar{1},6171$
(suma) $\log b = 0,4973$	(suma) $\log c = 0,1553$
$b = 3,143$ kgs.	$c = 1,430$ kgs.

Ejemplo 2.º Un peso de 45 kgs. pende de una cuerda cuyos dos ramales (v. figura) forman $7^\circ 12'$ con la horizontal. Calcular la tensión de la cuerda y la tracción horizontal en sus extremos (se prescinde del peso de la cuerda).

Según se desprende de la figura, se trata de resolver un triángulo rectángulo con los siguientes datos: $b = 45 : 2 = 22,5$, $B = 7^\circ 12'$. Incógnitas: tensión de la cuerda, a ; tracción horizontal, c . Se tiene: $C = 90^\circ - 7^\circ 12' = 82^\circ 48'$.



	$\log b = 1,3522$
$\log \operatorname{sen} B = \bar{1},0981$	$\log \operatorname{tg} C = 0,8985$
(resta) $\log a = 2,2541$	(suma) $\log c = 2,2507$
tensión $a = 179,5$ kgs.	tracción $c = 178,1$ kgs.

Ejemplo 3.º Inclinación de un funicular que en un trayecto inclinado de 1 853 m. salva un desnivel de 383 m. Datos: $a = 1 853$ y $b = 383$. Incógnita, B ; se tiene: $\operatorname{sen} B = b : a$

	$\log b = 2,5832$
$\log a = 3,2679$	$B = 11^\circ 54'$
(resta) $\log \operatorname{sen} B = \bar{1},3153$	

Ejemplo 4.º Inclinación de un funicular que en un recorrido de 1 853 m. en proyección horizontal salva un desnivel de 383 m. Datos: $c = 1 853$; $b = 383$; $\operatorname{tg} B = b : c$.

Se tiene ahora: $\log \operatorname{tg} B = 1,3153$, de donde $B = 11^\circ 41'$.

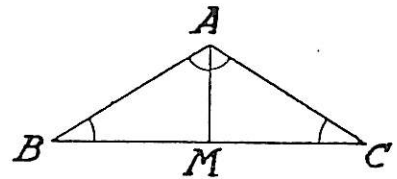
Dada la naturaleza de los ejemplos, hemos operado sólo con tablas de cuatro decimales.

2. Noción de pendiente.—En todo camino rectilíneo inclinado la razón entre el desnivel y la distancia *horizontal* entre dos puntos se llama *pendiente* del camino, y es, por tanto, igual a la *tangente* del ángulo de inclinación

Los autores ingleses suelen llamar pendiente a la razón entre el desnivel y la distancia inclinada, es decir, tomada sobre el propio camino, lo que equivale a considerar el *seno* del ángulo de inclinación en lugar de la tangente. Para inclinaciones muy pequeñas, como son las de las carreteras, vías férreas. ., ambos valores se confunden prácticamente (v. lec. 1.ª, §§ 7 y 8). No ocurre lo mismo para pendientes mayores (v. los ejemplos 3.º y 4.º del párrafo anterior).

3. Resolución de triángulos isósceles.—Trazada la altura de un triángulo isósceles queda éste dividido en dos triángulos rectángulos iguales. Resuelto uno cualquiera de ellos queda resuelto aquél.

Podemos, pues, enunciar los siguientes casos de resolución de triángulos isósceles: DATOS: 1.º Un lado y un ángulo; 2.º La base y un ángulo; 3.º Un lado y la base, o 3.º bis: Un lado y la altura; 4.º La base y la altura; casos que se reducen respectivamente a los 1.º, 2.º, 3.º y 4.º del párrafo anterior



4. Resolución de rectángulos, rombos y trapecios.—Por descomposiciones análogas y reducción al cálculo de un triángulo rectángulo, podrá el lector calcular los elementos de:

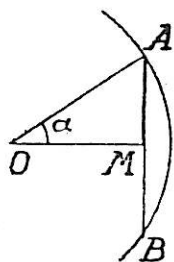
Un rectángulo: Dados una diagonal y el ángulo que forma con la otra (se reduce al caso 1.º del § 1). Dados un lado y el ángulo que forman las diagonales entre sí (caso 2.º).

Un rombo: Dados el perímetro y una diagonal (caso 3.º). Dadas las dos diagonales (caso 4.º).

Un trapecio isósceles: Dadas las bases y la altura (caso 4.º). Dadas las bases y un lado (caso 3.º). Dadas las bases y un ángulo (caso 2.º).

Un trapecio rectángulo: Dados análogos datos. En los ejercicios verá el lector nuevos problemas análogos.

5. Resolución trigonométrica de polígonos regulares.—El semilado, el radio y la apotema de un polígono regular convexo forman un triángulo rectángulo del que se conoce el ángulo en el centro, que vale $\alpha = 360^\circ : 2n = 180^\circ : n$, donde n es el número de lados del polígono. Esto permite calcular trigonométricamente dos de los elementos radio, lado y apotema, conocido uno de ellos, y el número de lados del polígono.



Si el polígono es estrellado y es p su superficie (Tomo I, 10, lec. 15), cada lado es cuerda de un arco igual a p veces el anterior, y en este caso es $\alpha = \frac{p}{n} 180^\circ$.

Ejemplo: Cálculo de los lados de los heptágonos regulares convexo y estrellados inscritos en una circunferencia de 5 cm. de radio.

heptágono convexo $\alpha = 180^\circ : 7 = 25^\circ 42' 51''$

lado = $2 \cdot 5 \cdot \text{sen } \alpha \simeq 4,339$ cm.

apotema = $5 \cdot \text{cos } \alpha \simeq 4,505$ cm.

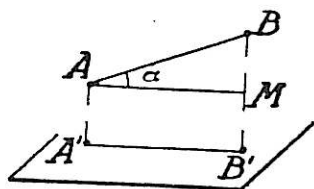
» estrellado $p=2$ $\alpha = 51^\circ 25' 43''$

lado $\simeq 7,818$ cm.

» estrellado $p=3$ $\alpha = 77^\circ 8' 34''$

lado $\simeq 9,749$ cm.

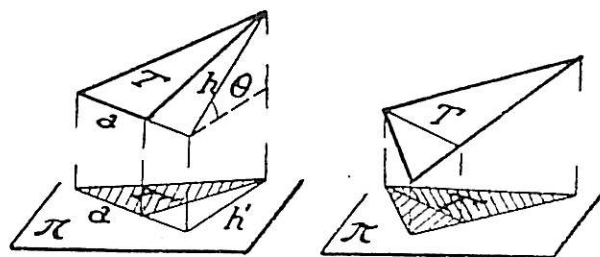
6. Proyección ortogonal de un segmento y de una área plana sobre un plano.—Recordando la definición de proyección ortogonal $A'B'$ de un segmento AB sobre un plano, y la de un ángulo α de una recta con un plano (tomo I, lec. 42), se tiene (v. figura)



$$A'B' = AM = AB \cdot \text{cos } \alpha$$

La proyección ortogonal de un segmento sobre un plano es igual al producto de la longitud del segmento por el coseno del ángulo que su recta forma con el plano.

Llamando proyección de una figura plana sobre un plano a la figura formada por las proyecciones de todos sus puntos, veamos qué relación existe entre el área T de un triángulo y la de su proyección ortogonal T' sobre un plano π (no perpendicular al del triángulo). Si uno de los lados a del triángulo es paralelo al plano π la altura correspondiente h se proyecta según la altura h' del triángulo proyección (tomo I, lec. 42, § 2) y el ángulo formado por h y h' es el ángulo agudo θ entre los dos planos. Se tendrá:



$$T' = \frac{1}{2} ah' = \frac{1}{2} ah \text{cos } \theta = T \text{cos } \theta.$$

Si el triángulo no tiene ningún lado paralelo al plano de proyección, puede descomponerse en dos que lo tengan (trazando una paralela al plano por el vértice cuya distancia es intermedia) y como las áreas de sus proyecciones se obtienen multiplicando por el mismo factor $\text{cos } \theta$, éste será también el factor por el que habrá que multiplicar T para obtener T' .

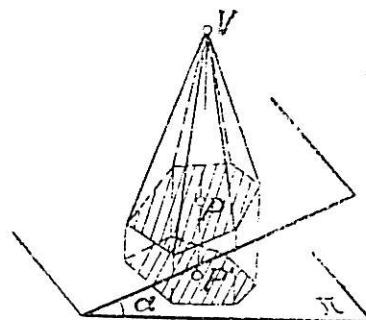
Descomponiendo un polígono plano de área P en triángulos, el área de su proyección P' se obtendrá análogamente, $P = P' \text{cos } \theta$.

Definida, finalmente, el área de un recinto plano, en general, como límite de las áreas de polígonos o de sumas de ellos y separando el factor constante $\text{cos } \theta$, en el paso al límite, resulta:

El área de la proyección de un recinto plano es igual al producto del área del recinto por el coseno del ángulo agudo que forma su plano con el de proyección.

7. Aplicación al cálculo de superficies de igual pendiente.—Del párrafo anterior se desprende :

Si una superficie poliédrica está constituida por varias caras que forman un mismo ángulo θ con un cierto plano π y las proyecciones de estas caras sobre π no se recubren, es decir, constituyen un polígono plano, bastará dividir el área de este polígono por $\cos \theta$ para tener el área de la superficie.



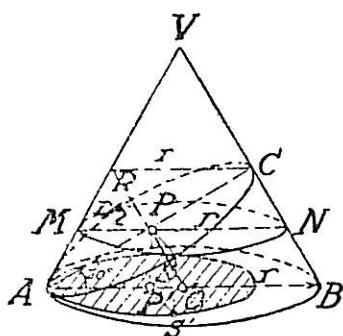
Ejemplo 1.^o Cortemos la superficie lateral de una pirámide regular por un plano que forme el ángulo α con el plano de la base. Sea P el área del polígono sección y P' la de su proyección sobre el plano de la base. Si es θ el ángulo que forman las caras laterales con dicha base, se tendrá :

$$\text{Area lateral de la pirámide truncada} = P' : \cos \theta, \text{ Area de } P = P : \cos \alpha.$$

$$\text{Area total de la pirámide truncada} = P' \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \alpha} \right).$$

La fórmula es aplicable a un cono de revolución truncado oblicuamente mediante un sencillo razonamiento de paso al límite.

Ejemplo 2.^o Se corta un cono equilátero de radio r por un plano tangente a la base formando 30° con ella. Se pide la superficie del cono oblicuo y la del tronco de cono oblicuo determinados por dicha sección. Como se demostrará más adelante la sección es una elipse de semiejes.



$$AP = r \cos 30^\circ \quad PS = \sqrt{PN \cdot PM} = \sqrt{r \cdot r/2} = r/\sqrt{2}$$

y se proyecta según otra de semiejes

$$AP' = r \cos^2 30^\circ = 3r/4 \quad \text{y} \quad P'S' = PS = r/\sqrt{2}$$

cuya área es $\pi \cdot 3r/4 \cdot r/\sqrt{2}$ (Lecc. 57, § 3, Tomo I). En consecuencia, considerando el cono como límite de una pirámide circunscrita cuyas caras laterales forman 60° con la base ($\cos 60^\circ =$

$= 1/2$, el área lateral del cono oblicuo valdrá $\frac{3\pi r^2}{4\sqrt{2}} : \frac{1}{2} = \frac{3\pi r^2}{2\sqrt{2}}$; valor del que se deduce fácilmente el área del tronco restante.

EJERCICIOS

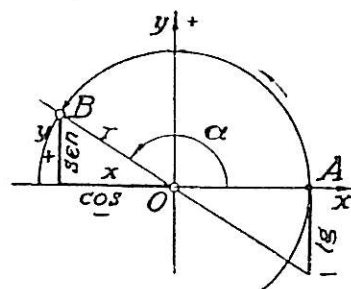
- Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo ángulo de 42° . ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿Bajo qué ángulo a distancia triple?
- Un solar tiene forma de triángulo rectángulo con un ángulo de 34° . Sabiendo que la fachada mayor tiene 65 m. de largo, calcular la superficie del solar.
- Calcular la altura y el área de un trapecio rectángulo, sabiendo que el lado oblicuo vale 5 m y las bases 10 m y 12 m, respectivamente. Calcular los ángulos del trapecio
- Calcular el área de un trapecio isósceles cuya base menor es de 14 m; cuyos lados valen 5.3 m y el ángulo de éstos con la base menor es de $135^\circ 28'$
- Calcular trigonómicamente el radio, la apotema y el área de un octógono regular de 1 m de lado. Idem las diagonales.

6. ¿Qué error relativo se comete al tomar como área de un n -gono regular la de la circunferencia inscrita? Idem circunscrita.
7. En el cruce de dos vías de igual ancho (1,40 m) se forma un rombo. Sabiendo que el ángulo de cruce es de $40^{\circ}15'$, calcular el lado del rombo y su área.
8. Desde mi ventana a 12 m sobre el suelo, veo el borde superior de la fachada de enfrente bajo un ángulo de inclinación $32^{\circ}20'$ y el inferior con una inclinación (hacia abajo) de 35° . Hallar el ancho de la calle y la altura de la fachada observada.
9. Desde un avión a 1.500 m de altura se ve un globo cautivo y su amarre bajo los ángulos de inclinación (hacia abajo) de 20° y 50° . Calcular la altura del globo.
10. El plano de una casa es un rectángulo de 10×12 m, la inclinación del tejado es uniforme de 32° . Calcular la superficie del tejado.
11. Una pirámide regular cuadrada tiene 6 m de arista lateral; sabiendo que su superficie total es triple del área de su base, calcular: a), la inclinación de las caras laterales sobre la base; b), la arista básica, la altura y la apotema lateral; c), la inclinación de la arista lateral sobre la base; d), la superficie lateral y total; e), el volumen.
12. Un cono tiene una altura de 20 cm y su superficie lateral tiene un desarrollo de 240° de amplitud. Calcular: a), la generatriz y el radio; b), la superficie lateral y total; c), el volumen; d), el ángulo de abertura del cono.
13. Calcular los m^2 de tabla que se necesitan para el encofrado de la bóveda de un arco circular de un puente de 42 m de luz y 12 m de altura, sabiendo que el ancho del puente es de 10 m.
14. Calcular el ángulo que forma la diagonal del cubo con las aristas contiguas. Idem con las caras contiguas.
15. Calcular el ángulo que forman dos caras de un tetraedro regular. Idem dos caras contiguas de un octaedro regular.
16. Longitud de la correa necesaria para enlazar dos poleas de diámetros 80 cm y 45 cm y cuyos ejes distan entre sí 1,50 m. Se supondrá la correa sin cruzar. Idem cruzada.
17. Veinte cilindros iguales son tangentes exteriormente a un cilindro de radio r e interiormente a otro de radio R ; cada uno es además tangente al anterior y siguiente. Calcular la razón $r:R$.
18. Eratóstenes se enteró de que en la ciudad de Siena, situada exactamente al Sur de Alejandría, el Sol en el día de solsticio de verano se reflejaba en las aguas del fondo de un pozo, es decir: pasaba por la vertical. Comprobó que en Alejandría el Sol formaba en el mismo día $7^{\circ}30'$ con la vertical y de aquí dedujo la circunferencia y el radio de la Tierra, después de medir la distancia entre Siena y Alejandría. Dedúzcase esta distancia (curvilínea) y la rectilínea correspondiente.
19. Dígase cuáles son los valores de la razón entre la altura de una torre y la longitud de su sombra en Siena y en Alejandría los días de solsticio de verano, de invierno, y el día del equinoccio. Inclinación de la eclíptica $23^{\circ}27'$.
20. Se sabe que la distancia de la Tierra a la Luna es de 384 000 Km. Calcular con qué ángulo aparente (paralaje lunar) se vería la Tierra desde la Luna. (Hiparco consiguió medir este paralaje con aproximación notable y de él dedujo recíprocamente la distancia Tierra-Luna.)
21. Sabiendo que el disco lunar tiene el diámetro aparente de $31'$, calcular el radio, el perímetro, la superficie y el volumen de la Luna.
22. Calcular la fuerza centrífuga que actúa sobre un gramo por efecto de la rotación de la Tierra alrededor de su eje en Madrid (latitud 40°).
23. Sabiendo que la luz del Sol tarda 8^m20^s en llegar a la Tierra, calcular los ángulos del triángulo Luna-Tierra-Sol cuando la primera está en cuarto creciente. Distancia Tierra-Luna igual a 384 000 Km. [Aristarco intentó medir el ángulo Tierra-Sol-Luna en esta posición para deducir de él, recíprocamente, la distancia Tierra-Sol; su medición fué, sin embargo, muy errónea debido a la pequeñez de dicho ángulo y a la imperfección de los medios y aparatos de medida.]

LECCIÓN 3.^a—RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS. TEOREMAS DE LOS SENOS Y DEL COSENO

1. Funciones circulares de ángulos obtusos.—La interpretación del seno, coseno y tangente como funciones circulares (lec. 1.^a, § 5) nos permite generalizar la definición de estas funciones para ángulos mayores que un recto, sin más que prolongar el cuadrante de circunferencia allí considerado.

Tomando como origen común de todos los ángulos la semirrecta Ox (figura) y como sentido el de derecha a izquierda, cada triángulo α determina un arco de origen A , y las coordenadas cartesianas de su extremo B , respecto al eje Ox y el perpendicular, servirán para definir las funciones circulares. Tomaremos como semiejes positivos OX , OY los que limitan al primer cuadrante.



Llamaremos *seno* del ángulo a *la razón de la ordenada al radio*

Llamaremos *coseno* del ángulo a *la razón de la abscisa al radio*.

Llamaremos *tangente* de un ángulo a *la razón de la ordenada a la abscisa*.

Es, por consiguiente, igual en valor absoluto y signo a la razón entre el seno y el coseno.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Se observa, pues, que *el seno de un ángulo obtuso es positivo* (como el de uno agudo).

El coseno de un ángulo obtuso es negativo.

La tangente de un ángulo obtuso es negativa.

La representación geométrica de la tangente es análoga a la correspondiente para ángulos agudos. Se prolonga el radio extremo hasta que corte a la tangente en el origen A y la ordenada del punto de intersección, medido con el radio como unidad, es la tangente del ángulo.

Independientemente de los signos, se ve que *subsisten las relaciones fundamentales* del § 3, lec. 1.^a, para ángulos obtusos, puesto que

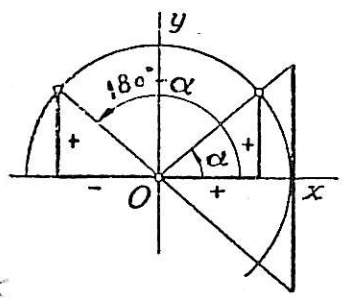
$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1, \quad \text{es decir: } \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

2. Funciones de ángulos suplementarios.—Llevemos dos ángulos suplementarios a partir del origen Ox ; del examen de la figura se desprende que

Los senos de dos ángulos suplementarios son iguales.

Los cosenos son opuestos, es decir, iguales en valor absoluto, pero de distinto signo.

Las tangentes son también opuestas.



$$\begin{aligned} \text{sen}(180^\circ - \alpha) &= \text{sen } \alpha, & \text{cos}(180^\circ - \alpha) &= -\text{cos } \alpha \\ \text{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\text{tg } \alpha \end{aligned}$$

Estas proposiciones ahorran el trabajo de prolongar las tablas de las funciones circulares desde 90° hasta 180°. En efecto, si el ángulo es obtuso, su suplementario es agudo, y encontradas en las tablas las funciones circulares de éste, basta cambiar el signo del coseno y de la tangente

Ejemplo. Sea el ángulo 141°. El suplemento es 39°, y en las tablas leemos:

$$\begin{array}{ll} \text{sen } 39^\circ = 0,6293 & \text{luego } \text{sen } 141^\circ = 0,6293 \\ \text{cos } 39^\circ = 0,7771 & \text{» } \text{cos } 141^\circ = -0,7771 \\ \text{tg } 39^\circ = 0,8098 & \text{» } \text{tg } 141^\circ = -0,8098 \end{array}$$

3. Determinación de un ángulo convexo por su seno.—Ampliado así el valor de los ángulos, se presenta una ambigüedad en el problema inverso: *dado el seno, calcular el ángulo.*

En efecto, dado como valor del seno cualquier número positivo menor que 1, encontraremos en la tabla un ángulo *agudo* que tiene ese seno; pero hay otro *obtuso*, que es el suplemento, con el mismo seno. Resultan, pues, dos *soluciones*.

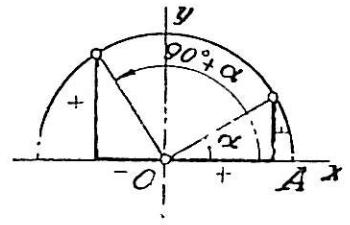
En cambio, si se da el coseno o la tangente no hay ambigüedad, pues su signo + o - indicará si el ángulo es agudo u obtuso (*).

4. Ángulos que difieren en 90°.—Sean α un ángulo agudo y $90^\circ + \alpha$ el obtuso que resulta de añadirle un recto.

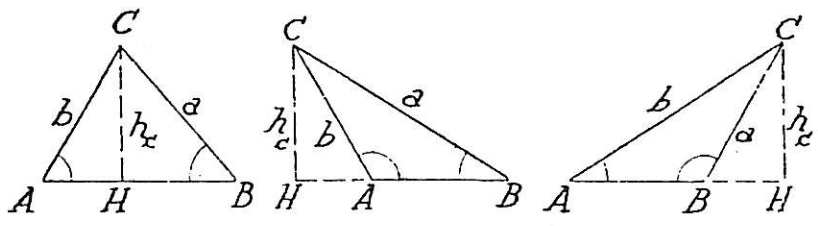
De la simple inspección de la figura resulta:

$$\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha \quad \text{cos}(90^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

y, dividiendo, $\text{tg}(90^\circ + \alpha) = -\text{cot } \alpha$.



5. Expresión trigonométrica de las alturas de un triángulo oblicuángulo.—La altura h_c de un triángulo oblicuángulo ABC forma con los lados a y b , que concurren con ella, dos triángulos rectángulos en los que se tiene



$$\begin{aligned} h_c &= a \text{ sen } B \\ h_c &= b \text{ sen } A \end{aligned}$$

fórmulas válidas tanto si

(*) La ambigüedad se presenta al considerar ángulos mayores que 180°, pero como ningún triángulo tiene ángulos de esta naturaleza, de momento no tiene interés este caso.

A y B son ambos agudos como si alguno de ellos es obtuso (figuras), ya que en tal caso su seno es igual al seno del suplementario.

Análogamente

$$h_a = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B \quad h_b = a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A$$

6. Teorema de los senos.—De las relaciones que resultan de igualar las dos expresiones de cada altura resulta (dividiendo por el producto de senos)

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad [1]$$

TEOREMA DE LOS SENOS: *Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

7. Casos de resolución de triángulos en los que se aplica el teorema de los senos.—El teorema anterior permite resolver fácilmente los casos en los que se conoce un lado a y su ángulo opuesto A , pues con ello se tiene el valor común de las tres razones [1] y basta dar un nuevo antecedente o consecuente para deducir los demás. Aplicaremos, pues, el teorema de los senos en los dos casos de resolución siguientes:

CASO 1.º DATOS: DOS ÁNGULOS A Y B Y UN LADO a .

Al dar dos ángulos A y B se dan tres, puesto que el tercero es suplementario de la suma de los otros dos $C = 180^\circ - (A + B)$. Conocemos, pues, los tres consecuentes de [1] y un antecedente a , con lo que se deducen fácilmente b y c .

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \quad \log b = \log a + \log \operatorname{sen} B + \operatorname{colog} \operatorname{sen} A$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \quad \log c = \log a + \log \operatorname{sen} C + \operatorname{colog} \operatorname{sen} A$$

Ejemplo: Supongamos $a = 45$ m, $A = 58^\circ 15'$, $B = 67^\circ 20'$.

Se tendrá $C = 180^\circ - (58^\circ 15' + 67^\circ 20') = 54^\circ 25'$. Usando tablas de 4 decimales.

$\log 45 = 1,6532$	$\log 45 = 1,6532$
$\log \operatorname{sen} 67^\circ 20' = \bar{1},9651$	$\log \operatorname{sen} 54^\circ 25' = \bar{1},9102$
$\operatorname{colg} \operatorname{sen} 58^\circ 15' = 0,0704$	$\operatorname{colg} \operatorname{sen} 58^\circ 15' = 0,0704$
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
$\log b = 1,6887$	$\log c = 1,6338$
$b = 48,83$ m	$c = 43,03$ m

CASO 2.º DATOS: DOS LADOS a Y b Y EL ÁNGULO A OPUESTO A UNO DE ELLOS.

De la proporción $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$ se deduce

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} A}{a} b \quad \log \operatorname{sen} B = \log b + \log \operatorname{sen} A + \operatorname{colog} a$$

y, por tanto, obtenemos el ángulo B , con lo que estamos en el caso anterior

DISCUSIÓN.—Ahora bien, la determinación de B por su seno precisa alguna aclaración. Ante todo, por ser el seno de todo ángulo menor o igual a la unidad, para que el problema tenga solución deberá ser

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} < 1, \quad \text{es decir: } b \operatorname{sen} A < a$$

que se traduce geoméricamente en la condición evidente $h_c < a$.

Si $b \operatorname{sen} A = a$, $\operatorname{sen} B = 1$, $B = 90^\circ$, el triángulo es rectángulo

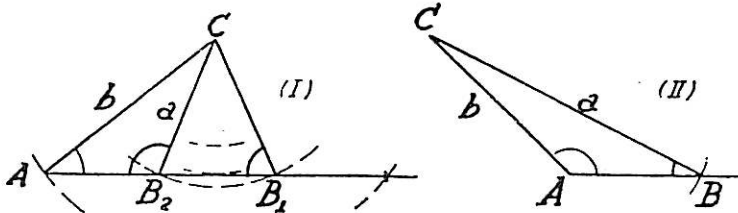
Si $b \operatorname{sen} A < a$ existe solución; pero puede haber dos ángulos que tengan el mismo seno, uno agudo y otro obtuso. ¿Valdrán las dos soluciones?

Recordemos para ello la construcción geométrica del triángulo, y se ve fácilmente que:

1.º Si A es agudo (fig. I), el problema puede admitir dos soluciones o una sola, según que a sea menor que b o no lo sea.

2.º Si A es obtuso (fig. II), no hay más que una solución cuando $a > b$.

A este mismo resultado se llega aplicando el criterio de que *a mayor lado debe oponerse mayor ángulo*. En efecto:



Si A es agudo y $a < b$, los dos valores agudo y obtuso cumplen la condición, $A < B$.

Si A es agudo y $a = b$ sólo cumplen la condición $A > B$, el ángulo B agudo.

Si A es obtuso, B tiene que ser agudo y, por tanto, también $a > b$, cumplido lo cual tampoco hay ambigüedad.

Ejemplo 1.º Datos: $a = 10$, $b = 15$, $A = 48^\circ$. Operando con tablas naturales.

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{15 \operatorname{sen} 48^\circ}{10} = 1,1146$$

El problema carece de solución

Ejemplo 2.º Datos $a = 10$, $b = 15$, $A = 35^\circ 20'$

$$\operatorname{sen} B = \frac{15 \operatorname{sen} 35^\circ 20'}{10} = 0,8676$$

de donde $B_1 = 60^\circ 11'$, $B_2 = 119^\circ 49'$ (con tablas naturales).

Como $b > a$ y también es $B_1 > A$, $B_2 > A$, las dos soluciones valen

Ejemplo 3.º Datos: $a = 13$, $b = 4$, $A = 53^\circ 8'$.

Apliquemos a este ejemplo el cálculo logarítmico

$$\log b = 0,6021$$

$$\log \operatorname{sen} A = \bar{1},9031$$

$$\operatorname{colog} a = \bar{2},8861$$

$$\log \operatorname{sen} B = \bar{1},3913$$

de donde $B_1 = 14' 15''$ o bien $B_2 = 165' 45''$, pero como es $b < a$ también debe ser $B < A$ y.. por tanto, sólo es válida la solución B_1 .

Compruébese gráficamente.

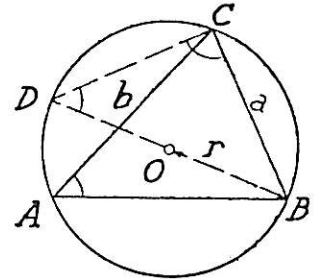
8. Radio del círculo circunscrito.—La razón común de cada lado al seno del ángulo opuesto es igual al diámetro del círculo circunscrito. En efecto, sea r el radio del mismo, y tracemos el diámetro BD . El triángulo BDC es rectángulo en C , siendo su ángulo D igual al A .

Por tanto:

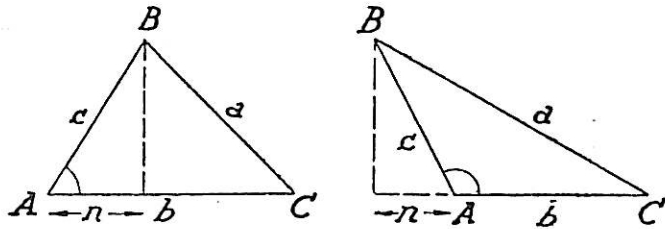
$$\text{sen } A = \text{sen } D = \frac{a}{2r}$$

de donde

$$2r = \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$



9. Teorema del coseno.—El teorema de Pitágoras generalizado, demostrado en el Tomo I, lec. 22, § 6, dice (v. fig.)



$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2bn \begin{cases} - & \text{si } A < 90^\circ \\ + & \text{si } A > 90^\circ \\ n = 0 & \text{si } A = 90^\circ \end{cases}$$

Podemos ahora formular trigonométricamente la proyección n de c sobre b ; $n = c \cos A$ si A es $< 90^\circ$ y $n = -c \cos A$ si $A > 90^\circ$ (por ser en tal caso $\cos A$ negativo).

En resumen, tanto si A es agudo, obtuso o recto, es válida la relación en la forma

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad [2]$$

y análogamente

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \quad [2]$$

TEOREMA DEL COSENO.—El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman

10. Casos de resolución en los que puede aplicarse el teorema del coseno.—El teorema del coseno relaciona tres lados y un ángulo. Podrá aplicarse en los siguientes casos:

CASO 3.º DATOS: DOS LADOS b, c Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO A

La primera de las fórmulas [2] dará el valor de a . El cálculo de B y C se completará como en el caso 2.º

Ejemplo. Datos: $b=50$ cm, $c=40$ cm, $A=29^{\circ}30'$.

Cálculo de a

$$a^2 = 50^2 + 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cos 29^{\circ}30' = 618,4 \text{ (con tablas naturales)}$$

$$a = 24,86$$

El cálculo de B y C como en el caso 2.º

$$\text{sen } B = 50 \cdot \text{sen } 29^{\circ}30' : 24,86 \quad B \simeq 82^{\circ} \text{ o bien } 98^{\circ}$$

de donde $C = 180^{\circ} - (A+B) = 78^{\circ}30'$ o bien $52^{\circ}30'$

y el único de estos dos valores que verifica la igualdad $C = \frac{c \text{ sen } A}{a}$ es el segundo.

Las soluciones son, pues, $a=24,86$, $B=98^{\circ}$, $C=52^{\circ}30'$.

NOTA.—La falta de exactitud, el engorro que supone resolver la ambigüedad en la determinación de ángulos y la imposibilidad de aplicar logaritmos en la fórmula [2], han hecho sustituir su uso por otras fórmulas que se estudiarán en la lección siguiente.

CASO 4.º DATOS: LOS TRES LADOS a , b , c .

Las tres fórmulas [2] y [2'] darán los cosenos de los ángulos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

y de estos cosenos se deducirán, sin ambigüedad, los ángulos.

Ejemplo. Datos: $a=13$, $b=4$, $c=15$ (usando tablas naturales)

$$\cos A = \frac{4^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 4 \cdot 15} = 0,6; \quad \cos C = \frac{13^2 + 4^2 - 15^2}{2 \cdot 4 \cdot 13} = -0,3846$$

$$A = 53^{\circ}8' \quad C = 112^{\circ}37'$$

Análogamente, o por resta: $B=14^{\circ}15'$

NOTA.—Los cálculos del ejemplo anterior han sido relativamente sencillos por la sencillez de los datos. Pero para cálculos topográficos, en los que los lados del triángulo tienen varias cifras, se comprende lo engorrosas que resultan las operaciones anteriores, a las que no es posible aplicar directamente el cálculo logarítmico por ser los numeradores polinomios.

Por estas y otras razones, haremos uso de otras fórmulas a las que puede aplicarse el cálculo logarítmico.

EJERCICIOS

Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

1.º $c=32,45$ m, $A=64^{\circ}6'$, $B=48^{\circ}58'$.

2.º $c=1315,16$ m, $B=28^{\circ}15'3''$, $C=110^{\circ}48'17''$

3.º $b=50,01$ cm, $c=66,60$ cm, $C=157^{\circ}21'$

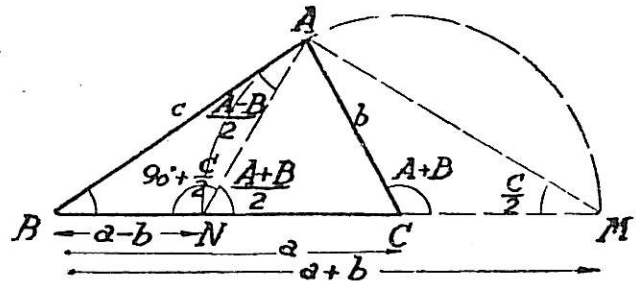
4.º $a=936,85$ m, $b=1266,45$ m, $A=18^{\circ}45'12''$.

LECCIÓN 4.ª—RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS. EL TEOREMA DE LAS TANGENTES Y LAS FÓRMULAS DE BRIGGS

Acabamos de ver los inconvenientes que, en orden a precisión y rapidez de cálculo, tiene la fórmula del coseno. El perfeccionamiento del trabajo exige, pues, el uso de nuevas fórmulas que sirvan para resolver los casos 3.º y 4.º evitando los inconvenientes citados.

1. Analogías de Mollweide y de Neper. Teorema de las tangentes.—

En el triángulo ABC (fig.) supongamos $a > b$ y llevemos b sobre a y sobre su prolongación a partir de C ; obtenemos así los puntos N y M , y el triángulo rectángulo ANM cuyos ángulos agudos vamos a calcular.



Se tiene $\sphericalangle ACM = A + B$ (exterior de $\triangle ABC$); $\sphericalangle ANM = \frac{1}{2}(A + B)$ (inscrito mitad del central ACM); $\sphericalangle AMC = \frac{1}{2}C$ (por análoga razón); $\sphericalangle BAN = \sphericalangle ANC - \sphericalangle B = \frac{1}{2}(A - B)$

Finalmente, $\sphericalangle ANB = 90^\circ + \frac{1}{2}C$ (exterior de $\triangle ANM$).

Aplicando el teorema de los senos a los triángulos ABM y ABN resulta

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\text{sen} \left[90^\circ + \frac{1}{2}(A - B) \right]}{\text{sen} \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A - B}{2}}{\text{sen} \frac{C}{2}} & [3] \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\text{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{\text{sen} \left[90^\circ + \frac{1}{2}C \right]}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\text{sen} \frac{A - B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} & [4] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Analogías de} \\ \text{Möllweide} \end{array}$$

Dividiéndolas resulta

$$\boxed{\frac{a - b}{a + b} = \text{tg} \frac{A - B}{2} \text{tg} \frac{C}{2}} \quad [5]$$

y por ser $\frac{1}{2}C = 90^\circ - \frac{1}{2}(A + B)$, se puede escribir en forma más simétrica y fácil de recordar, sustituyendo $\text{cot} \frac{1}{2}(A + B)$ por $1 : \text{tg} \frac{1}{2}(A + B)$.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \quad \text{Analogía de Neper (*)} \quad [6]$$

fórmula que puede enunciarse así:

TEOREMA DE LAS TANGENTES.—*La diferencia de los lados es a su suma, como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos es a la tangente de la semisuma.*

Dejamos al cuidado del lector escribir las fórmulas análogas que resultan de permutar las letras, aplicándolas a los otros lados.

2. Aplicación a la resolución de un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.—Dados a , b y C se conocen tres valores de los cinco ligados por la fórmula [5]. De ella se desprende:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}; \quad \log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \log(a-b) + \log \cot \frac{C}{2} + \operatorname{colog}(a+b) \quad [5 \text{ bis}]$$

Por tanto, determinaremos $A-B$ sin ambigüedad, y como además al conocer C se conoce $A+B=180^\circ-C$, tendremos la suma y diferencia de los ángulos A y B , con lo que calcularemos éstos fácilmente.

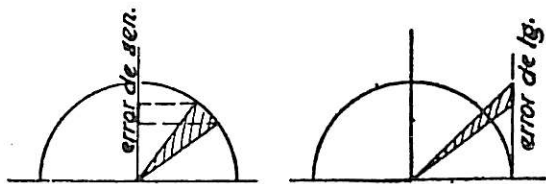
Calculados los ángulos, se obtendrá fácilmente el tercer lado por el teorema de los senos. Ahora bien; si sólo se desea obtener c sin calcular A y B , podríamos aplicar una cualquiera de las analogías de Mollweide una vez obtenido el ángulo $\frac{1}{2}(A-B)$. En efecto, de [3], por ejemplo, se desprende

$$c = \frac{(a+b) \operatorname{sen} \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}$$

fórmula a la que también puede aplicarse el cálculo logarítmico.

Como se ve, este procedimiento tiene las siguientes ventajas respecto del que indizamos en la lección anterior:

- 1.^a Se puede aplicar logaritmos a las fórmulas usadas.
- 2.^a La tangente determina los ángulos sin ambigüedad.
- 3.^a La tangente determina los ángulos con mayor exactitud que el seno o el coseno.



Las figuras muestran intuitivamente cómo un error o diferencia en el seno modifica el ángulo en modo más considerable que el mismo error en la tangente (**).

(*) *Analogía* es nombre que daban los antiguos a una proporción.

(**) La demostración rigurosa de este hecho no ofrece dificultad, aplicando los teoremas de adición de argumentos que veremos en el próximo capítulo.

Ejemplo. Resolvamos el mismo triángulo de la lección anterior $b=50$, $c=40$, $A=29^{\circ}30'$. La fórmula [5] aplicada a los lados b y c da:

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \log (b-c) + \log \cot \frac{A}{2} + \operatorname{colog} (b+c)$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log \cot 14^{\circ}45' = 0,5795$$

$$\operatorname{colog} 90 = 2,0458$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = 1,6253$$

$$\frac{1}{2} (B-C) = 22^{\circ}53', \quad B-C = 45^{\circ}46'$$

y como $B+C = 180^{\circ} - 29^{\circ}30' = 150^{\circ}30'$, resulta $B = 98^{\circ}8'$, $C = 52^{\circ}22'$

Con lo que hemos obtenido estos ángulos con mayor exactitud que en la lección anterior. Calculados los ángulos se calcula fácilmente el tercer lado a .

$$\log \operatorname{sen} A = 1,6923$$

$$\log c = 1,6021$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} C = 0,1013$$

$$\log a = 1,3957$$

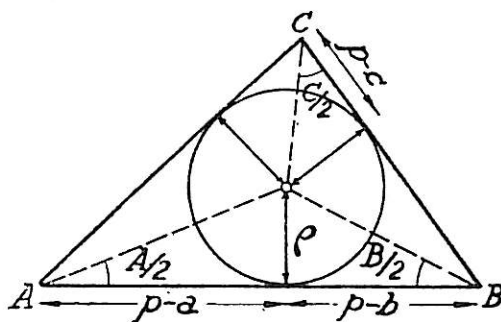
$$a = 24,87$$

3. Relación entre los lados, los ángulos y el radio del círculo inscrito. Fórmulas de Briggs.—En la lección 24 del Tomo I obtuvimos la siguiente expresión del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo, en función de los lados a , b , c y del semiperímetro p

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

fórmula fácilmente calculable por logaritmos.

Recordando ahora las expresiones de los segmentos $p-a$, $p-b$, $p-c$, comprendidos entre los vértices A , B , C y los puntos de contacto de dicha circunferencia con los lados, se obtienen las siguientes expresiones de las tangentes de los semiángulos (v. fig.):



$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\rho}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\rho}{p-b} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\rho}{p-c} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

[7]

llamadas fórmulas de Briggs.

4. Aplicación a la resolución de un triángulo, dados los tres lados.—Dados, pues, los tres lados a, b, c de un triángulo y calculados $p, p-a, p-b, p-c$, las anteriores fórmulas permiten obtener sin ambigüedad las mitades de los ángulos mediante sus tangentes y, por lo tanto, con mayor exactitud que en la lección anterior y además mediante fórmulas a las que se puede aplicar el cálculo logarítmico. Por ejemplo:

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} [\log (p-b) + \log (p-c) + \operatorname{colog} p + \operatorname{colog} (p-a)]$$

y análogamente los demás.

Ejemplo: Datos, $a=13,51$ m, $b=17,64$ m, $c=21,75$ m. Usaremos en este ejemplo tablas de siete decimales (Schrön)

$$\begin{array}{lll} 2p=a+b+c=52,90 & p=26,45 & \operatorname{colog} p=\overline{2,5775743} \\ p-a=12,94 & & \operatorname{colog} (p-a)=\overline{2,8380657} \\ p-b=8,81 & & \log (p-b)=0,9449759 \\ p-c=4,70 & & \log (p-c)=0,6720979 \end{array}$$

$$\overline{1,0827138}$$

$$\text{cuya mitad } \overline{1,5413569} = \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ da } \frac{A}{2} = 19^{\circ} 10' 44'', \quad A = 38^{\circ} 21' 28''$$

Análogamente, $B=54^{\circ} 7' 22''$, $C=87^{\circ} 31' 10''$. Se comprueba que $A+B+C=180^{\circ}$.

5. Cálculo trigonométrico del área de un triángulo.—Sustituyendo, en la fórmula del área de un triángulo $[ABC] = \frac{1}{2} ah_a$, la altura h_a por su expresión $h_a = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$, se obtiene

$$\text{Area} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B \quad [1]$$

$$\text{y análogamente} \quad = \frac{1}{2} cb \operatorname{sen} A$$

fórmulas directamente aplicables cuando se dan dos lados y el ángulo comprendido (caso 3.^o).

Si se dan dos ángulos A y B y un lado a (caso 1.^o), calcularemos $C=180^{\circ}-(A+B)$ y $b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$ y sustituyendo, queda el área en función de los tres ángulos y un lado

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \quad [2]$$

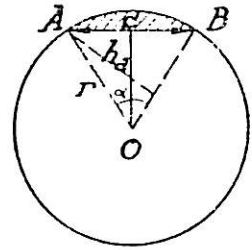
y análogamente en función de b^2 y c^2 .

Si se dan dos lados a, b y el ángulo opuesto a uno de ellos A (caso 2.^o) se calculan los ángulos B y C como hemos indicado en la lección anterior y el área, por [1].

Si se dan los tres lados, el área se calculará directamente por la fórmula de Heron, Tomo I, lección 28, § 7.

$$\text{Area} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

6. Área de un segmento regular.—Dijimos en el Tomo I que el área de un segmento circular limitado por un arco AB y su cuerda, se obtiene sumando o restando (según que sea mayor o menor que un semicírculo) al área del sector AOB la del triángulo AOB .



Como para la primera se necesita el radio r y la amplitud α (radianes) del ángulo central AOB correspondiente a la cuerda, y la relación entre dicha amplitud y las restantes dimensiones lineales es de carácter trigonométrico, podemos afirmar que, salvo ángulos particulares (lec. 1.^a, § 6). *el cálculo del área del segmento circular exige el uso de tablas.*

Dados, por ejemplo, r y α se tendrá (v. figura) $h_a = r \text{ sen } \alpha$

$$\text{Area triángulo} = \frac{1}{2} r^2 \text{ sen } \alpha \quad \text{Area sector} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

$$\text{Area segmento menor} = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \text{sen } \alpha).$$

Dados r y c se hallará α por la relación $\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{2r}$: r y se aplicará la fórmula anterior.

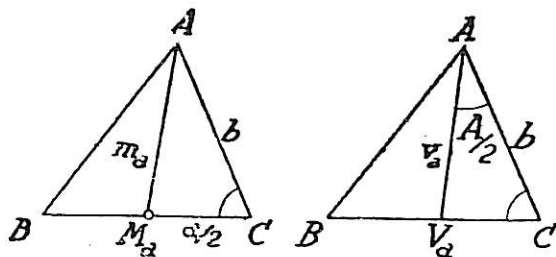
Restando de πr^2 se tendrá el área del segmento mayor. Cuando hayamos generalizado la definición de sen para ángulos $> 180^\circ$ (lec. 6.^a) veremos que la fórmula anterior vale también para $\alpha > 180^\circ$, es decir, para un segmento mayor que un semicírculo.

7. Cálculo de medianas y bisectrices.—En el tomo I, lección 24, obtuvimos las fórmulas que dan las bisectrices y medianas de un triángulo en función de sus lados

$$v_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}, \quad m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$

y son análogas para v_b , v_c , m_b , m_c , permutando las letras.

Si se conocen los ángulos, m_a se puede calcular trigonométricamente resolviendo el triángulo AM_aC que forman



m_a y b y del que se conocen los lados $\frac{a}{2}$, b y el ángulo C ; v_a se puede calcular

análogamente resolviendo el triángulo AV_aC , que forman v_a y b , y del que se conocen dos ángulos $\frac{A}{2}$, C y un lado b .

8. Resolución de triángulos con otros datos.—De igual modo que en el Tomo I se ha aprendido a construir triángulos dados algunos elementos que no son precisamente sus lados o sus ángulos, así también podemos proponer aquí la resolución de los mismos mediante el cálculo, echando mano de las fórmulas y relaciones obtenidas. Algunos ejemplos darán idea de los distintos recursos que se pueden emplear. Nos limitaremos a indicar en cada caso el camino, dejando al cuidado del lector el desarrollo y discusión.

Ejemplo 1.^o Datos: *Un lado c, el ángulo opuesto C y la suma o diferencia de los otros dos lados a±b.*

Las analogías de Mollweide (§ 1) permitirán calcular A—B. Se conoce $A+B=180^\circ-C$. Obtendremos así A y B.

Ejemplo 2.^o Datos: *Un lado c, un ángulo contiguo B y la suma de los otros dos lados a+b.*

Podemos calcular p y p—c. El producto de las dos primeras fórmulas de Briggs da

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{p-c}{p}$$

lo que permite calcular A.

Si en lugar de a+b se diera a—b calcularíamos p—b y p—a y dividiendo las fórmulas Briggs, tendríamos para el cálculo de A

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} : \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{p-b}{p-a}$$

Ejemplo 3.^o Datos: *Dos lados a, b y la suma o diferencia de los ángulos opuestos A±B.* Las analogías de Neper dan, respectivamente, A—B o A+B, determinándose fácilmente y B.

Ejemplo 4.^o Datos: *Dos ángulos A, B y la suma o diferencia de los lados opuestos a±b.* Aplicación análoga de las fórmulas de Neper para calcular a±b y, por tanto, a y b.

Ejemplo 5.^o Datos: *Un lado a, el ángulo opuesto A y el perímetro 2p.* Calculando $2p-a=b+c$ estamos en el ejemplo 1.^o

Ejemplo 6.^o Datos: *El perímetro 2p y dos ángulos A y B.*

Se obtiene $C=180^\circ-(A+B)$ y dividiendo 2p en partes proporcionales a sen A, sen B, sen C, se tendrán los lados a, b, c. (Teorema de los senos.)

Ejemplo 7.^o Datos: *Una altura h_a y dos lados.*

Uno de ellos concurrirá con la altura, por ejemplo b y se tendrá $h_a=b \operatorname{sen} C$, con lo que se conocerá C, es decir, dos lados y un ángulo del triángulo.

Ejemplo 8.^o Datos: *Un lado a, el ángulo opuesto A y la altura h_a sobre él,*

Se conoce el producto $bc = \frac{2 \text{ área}}{\operatorname{sen} A} = \frac{h_a \cdot a}{\operatorname{sen} A}$.

Por otra parte, la primera fórmula del coseno da b^2+c^2 y, por tanto, $(b+c)^2$, o sea b+c. Conocida la suma y el producto de b y c se conocerán estos lados.

Ejemplo 9.^o Datos: *Dos alturas h_a, h_b y un lado.*

Si el lado es c se tendrá $h_a=c \operatorname{sen} B$, $h_b=c \operatorname{sen} A$, para hallar B y A. Si el lado es a se tendrá $h_a:h_b=b:a$, con lo que se calculará b, y luego $h_b=a \operatorname{sen} C$ para hallar C.

Ejemplo 10.^o *Las tres alturas h_a, h_b, h_c.*

Como los lados son inversamente proporcionales a las alturas, hallando tres segmentos cualesquiera que cumplan esta propiedad, los ángulos del triángulo que determinan serán iguales a los del triángulo pedido A, B, C. Finalmente, $a=h_b:\operatorname{sen} C$, $b=h_a:\operatorname{sen} C$, $c=h_a:\operatorname{sen} B$.

Ejemplo 11.^o Datos: *Dos lados a, b y la mediana concurrente m_c.*

Trazando por los vértices A y B paralelas a los lados opuestos se forma un paralelogramo, una de cuyas diagonales es 2m_c.

Resuélvase el triángulo formado por 2m_c, a, y la paralela =b.

Ejemplo 12.^o Datos. *Las tres medianas* m_a, m_b, m_c .
El triángulo cuyos lados son $2m_a, 2m_b, 2m_c$ tiene por medianas los $\frac{3}{2}$ de los lados del triángulo buscado (véase Tomo I, lec 34, § 3).

Ejemplo 13.^o Datos: *Dos lados* b, c *y la bisectriz concurrente* v_a .
Sustituyendo en la expresión de v_a (§ 7) se calculará el producto $p(p-a)$. Pero la suma $p+p-a=b+c$ también es conocida. Podemos, pues calcular p y $p-a$ y, por tanto, los tres lados.

Ejemplo 14.^o Datos: *Dos lados* a, b *y el radio* r *de la circunferencia circunscrita*.

Puesto que $2r = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ se pueden calcular A y B .

Ejemplo 15.^o Datos: *Dos ángulos* A *y* B *y el radio* r *de la circunferencia circunscrita*.
Las relaciones anteriores dan ahora a y b .

Ejemplo 16.^o Datos: *Dos ángulos* A *y* B *y el radio* ρ *de la circunferencia inscrita*.
Puesto que $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \rho : (p-a)$ (§ 3) se puede calcular $p-a$ y análogamente $p-b$. Su suma da c .

Ejemplo 17.^o Datos: *Un lado* c , *el ángulo opuesto* C *y el radio* ρ *de la circunferencia inscrita*.

Se tendrá $p-c = \rho : \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$, con lo que conoceremos p y, por tanto, $2p-c=a+b$. La primera fórmula de Mollweide (§ 1) nos permitirá calcular $A-B$, que en combinación con $A+B=180^\circ-C$ nos dará A y B .

Ejemplo 18.^o Datos: *Un lado* a , *el radio* ρ *de la circunferencia inscrita y el radio* r *de la circunscrita*.

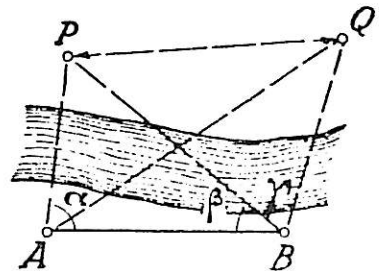
Calculando $\sin A = \frac{a}{2r}$ estamos en el caso anterior

Ejemplo 19.^o Datos: *Dos lados* a *y* b *y el área* S .
La fórmula (§ 5) $S = \frac{1}{2} ab \sin A$ permite calcular A .

Ejemplo 20.^o Datos: *Dos ángulos* A *y* B *y el área* S .
La fórmula [2] del § 5 permite calcular a . Análogamente b y c .

9. Aplicaciones de la Trigonometría a la Topografía.—Los problemas de Trigonometría tienen especial e importante aplicación en Agrimensura, Topografía, etc., es decir, en todo lo que afecta a mediciones sobre el terreno. La medición de grandes distancias es, en efecto, operación mucho más penosa que la medida de ángulos, y se comprende por ello la conveniencia de *medir indirectamente distancias resolviendo triángulos*.

Supongamos, por ejemplo, que nos interesa conocer la distancia de A a P , dos puntos entre los cuales hay un obstáculo que dificulta la medida directa, por ejemplo, un río. Elegiremos otro punto B de modo que la distancia AB sea cómoda de medir con exactitud, y hechas estaciones en A y B , mediremos con aparatos adecuados (teodolitos) los ángulos α, β formados por la recta AB y las visuales a P . Con estos elementos podemos calcular las distancias AP y BP , resolviendo el triángulo ABP .

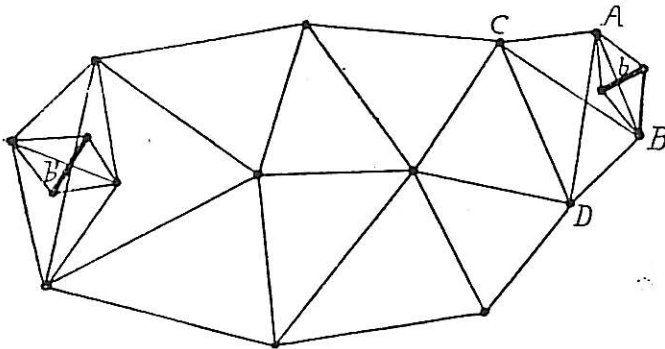


Es más, podemos calcular también la distancia entre dos puntos P y Q , los dos inaccesibles (pero visibles desde A y B). En efecto, basta repetir el problema anterior para Q , con lo cual tendremos calculado BQ . Ahora bien, PB y BQ forman un triángulo del que conocemos estos lados y el ángulo γ que forman (leído en el teodolito al hacer estación

en B), resolviendo el triángulo tendremos, pues, el valor de PQ . Este es el llamado problema de *Snellius*.

Se comprende que, repitiendo el proceso, haciendo estación en los nuevos vértices obtenidos, si fuera preciso, llegaríamos a envolver la comarca en una *red de triángulos* cuyos elementos, calculados escalonadamente y reproducidos a escala en el dibujo, servirían de esqueleto para la formación de un mapa del lugar.

Todas las dimensiones lineales del mapa pueden hacerse depender, por tanto, de la medida de una sola longitud b sobre el terreno, que se llama *base* y que se elige en terreno llano adecuado para que las operaciones de medida directa puedan realizarse con la mayor exactitud posible.



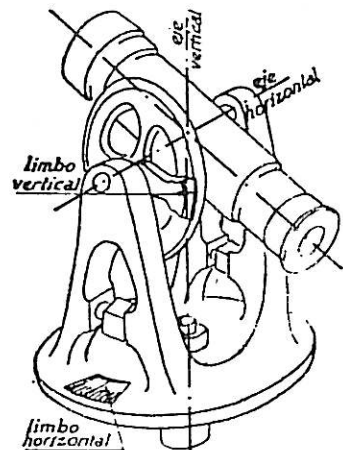
En la figura del margen se indica la disposición de una red y su enlace con la base b , longitud de partida. Conviene medir una nueva base b' como comprobación.

Hay que advertir que, en lo anterior, suponemos todos los puntos situados en un mismo plano horizontal, es decir, se calculan las proyecciones de las distancias sobre un plano horizontal. El teodolito mide, en efecto, las proyecciones de los ángulos sobre el horizonte.

El teodolito es, en esencia, un antejo que puede girar alrededor de un eje horizontal (una vez nivelado el aparato), y el conjunto gira alrededor de un eje vertical.

Los giros alrededor de ambos ejes se leen en limbos adecuados, con sus *nonius*, que permiten apreciar fracciones de minuto (en algunos hasta el segundo). Los hay con brújula, para referir los ángulos horizontales al meridiano magnético.

Este aparato aprecia, pues, dos clases de ángulos: en el limbo vertical mide la inclinación de las visuales sobre el horizonte (o con la vertical), y en el limbo horizontal mide los ángulos formados por las proyecciones horizontales de dichas visuales (ángulos azimutales). Es preciso insistir en este hecho: mientras el limbo vertical mide ángulos de la visual con el horizonte, el limbo horizontal mide, en rigor los diedros formados por los planos verticales que pasan por las visuales.



EJERCICIOS

Resolver los triángulos dados por los siguientes elementos:

- 1.º $b=0,609$ m, $c=1,532$ m, $A=111^{\circ}59'$.
- 2.º $a=15,2$ cm, $b=20,75$ cm, $C=63^{\circ}20'$.
- 3.º $a=0,291$ m, $b=0,353$ m, $c=0,264$ m.
- 4.º $a=1235$ m, $b=307$ m, $c=1500$ m.
- 5.º Dos fuerzas de 14,5 kg y 23,1 kg dan una resultante de 10,5 kg. ¿Qué ángulos forman entre sí, y qué ángulos forman con la resultante?
- 6.º Hallar la distancia PB de la figura anterior suponiendo $AB=120,6$ m, $\alpha=82^{\circ}10'$, $\beta=57^{\circ}40'$.
- 7.º Hallar la distancia PQ suponiendo que el ángulo QAB vale $42^{\circ}35'$ y que el QBA vale $115^{\circ}14'$.

8. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de inclinación de $36^{\circ}30'$ y $23^{\circ}15'$. Si la distancia entre estos puntos es de 35 m hallar la altura de la torre.

9. Desde un aeroplano volando en línea recta entre dos puntos, A y B , que distan entre sí 3250 m se ven dichos puntos con ángulos de depresión de $48^{\circ}20'$ y $37^{\circ}40'$, respectivamente. Calcular las distancias oblicua y horizontal del aeroplano a cada punto y la altura de vuelo.

10. Una biela de 3 m acciona una manivela de 0,5 m. Cuando esta última forma un ángulo de 60° con el eje del cilindro calcular el ángulo que forma la primera. (Se supone el eje de giro de la manivela en línea recta con el eje del cilindro.)

11. Un aeroplano parte de un lugar a las nueve de la mañana a una velocidad de 250 km/h y rumbo NE. Otro parte del mismo lugar media hora después con velocidad de 300 km/h y rumbo SSO. ¿A qué distancia se hallan a las diez?

12. Un avión se mueve con rumbo N y velocidad de 200 km/h en una masa de aire que tiene velocidad de 10 m/s en dirección SO. Calcular la velocidad y rumbo del avión respecto de la Tierra.

13. Desde un automóvil en marcha por una carretera rectilínea en dirección NO se ven en un momento dado dos caseríos alineados con el coche en dirección $N 15^{\circ} E$. Después de dos kilómetros de marcha se ve el primer caserío exactamente al E y el segundo al NE del coche. Calcular la distancia entre ambos caseríos.

14. A una distancia de 89 m del pie de una torre metálica de 51,60 m de altura se ve la torre bajo un ángulo de $23^{\circ}27'$. Calcular el desnivel entre el punto de observación y el pie de la torre.

15. Un buque navega en dirección NE a 10 millas por hora. Un submarino situado 50 millas al O inicia su persecución a 20 millas por hora. Calcular el rumbo que debe tomar el submarino y el tiempo que tardará en dar alcance al buque.

16. Para medir la altura de una nube se han hecho simultáneamente dos observaciones desde los puntos A y B distantes 1 km entre sí. La inclinación de la visual desde A es $47^{\circ}15'$. Los ángulos que las proyecciones de las visuales desde A y B forman con la recta AB son, respectivamente, $38^{\circ}14'$ y $53^{\circ}20'$. Hallar la altura de la nube.

17. Haciendo estación entre dos puntos A y B del patio del Instituto de San Isidro, distantes entre sí 34,38 m, se han dirigido visuales a la punta P del pararrayos de la Catedral (inmediata al Instituto), y se han obtenido los siguientes resultados:

Inclinación de la visual BP , $38^{\circ}50'$

Angulo entre los planos verticales por BP y por BA , $54^{\circ}40'$.

Angulo entre los planos verticales por AP y por AB , $97^{\circ}30'$.

Calcular la altura de la Catedral de San Isidro, sabiendo que el aparato se hallaba a 1,25 m sobre el suelo.

18. Hallar el área comprendida entre dos cuerdas de 3 m y 4 m en un círculo de 5 m de diámetro (dos soluciones).

19. Un orificio circular está obturado por un disco circular de igual diámetro que gira alrededor de un eje situado en su borde. Expresar en función del ángulo de giro α (a partir de la posición de obturación completa) la fracción de orificio libre.

$$20. \text{ Demostrar que } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{bc}}$$

21. Calcular los lados y el área de un triángulo de perímetro 100 m sabiendo que $\sphericalangle A = 2\sphericalangle B$ y que $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$.
22. Supuestos conocidos los lados y los ángulos de un triángulo calcular las distancias de dichos lados al ortocentro.
23. Idem íd. al baricentro.
24. Idem íd. al circuncentro.
25. Conocidos los lados y los ángulos de un triángulo. Calcular los del triángulo órtico.
26. Hallar la fórmula que da el área de un triángulo en función de sus ángulos y del radio de la circunferencia inscrita.
27. Resolver un triángulo, dados un ángulo A , la suma $b+c$ de los lados que lo forman y la altura h_a que parte del vértice del ángulo.
28. Resolver un triángulo dados un lado a , el ángulo opuesto A y la altura correspondiente h_a .
29. Resolver un triángulo ABC , conocidos $a-b$, $A-B$ y C .
30. Idem íd. conocidos dos ángulos y una altura.
31. Idem íd. conocidos un lado a , un ángulo contiguo B y la altura h_a .
32. Idem íd. conocidos h_a , h_b , A .
33. Idem íd. conocidas dos alturas y el ángulo que forman.
34. Idem íd. conocidos dos lados y la bisectriz del ángulo que forman.
35. Idem íd. un ángulo, su bisectriz y el lado opuesto.
36. Idem íd. un ángulo, la bisectriz y la altura que parten de su vértice.
37. Idem íd. la mediana, la altura y la bisectriz que parten de un mismo vértice.
38. Calcular los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos mixtilíneos limitados por los lados de un triángulo y la circunferencia inscrita, supuestos conocidos los elementos de dicho triángulo.
39. A la altura de 3 m sobre el suelo hay un foco de luz. Un bastón de 1 m se apoya sobre el suelo en un punto situado a 2 m del pie de la perpendicular por el foco. Calcular la máxima longitud de sombra que puede proyectar el bastón.
40. Nivelado un teodolito sobre un espejo horizontal se observa un punto, de altura H conocida, anotando el ángulo α de elevación de la visual directa y el ángulo β de depresión con que se ve la imagen del punto reflejada en el espejo. Deducir de estos dos ángulos la altura del eje horizontal de giro del anteojo sobre el espejo, y una vez obtenida, deducir, inversamente, la altura de otro punto cualquiera mediante análogas observaciones.
Deducir las distancias de los puntos observados al teodolito.
41. En un punto situado en el diedro formado por dos paredes rectilíneas se efectúa un disparo del que se perciben tres ecos: El primero, procedente de la pared más próxima, al cabo de $1/2$ segundo; el segundo, de la otra pared, al cabo de $2/3$ sg., y el tercero, procedente de la reflexión del sonido en ambas paredes, al cabo de un segundo, calcular el ángulo que forman estas paredes.
42. Sabiendo que las distancias de un punto del plano de un triángulo a sus vértices son proporcionales a tres números dados, calcular estas distancias en función de los elementos del triángulo.
43. Desde tres puntos A , B , C de un terreno horizontal cuya posición relativa se conoce, se dirigen visuales simultáneas a un avión, anotando los tres ángulos de elevación α , β , y de dichas visuales. Calcular la altura del avión en función de dichos ángulos y de los elementos del triángulo ABC .

Copítulo II.—PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

LECCIÓN 5.^a—FUNCIONES CIRCULARES DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

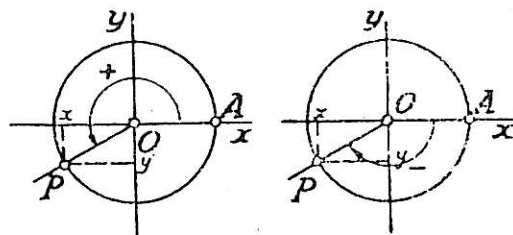
En las lecciones anteriores hemos puesto al lector en posesión de la técnica de resolución de triángulos. Pero las funciones circulares introducidas en estos problemas tienen tal riqueza de aplicaciones, que se impone generalizar todavía su *definición para ángulos cualesquiera* y estudiar sus propiedades, con lo que nos pondremos en condiciones no sólo de abordar nuevos problemas, sino de contemplar desde un punto de vista más elevado lo hecho hasta aquí.

He aquí, por ejemplo, una cuestión que no podemos penetrar con los conocimientos adquiridos hasta ahora. La relación $A+B+C=180^\circ$ y las que traducen los teoremas de los senos, de los cosenos, de las tangentes, de Mollweide, de Briggs, nos han servido para resolver las distintas facetas de un mismo problema que resume toda la Trigonometría plana propiamente dicha: *Dadas tres de las cantidades a, b, c, A, B, C (que no sean los tres ángulos A, B, C), hallar las otras tres.* Para tal problema, teóricamente no son precisas más de tres relaciones independientes entre estas cantidades. Ello significa que todas las restantes relaciones han de ser consecuencia de estas tres. Prescindiendo de su significación geométrica, ¿cuál es el nexo analítico que permite deducir unas relaciones como consecuencia de las otras?

La clave de todas las propiedades analíticas de las funciones circulares la constituyen los llamados *teoremas de adición*; a ellos dedicaremos, pues, atención inmediata (v. lección siguiente).

1. **Las funciones circulares de ángulos cualesquiera.**—En la lección 3.^a hemos insinuado ya las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo cualquiera, al dar las correspondientes a un ángulo obtuso.

Tomada como origen común de todos los ángulos una cierta semirrecta OX , tendremos en considerar *positivos* los ángulos llevados a partir de este origen en sentido positivo (contrario a las agujas de un reloj; v. Tomo I, lección 3.^a) y *negativos* los llevados en sentido opuesto.



Consideremos un sistema cartesiano rectangular cuyo semieje positivo coincida con OX y cuyo semieje OY positivo sea la semirrecta que forma con OX el ángulo $+90^\circ$.

Trazada ahora una circunferencia de centro O , a cada ángulo corresponderá un arco de origen A en el eje OX y un extremo P .

Las coordenadas cartesianas de dicho extremo servirán para definir el seno y el coseno. Así:

Llamaremos *seno de un ángulo α* (positivo o negativo, convexo o cóncavo, menor o mayor que 360°) a la razón de la ordenada al radio.

Llamaremos *coseno*, a la razón de la abscisa al radio.

Llamaremos *tangente*, a la razón de la ordenada a la abscisa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{cos } \alpha = \frac{x}{r} \quad \text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

La *cosecante*, *secante* y *cotangente* se definen, respectivamente, como recíprocas del seno, coseno y tangente.

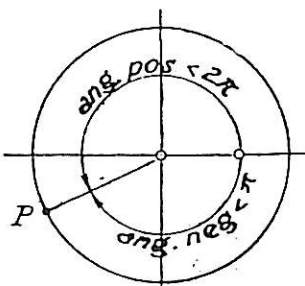
Cualquiera que sea el cuadrante en que se halle P se tiene evidentemente

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1, \quad \text{es decir,} \quad \boxed{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1}$$

Por tanto subsisten para cualquier ángulo las relaciones fundamentales entre sus funciones circulares y que permiten calcular una de ellas conocidas las demás, como se hizo en el § 3 de la lección 1.ª Lo único que tendremos que elegir ahora convenientemente serán los signos de los radicales para ponerlos de acuerdo con el signo del seno y del coseno, lo que vendrá dado por el cuadrante en que cae el extremo del arco.

Extremo en el cuadrante	Signo del seno	Signo del coseno
1.º	+	+
2.º	+	—
3.º	—	—
4.º	—	+

2. Coordenadas polares.—En lugar de determinar la posición de un punto P del plano por sus coordenadas cartesianas respecto de dos ejes rectangulares OX, OY , podemos definirla determinando el vector \vec{OP} mediante su longitud r , que llamaremos *módulo*, y el ángulo α que forma con la semirrecta origen OX , ángulo que llamaremos *argumento*, y que consideraremos positivo o negativo según el sentido convenido en el párrafo anterior. Los dos números módulo y argumento se llaman *coordenadas polares de P* . Claro es que un argumento y un módulo determinan un solo vector \vec{OP} y, por tanto, un solo



punto P ; pero un mismo vector \vec{OP} puede tener infinidad de argumentos, todos los que difieren de α en un múltiplo entero de 360° . Su expresión en radianes será, pues, $\alpha + 2k\pi$. Suele adoptarse o el argumento positivo comprendido entre 0 y 2π o el argumento positivo o negativo de valor absoluto $< \pi$.

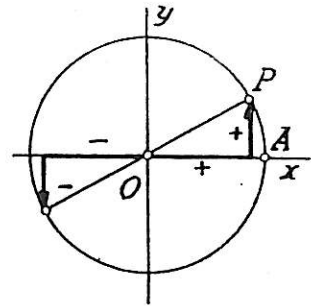
En virtud de las definiciones establecidas en el párrafo anterior, podemos, pues, escribir estas relaciones

entre las coordenadas polares r , α y las cartesianas x , y de un mismo punto P

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha &= y/x \\ y &= r \operatorname{sen} \alpha & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

que permiten hallar unas coordenadas, conocidas las otras.

3. Determinación de funciones circulares de ángulos negativos, de ángulos cóncavos y de ángulos mayores que 2π .—En las lecciones anteriores hemos demostrado las relaciones que ligan las funciones circulares de ángulos complementarios y suplementarios, lo que permite hallar las funciones circulares de ángulos convexos cualesquiera, mediante las tablas conocidas, de ángulos agudos.



I. Veamos ahora cómo determinaremos las funciones circulares de ángulos cóncavos, es decir, $>180^\circ$.

Los extremos de dos arcos que difieren en 180° están diametralmente opuestos; por lo tanto, según resulta de la figura:

El seno y el coseno de un ángulo son opuestos al seno y coseno del ángulo aumentado (o disminuido) en 180° , o sea en π radianes ()*

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \pi) = -\operatorname{sen} \alpha, \quad \operatorname{cos}(\alpha \pm \pi) = -\operatorname{cos} \alpha$$

y dividiendo

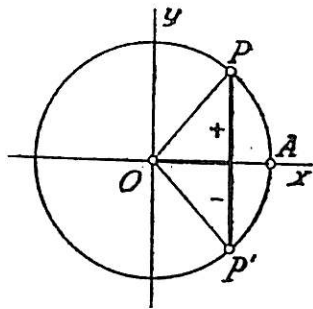
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Dado un ángulo cóncavo bastará, pues, restarle 180° y determinar las funciones circulares del ángulo resultante cambiándolas de signo, si se trata del seno o coseno.

II. Dos arcos que difieren en 360° , o un múltiplo de 360° tienen el mismo extremo; por tanto:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm 2\pi) = \operatorname{sen} \alpha, \quad \operatorname{cos}(\alpha \pm 2\pi) = \operatorname{cos} \alpha, \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm 2\pi) = \operatorname{tg} \alpha.$$

lo que permite hallar el seno, coseno y tangente de un ángulo positivo o negativo de cualquier graduación, restando o sumando 360° cuantas veces sea preciso, hasta reducirlo a un ángulo positivo menor que cuatro rectos.



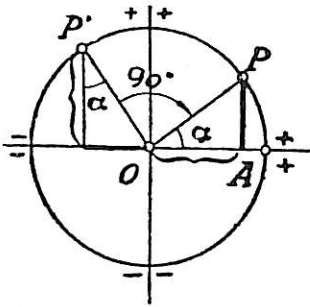
III. Más fácil es hallar las funciones circulares de ángulos negativos mediante las de sus opuestos. En efecto, la simple inspección de la figura dice que:

Los cosenos de ángulos opuestos coinciden, y los senos y tangentes son opuestos.

$$\operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos} \alpha, \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

(*) En la expresión de las propiedades analíticas de las funciones conviene adoptar siempre la medida del ángulo en radianes, por razones que se aprecian más fundamentamente en Cálculo infinitesimal y sus aplicaciones.

4. **Relación entre las funciones trigonométricas de los ángulos que difieren en $\pi/2$.**—Los dos ejes dividen el plano de cuatro cuadrantes. Ordenados en el sentido positivo de los ángulos, se observa que



la abscisa en cada cuadrante tiene el mismo signo que la ordenada en el siguiente, y signo contrario que la ordenada en el anterior.

Un giro de 90° en el sentido positivo hace pasar el extremo de un arco al cuadrante siguiente, permutando la abscisa con la ordenada (en virtud de la igualdad de los triángulos rectángulos que forman con el radio).

Por consiguiente:

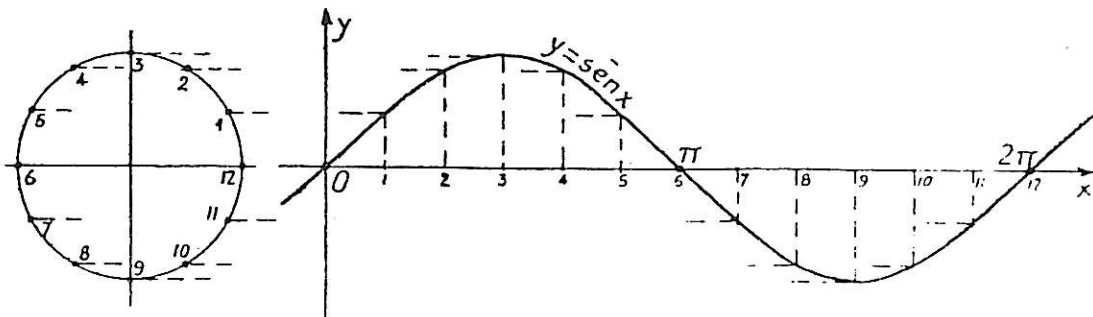
$$\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \quad \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} \alpha \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha$$

5. **Gráficas cartesianas de las funciones circulares.**—Con lo dicho en los párrafos anteriores, las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ tienen significación precisa cualquiera que sea el ángulo, y puede determinarse su valor mediante las tablas.

Podemos, pues, representar gráficamente estas funciones tomando unos ejes rectangulares y llevando en el eje x valores del ángulo, los cuales se expresan y miden habitualmente en *radianes*, es decir, en lugar de poner 360° se escribe y mide 2π .

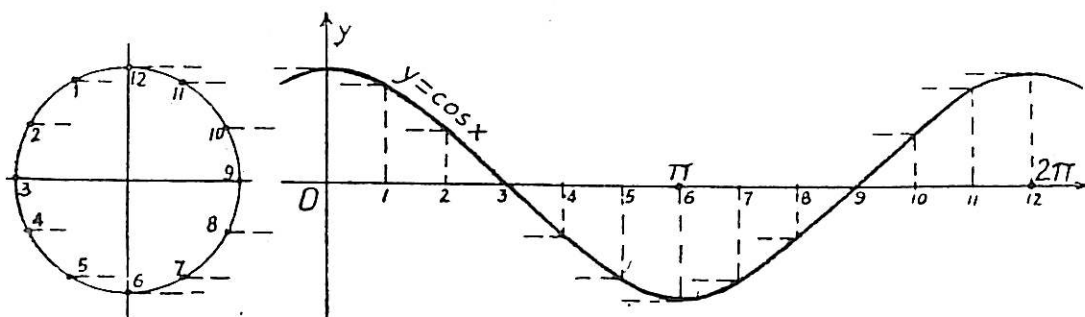
Resultan así las siguientes curvas, de cuya construcción por puntos dan fácil idea las figuras. Dividido el intervalo 0 a 2π en tantas partes iguales como



se ha dividido la circunferencia auxiliar, cuyo radio se supone la unidad, basta llevar en la ordenada de cada punto de división el valor del seno correspondiente (lo que en la figura se hace mediante líneas de referencia horizontales), para tener la curva representativa de $y = \operatorname{sen} x$, llamada *sinusoide*.

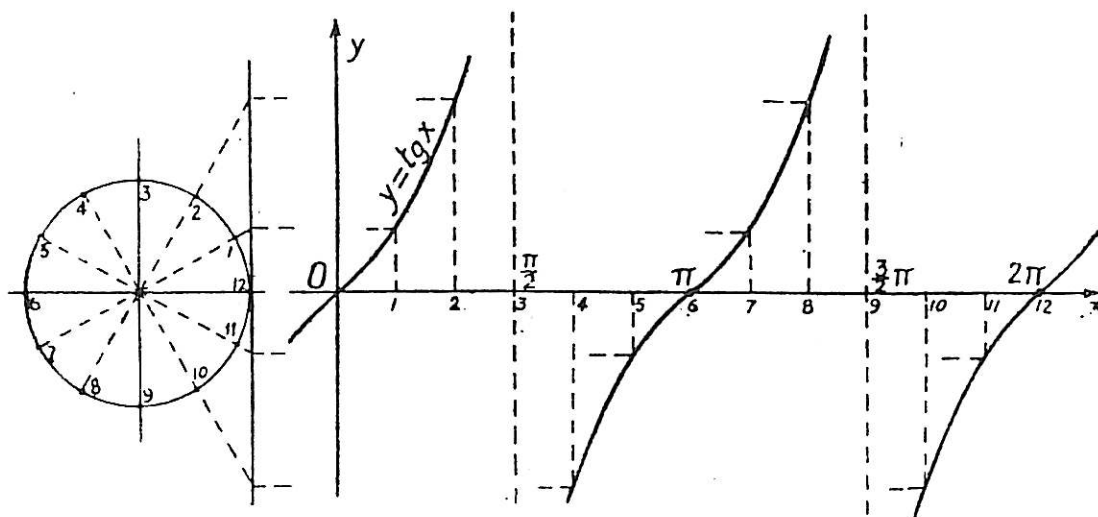
Análogamente se construyen las de $y = \cos x$, llamada *cosinusoide*. Como $\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ ha bastado girar 90° la numeración de los puntos de división en la circunferencia auxiliar de la construcción.

La cosinusoide es, pues, la misma curva senoide trasladada a la izquierda de $\frac{\pi}{2}$. lo mismo en una que en otra curva, basta dibujar una onda, es decir, la porción entre cero y 2π , pues por ser $\text{sen}(\alpha \pm 2\pi) = \text{sen} \alpha$ se repetirán



las mismas ordenadas en los intervalos siguientes: 2π a 4π , 4π a 6π , ... y anteriores: -2π a 0 , -4π a -2π , ...

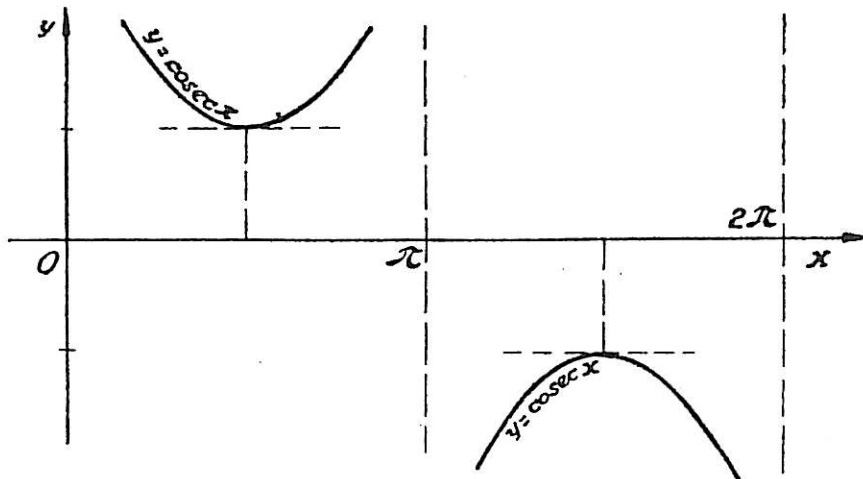
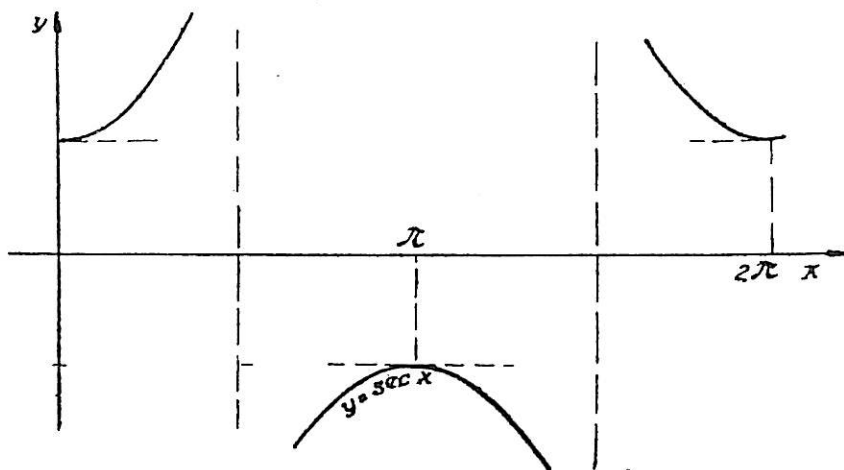
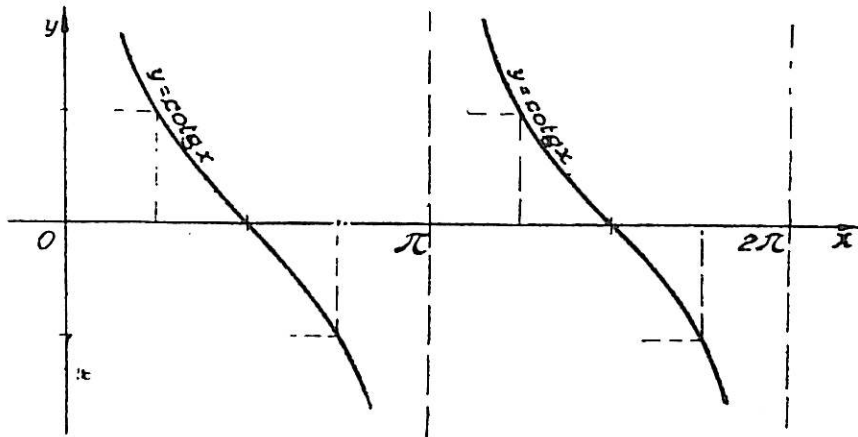
En la curva $y = \text{tg} x$, llamada *tangentoide*, construída de análoga manera, se observa la repetición de valores a partir de la abscisa π . Ello se debe a la relación demostrada en el § 3: $\text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg} \alpha$.



Para los valores de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ... no hay ordenada; la curva se aleja infinitamente del eje x , acercándose a las rectas verticales por dichos puntos, sin llegar a alcanzarlas; estas rectas se llaman *asíntotas* de la curva.

Análogamente construirá el lector las gráficas de las funciones $\text{cot} x$, $\text{sec} x$, $\text{cosec} x$, que se indican a continuación. Se ha representado solamente su variación entre 0 y 2π pues, análogamente a lo observado para las funciones anteriores, es $\text{sec}(x \pm 2\pi) = \text{sec} x$, $\text{cosec}(x \pm 2\pi) = \text{cosec} x$.

La función $\text{cot} x$, como la $\text{tg} x$, repite sus valores al aumentar el argumento en π , es decir, $\text{cot}(x \pm \pi) = \text{cot} x$.



6. **Noción de función periódica.**—Se llama *periódica* toda función que adquiere el mismo valor al aumentar la variable en una cantidad fija, llamada *período*.

$$f(x+P)=f(x) \quad (P \text{ período})$$

Las funciones $y = \text{sen } x$, $y = \text{cos } x$, $y = \text{sec } x$, $y = \text{cosec } x$, son, pues, periódicas de período 2π . Las funciones $y = \text{tg } x$, $y = \text{cot } x$ son periódicas de período -

La periodicidad se traduce gráficamente en la repetición de la forma de la curva a lo largo del eje x , de período en período, como se ha observado en las gráficas obtenidas.

En Física son muchos los fenómenos periódicos que se presentan, en los que la variable independiente es el tiempo. Por ejemplo: los movimientos vibratorios las ondas sonoras, las ondas hertzianas, las electromagnéticas en general, las corrientes alternas, ..., son fenómenos periódicos y se representan por funciones circulares o combinación de ellas.

7. Arcos y ángulos que corresponden a una misma función circular.— La periodicidad de la función $y = \text{sen } x$ y la igualdad de los senos de ángulos suplementarios, indican que hay infinidad de arcos o ángulos que tienen el mismo seno y . Hallado un ángulo x que tenga por seno y , determinaremos todos los demás, hallando el suplementario y agregando o restando a ambos un múltiplo del período 2π . Expresando por el símbolo $\text{arc sen } y$ los ángulos cuyo seno es y se tendrá

$$\text{arc sen } y = x \pm 2k\pi \quad \text{o bien} \quad \pi - x \pm 2k\pi.$$

Análogamente, por ser $\cos x = \cos(-x)$ una función periódica de período 2π , si $y = \cos x$ será

$$\text{arc cos } y = \pm x \pm 2k\pi$$

y finalmente, si $y = \text{tg } x$ será

$$\text{arc tg } y = x \pm k\pi.$$

EJERCICIOS

1. Hallar las funciones circulares del ángulo ωt donde ω es una velocidad angular = 3.5 radianes/seg y t es un tiempo = 8 sg.

2. Idem íd. para $\omega = -1,5$, $t = 4$.

3. Para $\omega = -1,5$ del ejercicio anterior entre qué límites puede variar t para que sea $\text{sen } \omega t < 0$, $\text{cos } \omega t > 0$. Repetir el ejercicio variando el dato ω y los signos $< >$.

4. Representar la función $y = k \text{ sen } \omega t$, del movimiento armónico en la que k es una constante llamada *amplitud*, ω constante, t variable tiempo. Idem íd. de $y = k \text{ sen } (\omega t + \varphi)$, φ constante llamada *fase inicial*. ¿Cuál es el período de estas funciones?

5. Representar $y = \text{sen } x + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5}$

6. Representar $y = \text{sen}^2 x$. ¿Cuál es su período?

7. Idem $y = \text{cos}^2 x$.

8. Idem $y = \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 x}$ ($k < 1$)

9. Idem $y = 1/\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 x}$.

10. Idem en coordenadas polares r, φ la curva $r = a \cos \varphi$. Idem la $r = a \text{ sen } \varphi$. Valores de φ que corresponden a una r dada; interpretación geométrica.

11. Demostrar que $\text{arc tg } x + \text{arc tg } 1/x$ no depende de x .

LECCIÓN 6.^a—LAS FÓRMULAS DE ADICIÓN DE ARGUMENTOS

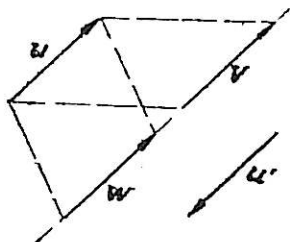
1. **Igualdad y suma de vectores.**—En el Tomo I, lección 3.^a, hemos dado la definición de vector \overline{AB} como *segmento orientado* (origen A y extremo B)

Este concepto nos fué útil, por ejemplo, para representar *traslaciones* y razonar sobre ellas. Dos vectores congruentes, de igual dirección y sentido, representaban *una misma* translación. La translación resultante de dos se caracterizaba por la diagonal del paralelogramo construido sobre dos vectores de origen común, representativos de aquellas dos.

Esta representación geométrica es común a muchas magnitudes físicas. De aquí el interés de una teoría abstracta de vectores, que no pretendemos desarrollar aquí, aunque sí utilizaremos algunos de sus conceptos más elementales.

Para poder considerar los vectores como magnitudes, es preciso definir entre ellos la igualdad y la suma. Vamos, pues, a dar estas definiciones abstractas dejando para la Física el estudio de su interpretación y validez en los diversos casos concretos.

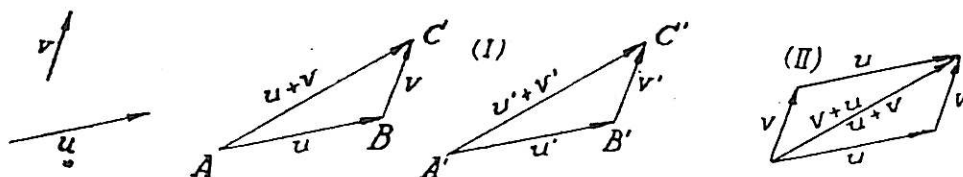
DEFINICIÓN.—Diremos que *dos vectores son iguales si tienen la misma dirección, sentido y longitud*. Pueden, pues, estar situados en una misma recta o en rectas paralelas. No interviene en esta definición el origen del vector (*).



Esta definición tiene, evidentemente, las propiedades idéntica ($u=u$), recíproca (si $u=v$, $v=u$) y transitiva (si $u=v$, $v=w$ es $u=w$) exigibles a toda definición de igualdad.

Diremos que un vector u es opuesto a otro u' y escribiremos $u=-u'$ o $u'=-u$ cuando ambos vectores tengan *la misma longitud y dirección, pero opuesto sentido*.

DEFINICIÓN.—Dados dos vectores u y v , si llevamos, a partir de un punto cualquiera, un vector \overline{AB} igual al primero y, a partir del extremo B , otro \overline{BC} igual al segundo, el vector \overline{AC} , cuyo origen es el origen del primero y cuyo extremo es el extremo del segundo, se llama *suma* de los dos.



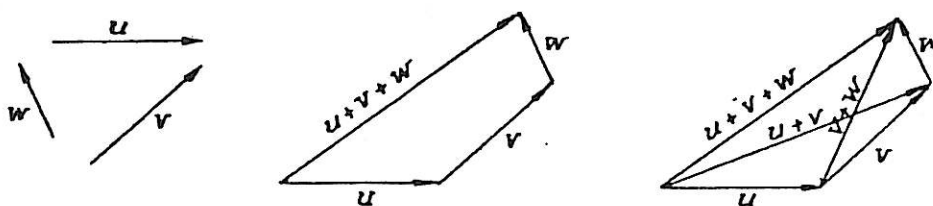
Esta operación, así definida, tiene las propiedades esenciales de la suma. Es *uniforme*, es decir, si $u=u'$ y $v=v'$ será $u+v=u'+v'$, como lo prueba la figura I, por ser iguales y paralelos los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$.

(*) Estos vectores reciben en Mecánica el nombre de *libres*, para distinguirlos de otras clases de vectores (*deslizantes, ligados*) en los cuales la relación de igualdad es más restringida. La elección de una u otra definición depende de la naturaleza de las magnitudes que representen.

Es *conmutativa*, es decir, $u+v=v+u$, como lo prueba la figura II, de la que resulta que la suma puede también definirse como *diagonal* del paralelogramo construido sobre los vectores como lados.

DEFINICIÓN.—Se llama *suma de varios vectores* a la suma de los dos primeros más el tercero, el resultado más el cuarto, y así sucesivamente hasta agotarlos. Aplicando reiteradamente la construcción anterior, resulta innecesario construir las sumas parciales sucesivas, de modo que:

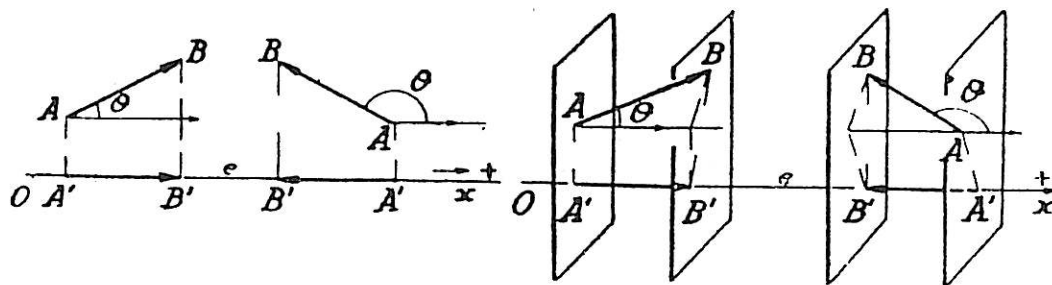
Para sumar varios vectores u, v, w se forma un *polígono de vectores* respectivamente iguales a ellos, y tales que cada uno tenga su origen en el extremo del anterior. El vector que tiene por origen el del primero y por extremo el del último, es la suma. En Física recibe el nombre de *resultante*.



Claro es que construyendo sumas parciales, es decir, *asociando* sumandos, la resultante no altera, como se ve en la figura $(u+v)+w=u+(v+w)$.

Por lo tanto, la suma de vectores tiene la *propiedad asociativa*.

2. Proyección de un vector sobre un eje.—Consideremos un eje e sobre el que elegimos un sentido positivo definido por la semirrecta OX . Dado un vector AB llamaremos *proyección ortogonal* del mismo sobre el eje al segmento orientado o vector $A'B'$, definido por las proyecciones ortogonales A', B' de A, B sobre dicho eje. Estas proyecciones se obtienen trazando las perpendiculares por A y B al eje e .



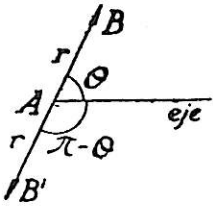
Sea θ el ángulo que forma el vector AB con la semirrecta positiva OX , o una paralela a ella por el origen del vector, y que llamaremos *ángulo del vector con el eje orientado*. Tanto si el vector es coplanario con el eje, como si no lo es, se tendrá en valor y signo

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$$

La *proyección de un vector sobre un eje orientado es igual en valor y signo al producto del módulo del vector por el coseno del ángulo que forma dicho vector con el eje orientado.*

3. Teoremas sobre proyecciones.—De lo anterior se desprende :

I. Las proyecciones de dos vectores iguales sobre un mismo eje son iguales.



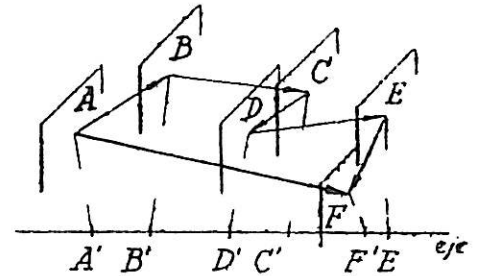
II. Las proyecciones de dos vectores opuestos sobre un mismo eje son opuestas. $r \cos \theta = -r \cos (\pi - \theta)$.

III. La proyección de la suma o resultante de varios vectores sobre un eje, es igual a la suma algebraica de las proyecciones de los vectores componentes sobre dicho eje.

Pues al sumar las proyecciones de los lados de la poligonal $ABCDEF$ (figura) sobre el eje se obtiene

$$\vec{A'B'} + \vec{B'C'} + \vec{C'D'} + \vec{D'E'} + \vec{E'F'} = \vec{A'F'}$$

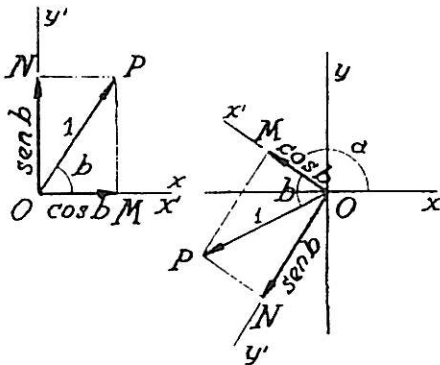
IV. La suma algebraica de las proyecciones de los lados de una poligonal cerrada orientada es nula.



4. Fórmulas de adición de argumentos.—Vamos a resolver ahora el siguiente problema fundamental de las funciones circulares :

Supuestos conocidos los senos y cosenos de dos ángulos a y b , calcular el seno y el coseno de su suma $a+b$. El teorema III del párrafo anterior nos va a proporcionar una solución elegante y general, es decir válida cualesquiera que sean los ángulos a y b .

Supongamos, en efecto, un vector OP de módulo 1 y argumento b referido a un sistema cartesiano cuyo semieje positivo Ox' coincide de momento con el origen de ángulos Ox . Este vector puede considerarse como resultante de sus proyecciones.



$\vec{OM} = \cos b$ y $\vec{ON} = \text{sen } b$ sobre los ejes.

Giremos ahora el sistema hasta que el eje Ox' forme un ángulo a con el origen de ángulos Ox y hallemos las nuevas componentes del vector OP así girado.

Este forma ahora con Ox el ángulo $a+b$; por tanto, sus nuevas proyecciones sobre los ejes son: $\cos(a+b)$ sobre el eje Ox y $\cos\left(a+b - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(a+b)$ sobre el eje OY .

Pero, por otra parte, estas proyecciones deben ser iguales a la suma algebraica de las proyecciones de OM y ON . Tendremos así

pr. sobre OX $\cos(a+b) = OM \cos a + ON \cos(90^\circ + a) = \cos b \cos a - \text{sen } b \text{ sen } a$

pr. sobre OY $\text{sen}(a+b) = OM \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + ON \cos a = \cos b \text{ sen } a + \text{sen } b \cos a$

En resumen

$$\boxed{\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b} \quad [1]$$

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b} \quad [2]$$

Las fórmulas son válidas tanto si b es positivo como negativo. Cambiando pues, b por $-b$ en las fórmulas obtenidas, obtenemos las fórmulas de sustracción de argumentos

$$\boxed{\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{sen } b} \quad [3]$$

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b} \quad [4]$$

Dividiendo las fórmulas [1] y [2] resulta

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b}{\cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b}$$

dividiendo numerador y denominador por $\cos a \cos b$

$$\boxed{\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{tg } b}} \quad [5]$$

Análogamente por división de [3] y [4], o cambiando $+b$ por $-b$

$$\boxed{\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{tg } b}} \quad [6]$$

Dividiendo las fórmulas [1], [2], [3] y [4] de los distintos modos posibles, obtenemos análogamente

$$\frac{\text{sen}(a + b)}{\text{sen}(a - b)} = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{\text{tg } a - \text{tg } b} \quad [7]$$

$$\frac{\cos(a + b)}{\cos(a - b)} = \frac{1 - \text{tg } a \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{tg } b} \quad [8]$$

$$\frac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a - b)} = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{tg } b} \quad [9]$$

$$\frac{\text{sen}(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{tg } b} \quad [10]$$

5. Funciones circulares del ángulo duplo.—Si en las fórmulas [1], [2] y [5] anteriores suponemos $b = a$ quedarán convertidas en

$$\text{sen } 2a = 2 \text{sen } a \cos a \quad [11]$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \quad [12]$$

$$\text{tg } 2a = \frac{2 \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \quad [13]$$

que permiten calcular las funciones circulares de $2a$ conocidas las de a .

La fórmula de $\cos 2a$ puede ponerse en dos formas igualmente útiles: sustituyendo $\cos^2 a$ por $1 - \sin^2 a$ se obtiene

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \quad [14]$$

y si, por el contrario, sustituimos $\sin^2 a$ por $1 - \cos^2 a$ resulta

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \quad [15]$$

Estas fórmulas presentan sobre las [11] y [12] la ventaja de no tener más que una sola de las funciones $\sin a$, $\cos a$, que se puede despejar, obteniéndose

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad [16] \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad [17]$$

y dividiendo

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \quad [18]$$

Las fórmulas [16] y [17] son de mucha aplicación, pues permiten expresar *linealmente* el cuadrado de un seno o coseno pasando al arco duplo.

6. Funciones circulares del ángulo mitad.—Si ponemos en las fórmulas anteriores $\alpha = 2a$ tendremos [11], [12], [16], [17] y [18] convertidas en

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad [11] \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad [12]$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad [16']; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad [17']; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad [18]$$

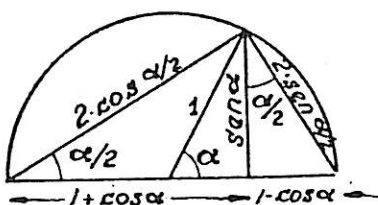
Estas últimas expresan el seno, coseno y tangente del ángulo mitad en función del coseno del ángulo.

Si no se conoce más que dicho coseno, el ángulo puede ser también de la forma $\pm \alpha \pm 2k\pi$ y, por tanto, su mitad de la forma $\pm \frac{\alpha}{2} \pm k\pi$, quedando indeterminados los signos de los radicales.

Si se conoce además el signo del $\sin \alpha$ queda precisado el cuadrante del extremo de α y $\frac{\alpha}{2}$ y al

sumar $\pm k\pi$ quedan imprecisos los signos de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$, pero ya no son independientes, puesto que queda determinado el signo de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

La figura indica una demostración geométrica directa de estas fórmulas (para $\alpha < \pi$) en la circunferencia de radio 1.



$$1 + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

De la misma figura se desprende

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad [19]$$

Demuéstrese también como consecuencia de la [18'].

7. Expresiones de $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ en función de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.—De [11'] y [12'] se desprende (*)

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad [20]$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad [21]$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad [22]$$

Las funciones circulares de un ángulo pueden, pues, expresarse racionalmente en función de la tangente del ángulo mitad. (En cambio la expresión de $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$ en función de $\operatorname{tg} \alpha$ no es racional.) Este resultado tiene gran interés en Cálculo integral.

8. Transformación de sumas de funciones circulares en productos.—Sumando y restando las igualdades [1] y [3], así como las [2] y [4], resulta

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b \\ \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{cos}(a+b) + \operatorname{cos}(a-b) &= 2 \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b \\ \operatorname{cos}(a+b) - \operatorname{cos}(a-b) &= -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned} \right\} \quad [23]$$

Si se nos da, pues, una suma o diferencia de senos o de cosenos

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B \end{aligned} \right\} \quad \text{o bien} \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B \\ \operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B \end{aligned} \right.$$

(*) A las mismas fórmulas puede llegarse haciendo en [8] y [9] $a=b=\frac{\alpha}{2}$.

no hay más que poner $\left\{ \begin{array}{l} A = a + b \\ B = a - b \end{array} \right\}$ de donde $\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}(A + B) \\ b = \frac{1}{2}(A - B) \end{array} \right\}$

y sustituir en los segundos miembros de [23] para que quede transformada la expresión en producto (lo cual tiene interés cuando conviene hacer la expresión calculable por logaritmos). Resulta así

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) \quad [24]$$

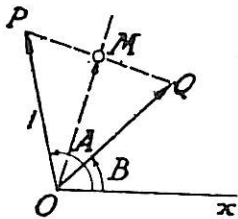
$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B) \quad [25]$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) \quad [26]$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B) \quad [27]$$

Estas fórmulas se emplearon antes de la invención de los logaritmos (siglo XVII) en sentido inverso, es decir, para transformar productos en sumas. Aún se siguen empleando con tal fin en ciertas cuestiones de cálculo integral, para transformar en sumas expresiones de la forma $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$, $\operatorname{sen} mx \cos nx$, $\cos mx \cos nx$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.—Sean \vec{OP} y \vec{OQ} dos vectores de módulo 1 y argumentos respectivos A y B . Sea M el punto medio del segmento PQ .

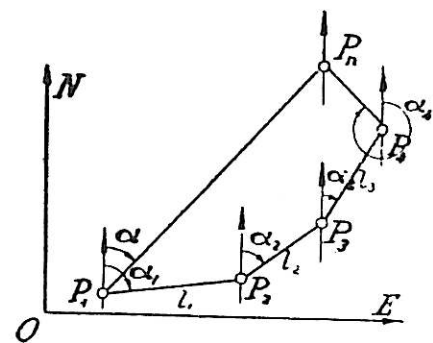


El vector \vec{OM} forma con el origen de ángulos OX el ángulo $\frac{1}{2}(A+B)$ y con cada uno de los vectores dados el ángulo $\frac{1}{2}(A-B)$ (que podemos suponer agudo eligiendo convenientemente los argumentos de A y B).

Por tanto en valor absoluto $OM = \cos \frac{1}{2}(A-B)$. Expresando que las proyecciones del vector \vec{OM} coinciden con las coordenadas del punto medio M (§ 7, lec. 36, tomo I), recaeremos en las fórmulas [24] y [26].

9. **Coordenadas topográficas, Itinerarios.**—Para fijar la posición de los puntos en los planos topográficos interesa referir éstos a ejes coordenados cartesianos o polares, generalmente de dirección NS y EO, obteniéndose las llamadas coordenadas topográficas, que han sido objeto de convenios que no interesa detallar aquí.

En extensiones de terreno no muy grandes es frecuente imaginar enlazados los distintos puntos que se desea situar, mediante líneas poligonales, llamadas *itinerarios*, en cuyos vértices $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$, se van haciendo sucesivas estaciones midiéndose en cada una de ellas el ángulo $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, que forma la brújula con la visual dirigida a la estación siguiente (*rumbo*) (y también con la anterior como comprobación). Medidas asimismo las distancias l_1, l_2, \dots , entre estaciones consecutivas, el teorema de las proyecciones proporciona las diferencias de coordenadas entre la estación inicial P_1 y la que se desea P_n . Proyectando, por ejemplo, en la dirección N, se tendrá



$$\vec{P_1 P_n} \cos \alpha = \sum_i l_i \cos \alpha_i$$

y análogamente en dirección E

$$\overline{P_1P_n} \operatorname{sen} \alpha = \sum_i l_i \operatorname{sen} a_i$$

Al cerrar el polígono, estas sumas de proyecciones deben ser nulas, proporcionando criterios de comprobación.

10. Cálculo trigonométrico de la resultante de un sistema de vectores.—Considerando en la figura anterior $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... $\overline{P_{n-1}P_n}$ como vectores cuya resultante es $\overline{P_1P_n}$ y de los que se suponen dados sus módulos l_i y sus argumentos a_i , las anteriores ecuaciones permiten calcular el módulo $\overline{P_1P_n}$ y el argumento α de esta resultante

$$|\overline{P_1P_n}| = \sqrt{(\sum l_i \cos a_i)^2 + (\sum l_i \operatorname{sen} a_i)^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum l_i \operatorname{sen} a_i}{\sum l_i \cos a_i}$$

En la figura se supone ON el origen de ángulos y positivo el sentido contrario al de las agujas del reloj. Pero las fórmulas siguen siendo válidas tomando cualquier origen y sentido.

EJERCICIOS

- 1 Expresar $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$.
- 2 Estudio de los signos en el problema anterior.
- 3 Expresar $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ en función de $\operatorname{tg} \alpha$. Estudio de los signos.

Demostrar que:

$$4. \quad \operatorname{sen} a \operatorname{sen} (b - c) + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} (c - a) + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} (a - b) = 0$$

$$5. \quad \cos a \operatorname{sen} (b - c) + \cos b \operatorname{sen} (c - a) + \cos c \operatorname{sen} (a - b) = 0$$

$$6. \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) = \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}$$

$$7. \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}$$

$$8. \quad \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) \cot \frac{1}{2}(a - b)$$

$$9. \quad \frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\cot \frac{1}{2}(a + b) \cot \frac{1}{2}(a - b)$$

$$10. \quad \frac{1 - \operatorname{sen} a}{1 + \operatorname{sen} a} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$$

$$11. \quad \operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b}$$

$$12. \quad \cot a \pm \cot b = \frac{\operatorname{sen}(b \pm a)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

$$13. \quad \cot a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\cos(a \mp b)}{\operatorname{sen} a \cos b}$$

14. Cuatro fuerzas de 28 kg, 35 kg, 16 kg y 42 kg situadas en un plano vertical actúan sobre un punto, formando ángulos con la vertical de $+15^\circ 20'$, $-40^\circ 56'$, $-115^\circ 18'$, $+153^\circ 35'$. Calcular la resultante y su dirección.

LECCIÓN 7.^a—NUEVAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

1. Relaciones entre las funciones circulares de tres ángulos que suman 180° .—Supongamos tres ángulos A, B, C , como los de un triángulo cuya suma sea $A+B+C=180^\circ$. Esta relación implica otras entre las funciones circulares de estos ángulos. Veamos algunas de ellas.

Se tendrá $A=180^\circ-(B+C)$ y, por tanto,

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B+C) = \operatorname{sen} B \cos C + \cos B \operatorname{sen} C \quad [1]$$

$$\cos A = -\cos(B+C) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C \quad [2]$$

Elevando [1] al cuadrado y expresando $\cos^2 C$ y $\cos^2 B$ en función de los senos, resulta

$$\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C + 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos B \cos C$$

y separando en los dos últimos términos el factor común $2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$,

$$\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos A \quad [3]$$

Análogamente demostrará el lector la relación

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \quad [4]$$

De la relación

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(B+C) = -\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$$

deducirá fácilmente

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \quad [5]$$

Recíprocamente, de [5] resulta $\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(B+C)$ y, por tanto, para ángulos menores que 180° , $A=180^\circ-(B+C)$.

En cambio, de [3], sustituyendo $\operatorname{sen}^2 A$ por $1-\cos^2 A$, resulta una ecuación de segundo grado en $\cos A$,

$$\cos^2 A - 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 1 = 0$$

cuyo discriminante (dividido por 4) vale

$$\operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C + 1 = (1 - \operatorname{sen}^2 B)(1 - \operatorname{sen}^2 C) = \cos^2 B \cos^2 C$$

de donde resulta las dos soluciones siguientes:

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \pm \cos B \cos C = \cos(B-C) \quad \text{o bien} \quad = -\cos(B+C)$$

Esta última solución corresponde, para ángulos $<180^\circ$, a la relación simétrica $A+B+C=180^\circ$.

La otra solución *asimétrica* $\pm A=B-C$ ha sido introducida al elevar al cuadrado [1]. La ecuación [4] da las mismas soluciones.

2. Conexión analítica entre los grupos de fórmulas usadas en la resolución de triángulos.—Las medidas de los lados y de los ángulos de un triángulo constituyen seis cantidades, tres de las cuales quedan determinadas por otras tres (un lado y otras dos). Desde un punto de vista analítico, esto significa que *tres ecuaciones independientes* entre los seis elementos bastan para determinar el triángulo. Por consiguiente, de todos los grupos de relaciones utilizadas:

$$1.^\circ \quad A + B + C = 180^\circ \quad \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad (\text{teor. senos})$$

$$2.^\circ \quad \left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} (\text{teor. cosenos})$$

$$3.^\circ \quad \left. \begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\text{sen } \frac{C}{2}} \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\text{sen } \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \end{aligned} \right\} \frac{a+b}{a-b} = \text{tg } \frac{A-B}{2} \text{tg } \frac{C}{2} \quad \begin{array}{l} (\text{teor. tangentes}) \\ (\text{Neper}) \end{array}$$

y sus análogas permutando letras.

$$1.^\circ \quad (\text{Briggs}) \quad \text{tg } \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{con} \quad 2p = a + b + c$$

y sus análogas permutando letras,

tres de estas relaciones, convenientemente elegidas, han de bastar para deducir analíticamente las demás.

I. Elijamos, por ejemplo, las tres relaciones que constituyen el grupo 1.º. Aplicando conocidos teoremas sobre series de razones iguales de ellas deducimos

$$\frac{a^2}{\text{sen}^2 A} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}{\text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C - 2 \text{sen } B \text{sen } C \cos A}$$

y como los denominadores son iguales (§ anterior, fórmula 3) también lo son los numeradores, con lo que se obtiene el grupo 2.º

Deducimos también del grupo 1.º

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } C} = \frac{2 \text{sen } \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \text{sen } \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\text{sen } \frac{C}{2}}$$

ya que por ser $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$ es $\text{sen } \frac{1}{2}(A+B) = \cos \frac{C}{2}$

Obtenemos así la primera fórmula de Mollweide, y análogamente la segunda, y por división de ambas la de Neper

$$\text{II} \quad \text{Partiendo ahora del 2.º grupo se obtiene } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$\text{Por división de ambas resulta la fórmula de Briggs } \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

y siendo así el grupo 4.º consecuencia del grupo 2.º, también lo es, por consiguiente, del 1.º

Si en lugar de dividir las fórmulas anteriores las multiplicamos, resulta

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)}{4b^2c^2}$$

y dividiendo por a^2

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}$$

Como el segundo miembro no altera al permutar las letras, podemos escribir

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2} = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A}{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} \quad [1]$$

y como hemos partido de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, resulta la igualdad de numeradores

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$$

y análogamente, permutando letras; de donde, según el párrafo anterior para ángulos $< 180^\circ$, resulta la única *solución simétrica* $A + B + C = 180^\circ$.

En resumen, como consecuencia del grupo 2.º obtenemos así las fórmulas del 1.º

$$A + B + C = 180^\circ, \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ya que al extraer la raíz cuadrada en [1], para ángulos $< 180^\circ$, los senos son positivos como los valores a, b, c .

Transformaciones y razonamientos análogos permiten deducir todos los grupos de fórmulas partiendo de los 3.º ó 4.º.

3. **Las fórmulas para la resolución de triángulos obtenidas como consecuencia del teorema de las proyecciones.**—Apliquemos el teorema IV sobre proyecciones (lección anterior, § 3) al contorno orientado de un triángulo ABC , proyectándolo sobre los ejes siguientes:

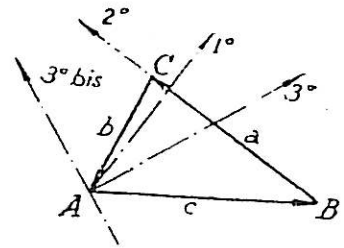
1.º Eje perpendicular al lado BC . Resulta $c \sin B - b \sin C = 0$, es decir, se obtiene así el teorema de los senos.

2.º Eje en la dirección del lado BC . Resulta

$$a - b \cos C - c \cos B = 0$$

y análogamente $b - c \cos A - a \cos C = 0$

$$c - a \cos B - b \cos A = 0$$

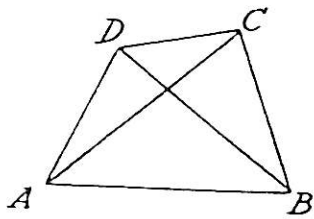


que constituye otro grupo fundamental de fórmulas. Multiplicadas respectivamente por a , b y c y restando de cada una de ellas las otras dos, resulta el grupo de los cosenos.

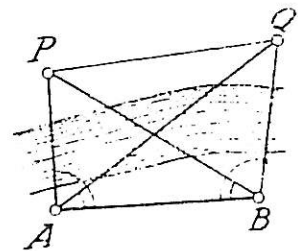
3.º Proyectando, finalmente, sobre la bisectriz del ángulo A y su perpendicular, resultan las fórmulas de Mollweide. Compruébese, como ejercicio.

Se comprende, con esto, cómo las distintas fórmulas usadas no son más que expresiones varias de un mismo hecho fundamental, a saber: Los tres vectores \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CA} tienen resultante nula. De aquí la unidad analítica que las liga.

4. **Resolución de cuadriláteros.**—Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Cada diagonal le divide en dos triángulos. Resueltos dos de los cuatro triángulos ABC , ACD , BDA , BDC , tendremos elementos suficientes para calcular todos los lados, ángulos y diagonales del cuadrilátero. Pero dos cualesquiera de estos triángulos tienen un lado común; por consiguiente bastarán tres elementos de uno y dos del otro, es decir, cinco datos (no angulares los cinco) para resolver el cuadrilátero. La enumeración de todos los casos resultaría en extremo prolija. Nos fijaremos solamente en algunos de interés práctico e histórico.



PROBLEMA DE SNELLIUS.—En el § 9 de la lección 4.ª para hallar la distancia entre los dos puntos inaccesibles P y Q hemos formado un cuadrilátero $PQBA$ con ellos y dos puntos accesibles A , B , y hemos medido la distancia \overline{AB} así como los ángulos que forman con este lado los contiguos y las diagonales. Ello permite resolver los triángulos ABP y ABQ ; y mediante los lados AP y AQ y el ángulo PAQ resolver APQ . Los datos de este problema han sido, pues: *Un lado del cuadrilátero y los dos ángulos en cada extremo.*



El lector resolverá con análoga facilidad los casos en los que es posible la resolución escalonada de dos de los triángulos parciales mencionados. Por ejemplo:

Dados los cuatro lados y una diagonal.

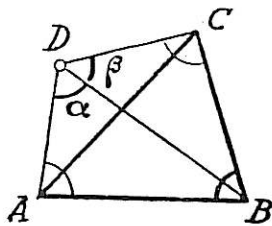
Dados tres lados y las diagonales.

Dados los cuatro lados y un ángulo.

Dados tres lados y los dos ángulos que forman, o uno de ellos y su opuesto.

Pero la resolución no es tan sencilla cuando los datos no contienen directamente tres elementos de alguno de los triángulos parciales (por ejemplo, dados tres ángulos y dos lados opuestos o dos diagonales) o bien cuando dados tres de estos elementos, los dos nuevos datos del cuadrilátero no pertenecen a un mismo triángulo parcial. Tal ocurre en el problema de la carta, que vamos a resolver.

5. Solución trigonométrica del problema de la carta.—Conocidas las



posiciones de tres puntos A, B, C visibles desde un punto D , donde suponemos situado un observador, se trata de calcular las distancias DA, DB, DC , que le separan de dichos puntos midiendo simplemente los ángulos visuales $ADB = \alpha$ y $BDC = \beta$. Este problema, llamado de Potot o de la carta, fué resuelto gráficamente en el Tomo I (lección 15) mediante intersección de arcos capaces. Para dar una solución trigonométrica al problema, obsérvese que bastará conocer los ángulos A y C del cuadrilátero

$ABCD$. En este cuadrilátero se conocen dos ángulos opuestos B y $D = \alpha + \beta$; por tanto la suma $A + C = 360^\circ - (B + D)$ es conocida.

Por otra parte, del teorema de los senos aplicado a los triángulos BDA y BDC resulta

$$\operatorname{sen} A = \frac{\overline{DB} \operatorname{sen} \alpha}{\overline{AB}} \quad \operatorname{sen} C = \frac{\overline{DB} \operatorname{sen} \beta}{\overline{BC}}$$

de donde, dividiendo y calculando $m = \overline{BC} \operatorname{sen} \alpha$, $n = \overline{AB} \operatorname{sen} \beta$ (en función de datos conocidos) se tendrá

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{m}{n}$$

En resumen, el problema ha quedado reducido al siguiente: *Calcular dos ángulos A y C conocida su suma y la razón de sus senos.*

Se tendrá

$$\frac{m+n}{m-n} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} C} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \cos \frac{A+C}{2} \operatorname{sen} \frac{A-C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-C}{2}}$$

con lo que podemos calcular logarítmicamente $\operatorname{tg} \frac{A-C}{2}$ y, por tanto, $A-C$.

Y al combinar este valor con la suma $A+C$, calcularemos A y C . El cálculo de las distancias pedidas se reduce ahora a aplicar el teorema de los senos a los triángulos ABD y BDC .

OBSERVACIONES.—Si el punto D estuviera en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , los ángulos A y C serían suplementarios; por tanto $\text{sen } A = \text{sen } C$. Se reconoce esta circunstancia por resultar $m = n$. El método no es aplicable. El punto D queda *indeterminado*. (Geoméricamente se confunden los arcos capaces que determinan D .) Se trata de un cuadrilátero inscriptible, el cual no viene definido por tales datos. Tiene interés estudiar esta clase de cuadriláteros, de los que ya conocemos una relación entre sus lados y diagonales. (Teorema de Ptolomeo, Tomo I, lec. 23.)

6. **Cuadrilátero inscriptible.**—Igualando la expresión de la diagonal BD en los triángulos ABD y CBD resulta, (figura)

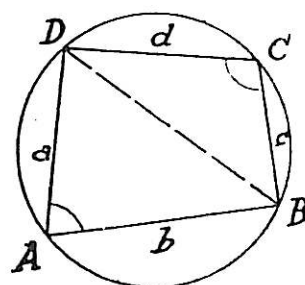
$$a^2 + b^2 - 2ab \cos A = c^2 + d^2 - 2cd \cos C$$

y por ser $\cos C = \cos (180^\circ - A) = -\cos A$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos A \quad [1]$$

De esta igualdad podemos despejar

$$\cos A = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$



que nos servirá para calcular $\cos A$; y análogamente para los demás ángulos B y D .

Podemos transformar esta fórmula haciéndola calculable por logaritmos, análogamente a como hemos obtenido las fórmulas de Briggs en el § 2.

$$2 \text{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2(ab + cd)} =$$

$$= \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2(ab + cd)} = \frac{(c + d + a - b)(c + d - a + b)}{2(ab + cd)}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} =$$

$$= \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2(ab + cd)} = \frac{(a + b + c - d)(a + b - c + d)}{2(ab + cd)}$$

y poniendo $a + b + c + d = 2p$ será $a + b + c - d = 2(p - d)$, etc., con lo que resulta

$$\text{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - a)}{ab + cd}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - c)(p - d)}{ab + cd}}$$

y dividiendo

$$\text{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - a)}{(p - c)(p - d)}}$$

Esta fórmula y las análogas obtenidas permutando letras, nos servirán para calcular los ángulos, dados los lados del cuadrilátero inscriptible.

El área S puede obtenerse sumando la de los dos triángulos ABD y BDC , con lo que resulta

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd) \operatorname{sen} A = (ab + cd) \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

y sustituyendo los valores arriba calculados

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Asimismo se obtiene con facilidad el radio r de la circunferencia circunscrita, pues en el triángulo ABD , $2r = BD : \operatorname{sen} A$ y sustituyendo $\operatorname{sen} A$ por $2S : (ab + cd)$ y la diagonal BD por su expresión en función de los lados (Tomo I, lección 23, § 15)

$$BD = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$$

resulta

$$r = \frac{\sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}}{4S}$$

7. **Área de un cuadrilátero no inscriptible.**—Igualando la diagonal BD en los dos triángulos ABD y BDC resulta ahora

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos A - 2cd \cos C \quad [1]$$

Sumando las áreas de estos triángulos obtendremos la del cuadrilátero S , de modo que

$$4S = 2ab \operatorname{sen} A + 2cd \operatorname{sen} C \quad [2]$$

Sumando los cuadrados de [1] y [2]

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(A+C)$$

Sustituyendo $-\cos(A+C)$ por $1 - 2 \cos^2 \frac{1}{2}(A+C)$ (lec. ant. form. 14)

$$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{1}{2}(A+C)$$

Con las mismas notaciones del § anterior la diferencia de los dos primeros términos es el producto de las expresiones

$$2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 4(p-d)(p-c)$$

$$2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 4(p-b)(p-a)$$

y por tanto

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{1}{2}(A+C)$$

Si suponemos el cuadrilátero *articulado*, es decir, con lados de longitud fija y variables los ángulos, el área variará con $\cos \frac{1}{2}(A+C)$, siendo máxima cuando este coseno sea nulo, o sea cuando $A+C=180^\circ$, es decir, cuando el cuadrilátero sea inscriptible.

Obtenemos así el siguiente interesante teorema:

De todos los cuadriláteros con los mismos lados, el de área máxima es el inscriptible.

EJERCICIOS

1. Demostrar que en todo triángulo ABC se verifica; $b \cos B + c \cos C = a \cos(B-C)$

2. Idem id. $1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{2c}{a+b+c}$

3. Demostrar analíticamente que el sistema de tres relaciones, entre los elementos de un triángulo ABC , $a = b \cos C + c \cos B$; $b = c \cos A + a \cos C$; $c = b \cos A + a \cos B$

(obtenidas proyectando cada dos lados sobre el tercero) no determina los lados a, b, c dados los ángulos A, B, C (v. fórmula 4 del § 1).

4. Demostrar que si $A+B+C=\pi$ es: $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
5. Idem íd. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$
6. Idem íd. $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$
7. Idem íd. $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$
8. Idem íd. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$
9. Idem íd. $\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1$
10. Idem íd. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$
11. Idem íd. $\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$

12. ¿Cómo calcular logarítmicamente la suma de los senos de los ángulos de un triángulo? Idem de las tangentes.

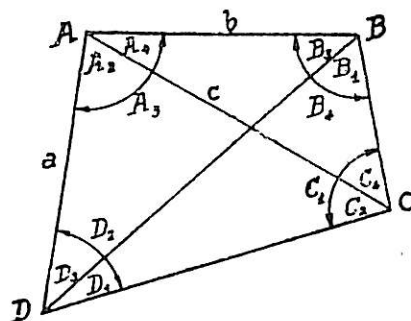
13. Hacer calculable por logaritmos la suma de los cosenos de los ángulos de un cuadrilátero. Idem de los senos.

14. *Relaciones lineales entre los ángulos de un cuadrilátero convexo.*

Designando con los subíndices 1, 2, 3, 4 los ángulos de los triángulos parciales del cuadrilátero convexo $ABCD$, que no contienen, respectivamente, los vértices A, B, C, D . según indica la figura se tiene:

$$A_3 = A_2 + A_4; \quad B_4 = B_3 + B_1; \quad C_1 = C_4 + C_2; \quad D_2 = D_1 + D_3$$

$$\pi = B_1 + C_1 + D_1 = C_2 + D_2 + A_2 = D_3 + A_3 + B_3 = A_4 + B_4 + C_4$$



demostrar analíticamente que una cualquiera de estas ocho relaciones es consecuencia de las otras siete.

15. *Relaciones trigonométricas entre los ángulos de un cuadrilátero convexo.*

Sustituyendo en la identidad $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$ las razones de los pares de segmentos (figura) por las de los senos de los ángulos opuestos en los triángulos parciales correspondientes. demostrar:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} D_3 \operatorname{sen} C_2 \operatorname{sen} B_4 &= \operatorname{sen} B_3 \operatorname{sen} D_2 \operatorname{sen} C_4 & [1] \\ \operatorname{sen} A_4 \operatorname{sen} D_3 \operatorname{sen} C_1 &= \operatorname{sen} C_4 \operatorname{sen} A_3 \operatorname{sen} D_1 & [2] \\ \operatorname{sen} B_1 \operatorname{sen} A_4 \operatorname{sen} D_2 &= \operatorname{sen} D_1 \operatorname{sen} B_4 \operatorname{sen} A_2 & [3] \\ \operatorname{sen} C_2 \operatorname{sen} B_1 \operatorname{sen} A_3 &= \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} C_1 \operatorname{sen} B_3 & [4] \end{aligned}$$

[2], [3] y [4] se obtiene fácilmente de [1] por permutación circular de letras e índices.

Combinando una de estas fórmulas con siete de las lineales del ejemplo anterior se pueden hallar ocho de los ángulos, conocidos los otros cuatro.

16. *Problema de Poterot.*—Conocidos A_4, C_4 (del triángulo ABC) así como D_1 y D_3 (observación desde D) hallar los otros ángulos; en particular C_1 y A_3 . La fórmula [2] da la razón $\operatorname{sen} C_1 : \operatorname{sen} A_3$ obteniéndose la solución expuesta en § 5.

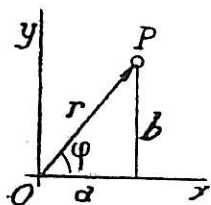
17. *Problema de Snellius-Hansen.*—Conocidos A_2, A_4, B_1, B_3 (por observación desde A, B) hallar los demás ángulos. ($A_3 = A_2 + A_4$; $B_4 = B_1 + B_3$; se obtienen fácilmente D_3 y C_4). De la fórmula [3] se obtiene la razón entre los senos de D_1 y D_2 , ángulos cuya diferencia es D_3 (conocida). Complétese el cálculo como en § 5. Análogamente calcularemos los ángulos en C .

18. Calcular los ángulos, conocidos A_2, B_3, D_1, D_3 .

19. Los datos B_1, C_2, A_4, D_3 o bien C_1, D_2, A_4, B_3 conducen a ecuaciones de cuarto grado.

LECCIÓN 8.^a—LAS FUNCIONES CIRCULARES Y LOS NÚMEROS COMPLEJOS.
FÓRMULA DE MOIVRE

1. **Expresión trigonométrica de un número complejo.**—Recordemos que un número complejo se define en Análisis por un par de números reales (a, b) dados en un orden, y se interpreta geoméricamente mediante un punto P , llamado *afijo*, que tiene por abscisa y ordenada, respectivamente, los números a, b en un sistema cartesiano rectangular, o también por el vector \vec{OP} , cuyo origen O es el de coordenadas y cuyo extremo es el punto P . Se conviene en que los números de segunda componente b nula coincidan con los números reales: $(a, 0) = a$.



Se llaman imaginarios *puros* a los que tienen nula la abscisa o primera componente a . En particular se designa por i el número o vector $(0, 1)$.

Definido el producto de un número complejo (a, b) por otro real k mediante $k \cdot (a, b) = (ka, kb)$, y la suma por el convenio

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

que concuerda con la definición de suma de vectores (lec. 6.^a, §§ 1, 3), se podrá escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

forma llamada *binómica* del complejo. Expresando en ella a y b mediante las *coordenadas polares* r y φ , resulta (lec. 5.^a, § 2)

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

que se llama *forma factorial* o *trigonométrica* del complejo, en función del módulo r y del argumento φ del vector representativo.

2. **Expresión trigonométrica del producto o cociente de complejos.**—Suele definirse (*) el producto de dos complejos

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \quad c + di = r'(\cos \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi')$$

aplicando por convenio la propiedad distributiva

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + i(ad + bc)$$

y sustituyendo i^2 por -1 , con lo que, pasando a polares y recordando las fórmulas de adición de argumentos, resulta

$$(a + bi)(c + di) = rr'[(\cos \varphi \cos \varphi' - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi') + i(\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi')] \quad [1]$$

$$= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i \operatorname{sen}(\varphi + \varphi')] \quad [2]$$

(*) V. *Análisis algebraico*, de Rey Paston.

De aquí resulta: *El producto de dos complejos es otro que tiene por módulo el producto rr' de los módulos y por argumento la suma $\varphi + \varphi'$ de los argumentos.* Aplicando reiteradamente este enunciado al producto de dos factores por un tercero, del resultado por un cuarto, etc., resulta el teorema válido para cualquier número de factores.

También puede adoptarse este resultado como definición del producto, con lo que se demuestra muy sencillamente la validez de las leyes asociativa, conmutativa y distributiva, y entonces la identificación de las dos formas [1] y [2] del producto conduce a una nueva demostración de los teoremas de adición (*).

El cociente de los dos complejos anteriores es aquel que tiene por módulo el cociente de módulos y por argumento la diferencia de argumentos.

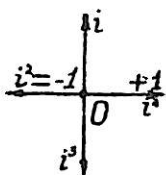
$$(a + bi) : (c + di) = \frac{r}{r'} [\cos(\varphi - \varphi') + i \operatorname{sen}(\varphi - \varphi')]$$

En efecto, multiplicando el módulo de este cociente por r' y sumando a su argumento φ' se obtiene r y φ .

NOTA.—La posible diversidad de argumentos correspondientes a un mismo vector (lec. 5.ª, § 2) no altera los resultados, puesto que la suma y diferencia de múltiplos de 2π es a su vez múltiplo de 2π .

3. Multiplicación y división por i .—Aplicando lo anterior a la multiplicación por i , resulta:

Multiplicar (dividir) por i un complejo es agregar (restar) 90° al argumento sin alterar su módulo. El vector $\vec{u} \cdot i$ es, pues, el vector u girado de 90° en sentido positivo. Multiplicando i por sí mismo reiteradamente se obtiene, pues, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, etcétera.



En general *multiplicar un vector por otro de módulo 1 y argumento φ es simplemente, girarle del ángulo φ .* Por ello los vectores de módulo unidad se denominan *versores*.

4. Expresión trigonométrica de la potencia. Fórmula de Moivre.—Aplicando el teorema del producto a varios factores iguales se obtiene la llamada *fórmula de Moivre* para la potencia entera y positiva de un complejo

$$[r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

La n° potencia de un complejo tiene por módulo la n° potencia del módulo de dicho complejo y por argumento el producto de su argumento por n .

Tampoco aquí se altera el resultado añadiendo al argumento φ del dato un múltiplo de 2π .

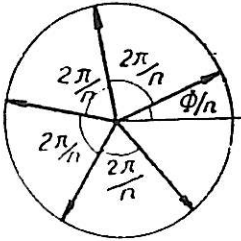
5. Expresión trigonométrica de las raíces.—Si queremos hallar el módulo r y argumento φ de un vector cuya potencia n° coincida con un vector dado de módulo R y argumento Φ , expresaremos que el módulo r^n de dicha

(*) Así hemos procedido en nuestro 5.º curso de Bachillerato (plan 1938) en colaboración con Rey Pastor.

potencia coincide con R y que el argumento $n\varphi$ coincide con Φ , o difiere de Φ en $2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Así resulta:

$$r^n = R \quad \text{de donde} \quad r = \sqrt[n]{R}$$

$$n\varphi = \Phi + 2k\pi \quad \text{de donde} \quad \varphi = \frac{\Phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$



y al dar a k valores enteros positivos, obtenemos los n argumentos distintos siguientes:

$$\varphi_1 = \frac{\Phi}{n}; \quad \varphi_2 = \frac{\Phi}{n} + \frac{2\pi}{n}; \quad \varphi_3 = \frac{\Phi}{n} + 2 \frac{2\pi}{n} \dots$$

$$\dots \varphi_n = \frac{\Phi}{n} + (n-1) \frac{2\pi}{n}$$

Para valores de $k = n, n+1, \dots, 2n-1$, obtenemos los anteriores argumentos aumentados en 2π y, por consiguiente, resultan los mismos vectores, y lo propio ocurre para valores de k mayores o negativos.

Obtenemos así n raíces *enésimas distintas del vector* R_Φ , cuya expresión será

$$\rho_1 = \sqrt[n]{R} (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1), \quad \rho_2 = \sqrt[n]{R} (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \dots$$

$$\dots \rho_n = \sqrt[n]{R} (\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n)$$

Como se ve, en el problema de la radicación la consideración de la multiplicidad de argumentos atribuibles al dato, ha tenido ya su repercusión en el resultado. De haber considerado en éste sólo un argumento Φ hubiésemos obtenido sólo la raíz ρ_1 .

6. Cálculo trigonométrico de potencias y raíces.—La expresión trigonométrica de los complejos y de los resultados de las operaciones con los mismos indican un camino para calcular estos resultados, con auxilio de tablas trigonométricas, particularmente útil en el cálculo de potencias y raíces.

EJEMPLO.—Vamos a calcular trigonométricamente las raíces cúbicas del vector i .

Módulo de las raíces $\sqrt[3]{1} = 1$.

Argumentos:

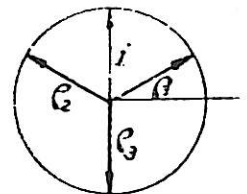
$$\varphi_1 = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ, \quad \varphi_2 = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ, \quad \varphi_3 = 30^\circ + 240^\circ = 270^\circ$$

Raíces:

$$\rho_1 = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = 0,866 + 0,5i$$

$$\rho_2 = \cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ = -0,866 + 0,5i$$

$$\rho_3 = \cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ = -i$$



7. Expresión de las funciones circulares de los múltiplos de un ángulo. Propongámonos calcular $\operatorname{sen} n\alpha$, $\cos n\alpha$ y $\operatorname{tg} n\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$.

Aplicando la fórmula de Moivre a la potencia n^{a} de un vector de módulo 1 y argumento α se obtiene

$$[\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha]^n = \cos n \alpha + i \operatorname{sen} n \alpha \quad [1]$$

Pero desarrollando la potencia del binomio, y sustituyendo las potencias sucesivas de i por sus valores (§ 3), resulta

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = & \cos^n \alpha + i n \cos^{n-1} \alpha \operatorname{sen} \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - i \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \\ & + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha + i \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \operatorname{sen}^5 \alpha \dots \end{aligned}$$

con lo que, identificando [1] la parte real de esta potencia con $\cos n \alpha$ y coeficiente de la imaginaria con $\operatorname{sen} n \alpha$, se obtiene

$$\cos n \alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha - \dots \quad [2]$$

$$\operatorname{sen} n \alpha = n \cos^{n-1} \alpha \operatorname{sen} \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \operatorname{sen}^5 \alpha - \dots \quad [3]$$

y por división (dividiendo numerador y denominador por $\cos^n \alpha$)

$$\operatorname{tg} n \alpha = \frac{n \operatorname{tg} \alpha - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 \alpha - \dots}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha - \dots} \quad [4]$$

Casos particulares: Para $n=2$ recaemos en las fórmulas del § 5, lección 6.ª Para $n=3$ resulta

$$\cos 3 \alpha = \cos^3 \alpha - \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen} 3 \alpha = 3 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3 \alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

8. Complejos conjugados.—Se dice que dos complejos son conjugados cuando tienen la misma componente real, y componentes imaginarias opuestas. Son conjugados, pues, $a + bi$ y $a - bi$. La simetría de los vectores que representan indica que:

Sus módulos son iguales mientras sus argumentos son opuestos.

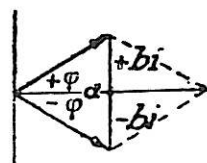
Sumándolos se obtiene $a + bi + a - bi = 2a$.

Multiplicándolos resulta $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

La suma de dos complejos conjugados es el doble de su parte real común y su producto es el cuadrado del módulo común.

Ambos resultados son reales. La diferencia, en cambio, es imaginaria pura y vale $a + bi - a - bi = 2bi$.

Representando por u un complejo (módulo r , argumento φ), es notación bastante usada representar por \bar{u} el conjugado (módulo r , argumento $-\varphi$).



Observemos que:

1. Los resultados de elevar a una misma potencia entera dos complejos conjugados, son conjugados. Si $\bar{u}' = u$, $\bar{u}'^n = u^n$.

En efecto, ambos tienen el mismo módulo r^n y argumentos opuestos $+n\varphi$, $-n\varphi$ (Moivre).

11. El producto de dos complejos $u \cdot v$ y el producto de sus conjugados $\bar{u} \cdot \bar{v}$ son conjugados entre sí.

Por tanto, $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$. La razón es idéntica a la anterior.

9. Desarrollo de $\cos^n \alpha$, $\sin^n \alpha$ en función de los senos y cosenos de múltiplos de α .—Problema es éste recíproco del tratado en el § 5. Para resolverlo pongamos $u = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\bar{u} = \cos \alpha - i \sin \alpha$, de donde $2 \cos \alpha = u + \bar{u}$, $2i \sin \alpha = u - \bar{u}$.

Elevando a n resulta (por la validez de la propiedad distributiva en el campo complejo)

$$2^n \cos^n \alpha = u^n + nu^{n-1} \bar{u} + \binom{n}{2} u^{n-2} \bar{u}^2 + \dots + \binom{n}{n-2} u^2 \bar{u}^{n-2} + nu \bar{u}^{n-1} + \bar{u}^n \quad [1]$$

$$2^n i^n \sin^n \alpha = u^n - nu^{n-1} \bar{u} + \binom{n}{2} u^{n-2} \bar{u}^2 + \dots \pm \binom{n}{n-2} u^2 \bar{u}^{n-2} \pm nu \bar{u}^{n-1} \pm \bar{u}^n \quad [2]$$

Sustituyendo toda potencia u^k por $\cos k\alpha + i \sin k\alpha$, así como \bar{u}^k por $\cos k\alpha - i \sin k\alpha$ se obtendrán los desarrollos pedidos.

Se observa que los términos extremos y los equidistantes de ellos en el desarrollo del $\cos^n \alpha$, son conjugados entre sí (y real el término central, si existe). Al agruparlos, el desarrollo de $\cos^n \alpha$ será, pues, *real* y sólo contendrá los senos y cosenos de los múltiplos de α .

Análogamente, si n es par, el segundo miembro de [2] es real como el primero; e imaginario puro, como éste, si n es impar. Dividiendo en este caso por i , se tendrá análogamente el desarrollo de $\sin^n \alpha$.

EJEMPLO.—Para $n=3$ se obtiene

$$\begin{aligned} 8 \cos^3 \alpha &= 2 (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha) \\ -8i \sin^3 \alpha &= 2i (\sin 3\alpha - 3 \sin \alpha) \end{aligned}$$

de donde $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha)$; $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$

10. Desarrollos en serie de $\sin x$ y $\cos x$.—En los cursos de Análisis infinitesimal se demuestra que $\sin x$ y $\cos x$ pueden expresarse mediante los siguientes desarrollos en serie de potencias de x (en radianes)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

que son válidos cualquiera que sea el valor de x . La convergencia es tanto más rápida cuanto más pequeño es x . Para valores muy pequeños se obtiene una *primera aproximación* tomando el primer término $\sin x \simeq x$, $\cos x \simeq 1$, como se indicó en la lección 1.^a. Se mejora la aproximación tomando dos términos, es decir,

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{6} = x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right), \quad \cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2} \quad [1]$$

Como se trata de series alternadas de términos decrecientes (para valores de $x < 1$) el error es menor que el primer término despreciado. Por tanto, al tomar como valores de $\sin x$ y $\cos x$ las aproximaciones [1], el error cometido es respectivamente de 5.º y de 4.º orden en x .

NOTA.—No debe causar extrañeza que releguemos la demostración de estos desarrollos al Análisis en lugar de reproducir la pretendida demostración de algunos libros fundada en los desarrollos obtenidos en § 7 para $\sin n\alpha$ y $\cos n\alpha$. Para ello ponen $n\alpha = x$ y dividiendo por $\cos^n \alpha = \cos^n \frac{x}{n}$ resulta

$$\frac{\cos x}{\cos^n \frac{x}{n}} = 1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{n} + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{n} - \dots$$

$$\frac{\sin x}{\cos^n \frac{x}{n}} = n \operatorname{tg} \frac{x}{n} - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{n} + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 \frac{x}{n} - \dots$$

Haciendo ahora en el término general $\pm \binom{n}{k} \operatorname{tg}^k x$ de ambas series la transformación

$$\pm \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \operatorname{tg}^k \frac{x}{n} = \pm \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} x^k \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^k$$

se ve que al tender $n \rightarrow \infty$ dicho término tiende a $\pm \frac{x^k}{k!}$, mientras los primeros miembros tienden a $\cos x$ y $\sin x$, respectivamente.

Ahora bien, la propiedad en que se fundan al igualar los resultados (límite de una suma = suma de límites) se demuestra en los libros de Análisis para un número finito de sumandos. Su aplicación a sumas de infinitos sumandos (series) requiere un estudio especial de las series de que se trata. Por otra parte, al crecer n no sólo crece el número de sumandos de las sumas estudiadas, sino que todos los sumandos varían con n , de modo que en rigor la proposición que aquí se aplica es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n} u_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_k(n)$$

cuya validez exige un estudio bastante detenido de la sucesión de funciones u_k .

11. Valores aproximados de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg}(A+x)$ para valores pequeños de x .—Dividiendo las fórmulas [1] anteriores y despreciando términos en x^4, x^5, \dots , queda

$$\operatorname{tg} x \cong \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2}} \cong x + \frac{x^3}{3} = x \left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \quad [\text{error de 4.º orden}]$$

Si en $\operatorname{tg}(A+x) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} x}$ suponemos x muy pequeño, $\operatorname{tg} A$ no muy grande y despreciables los términos en x^2, x^3, \dots , quedará

$$\operatorname{tg}(A+x) = (\operatorname{tg} A + x)(1 + x \operatorname{tg} A) = \operatorname{tg} A + x(1 + \operatorname{tg}^2 A) = \operatorname{tg} A + \frac{x}{\cos^2 A} \quad (*)$$

o sea, finalmente, $\operatorname{tg}(A+x) = \operatorname{tg} A \left[1 + \frac{2x}{\operatorname{sen} 2A}\right]$ [error de 2.º orden]

Hemos de hacer uso de esta relación más adelante

(*) Se puede llegar a la misma relación más rápidamente aplicando la fórmula de Taylor a la función tg .

EJERCICIOS

1. Expresar en forma binómica el vector o complejo u de módulo 5 y argumento -30° .
2. Expresar en forma factorial los complejos $v = -1 + 2,5i$, $w = -2 - 2i$.
3. Calcular y construir $u+v$, $u-v$, $u+v+w$. Módulo y argumento de los resultados.
4. Calcular y construir $v \cdot w$, $v : w$, $w : v$, $1 : u$, $i : v$.
5. Calcular y construir u^2 y v^2 .
6. Raíces cúbicas del vector u . Raíces quintas del vector w .
7. Representar los términos de la progresión aritmética de primer término w y de razón $2-i$. Idem íd. geométrica.
8. *Fórmulas de adición de varios argumentos.*—Dados m ángulos a, b, c, \dots, l , formemos el producto de versores $(\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) \dots (\cos l + i \operatorname{sen} l)$, ordenándolo según las potencias de i . Se obtiene

$$C_m + i[CS]_{m-1,1} - [CS]_{m-2,2} - i[CS]_{m-3,3} + [CS]_{m-4,4} - \dots + i^m S_m$$

donde representamos con C_m el producto de todos los cosenos, con S_m el de todos los senos y con $[CS]_{m-k,k}$ la suma de todos los productos posibles tomando $m-k$ cosenos y k senos. Pero este producto tiene por módulo 1 (módulo de los factores) y por argumento $a+b+c+\dots+l$; por consiguiente, puede también expresarse por $\cos(a+b+c+\dots+l) + i \operatorname{sen}(a+b+c+\dots+l)$. Identificando ambas expresiones resulta

$$\cos(a+b+c+\dots+l) = C_m - [CS]_{m-2,2} + [CS]_{m-4,4} - \dots$$

$$\operatorname{sen}(a+b+c+\dots+l) = [CS]_{m-1,1} - [CS]_{m-3,3} + [CS]_{m-5,5} - \dots$$

y por división de ambas (dividiendo numerador y denominador por C_m)

$$\operatorname{tg}(a+b+c+\dots+l) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - \dots}{1 - T_2 + T_4 - \dots}$$

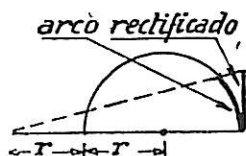
representando con T_k la suma de todos los productos posibles de las tangentes de a, b, \dots, l tomadas de k en k .

9. Aplíquense las fórmulas anteriores para obtener el seno, coseno y tangente de $a+b+c$.
10. A qué distancia hemos de colocar de nuestra vista una moneda de 10 cts para verla con el mismo diámetro aparente que la Luna (aproximadamente $31'$). Calcúlese sin tablas. Para valores pequeños del ángulo x (radianes), demostrar la validez de las siguientes fórmulas aproximadas, indicando el orden del error.

$$11. x \cong \frac{3 \operatorname{sen} x}{2 + \cos x} \quad (\text{Cusa, siglo XV}). \quad 12. x \cong \frac{2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{3} \quad (\text{Snellius, siglo XVII}).$$

$$13. x \cong \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{6} \quad 14. x \cong \frac{4}{3} \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{b} \quad (\text{Huygens, siglo XVII}).$$

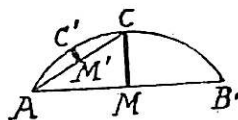
15. Para rectificar aproximadamente arcos pequeños (menores que 30°) se puede proceder como indica la figura.



Demuéstrese (v. ejercicio 11).

16. Dedúzcase del ejercicio anterior un procedimiento para transportar arcos de una circunferencia a otra de distinto radio. Aplicaciones a engranajes.

17. Si AB es la cuerda de un arco de pequeña graduación AB , C punto medio del arco, M punto medio de la cuerda, C' punto medio del arco AC , M' punto medio de la cuerda AC ; demostrar que es aproximadamente $\overline{M'C'} = \overline{MC} : 4$. De otro modo: La flecha CM de un arco pequeño es cuádruplo de la flecha $C'M'$ del arco mitad. Esta propiedad se aplica en el replanteo de curvas de ferrocarril.



LECCIÓN 9.^a—LAS FUNCIONES CIRCULARES Y LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

1. Ecuaciones trigonométricas.—Llámanse *ecuación trigonométrica* a toda ecuación cuya incógnita aparece como argumento de una función circular. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{cos} x &= 1, & \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{cos} 2x &= \operatorname{tg} x \\ x + \operatorname{sen} x &= 3, & \operatorname{tg} x &= 1 : x \end{aligned}$$

Hemos de hacer una distinción fundamental. En las dos primeras ecuaciones, por ejemplo, es posible tomar como incógnita auxiliar una cierta función circular de x y reducirlas así a ecuaciones algebraicas, como veremos en seguida. Esta clase de ecuaciones son *trascendentes*, es decir, no son algebraicas; *tienen infinitas soluciones*, pero su determinación puede efectuarse con el uso de tablas trigonométricas y los recursos del Algebra. Las llamaremos ecuaciones trigonométricas *reducibles* y serán las únicas objeto de estudio aquí. En las segundas, tal cambio de variable no es posible y su resolución, con error prefijado, exige recursos de Análisis más elevados.

2. Resolución algebraica de ecuaciones trigonométricas reducibles.—En lecciones anteriores hemos aprendido a expresar algebraicamente cualquier función circular de x en función de $\operatorname{sen} x$ o $\operatorname{cos} x$. Hemos aprendido asimismo a expresar las funciones circulares de nx como funciones enteras de las de x . Podemos, pues, afirmar que cualquier ecuación algebraica que ligue funciones circulares de un mismo ángulo x o de ángulos múltiplos de él, puede reducirse a una ecuación algebraica ordinaria tomando como incógnita $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$ o $\operatorname{tg} x$.

Pero poco adelantamos con tal cambio si la ecuación algebraica obtenida una vez racionalizada y puesta en forma entera resulta de grado superior al cuarto, exigiendo asimismo el uso de recursos de Análisis superior. Interesa, pues, efectuar los cambios que conduzcan a ecuaciones del menor grado posible. Ciñéndonos a ecuaciones *racionales* en $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, he aquí los cambios más aconsejables.

ECUACIONES DE GRADO PAR EN $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$.—Suponiendo la ecuación expresada en $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$ y reducida a forma entera, si los términos que contiene son todos de grado par en $\operatorname{sen} x$ y en $\operatorname{cos} x$ *separadamente*, el cambio natural es adoptar $\operatorname{sen}^2 x$ o $\operatorname{cos}^2 x$ como nueva incógnita z .

Ejemplo: $a \operatorname{cos}^2 x + b \operatorname{sen}^4 x = c \operatorname{sen}^2 x$

se transforma, con $\operatorname{sen}^2 x = z$ en la ecuación algebraica

$$a(1-z) + bz^2 = cz, \quad bz^2 - (a+c)z + a = 0$$

que tiene dos raíces z_1, z_2 . Finalmente, $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{z_1}$, o bien $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{z_2}$, con todas las determinaciones inherentes al arc seno y al doble signo de las raíces. Los valores son reales si $|z_1| \leq 1$ $|z_2| \leq 1$.

Si la ecuación tiene sus términos de grado par en las funciones $\sin x$ y $\cos x$ consideradas *conjuntamente*, se tomará como nueva incógnita $z = \operatorname{tg} x$, con lo que $\sin x = z : \sqrt{1+z^2}$, $\cos x = 1 : \sqrt{1+z^2}$; y por ser de grado par todos los términos desaparece el radical.

Ejemplo. $4 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 1 = 0$ se transforma, con $\operatorname{tg} x = z$ en

$$\frac{4}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^2} - 1 = 0, \quad \text{o sea} \quad (z+1)^2 = 4$$

que se satisface para $z_1 = 1$, $z_2 = -3$, lo que da

$$x_1 = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi \pm k\pi \quad (\text{en radianes})$$

$$x^2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-3) \pm k\pi \quad \gg \quad \gg$$

En general la ecuación

$$a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x = d$$

se transforma mediante $\operatorname{tg} x = z$ en la de 2.^o grado en z

$$a + 2bz + cz^2 = d(1+z^2).$$

o sea

$$(c-d)z^2 + 2bcz + a-d = 0.$$

ECUACIONES DE GRADO IMPAR.—Si la ecuación es de grado impar en $\sin x$, $\cos x$, siempre podrá racionalizarse tomando la nueva variable $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

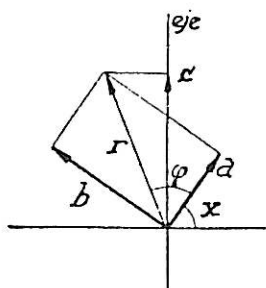
En efecto, de lecc. 6.^a, § 7, resulta $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$.

Pero no siempre es éste el método más cómodo de solución; así, por ejemplo, la ecuación lineal $a \sin x + b \cos x = c$ se transforma mediante dicho cambio en

$$a \frac{2z}{1+z^2} + b \frac{1-z^2}{1+z^2} = c.$$

o sea $(c+b)z^2 - 2az + c-b = 0$; siendo preciso resolver esta ecuación de 2.^o grado. Más breve es aplicar el método siguiente.

3. Ecuaciones lineales $a \sin x + b \cos x = c$.—Elijamos dos variables auxiliares r y φ tales que $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$; de otro modo, hallemos el módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el argumento φ , dado por $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ del vector único de



componentes cartesianas a y b .

Sustituyendo en la ecuación dada se convertirá en

$$r (\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) = c$$

es decir

$$r \sin(x + \varphi) = c$$

de donde

$$x + \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{c}{r}$$

o bien

$$x = \arcsen \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi$$

con todas las determinaciones inherentes al arc sen. Para que exista solución deberá ser $c^2 < a^2 + b^2$.

Como se ve, el problema es equivalente a determinar el giro x que es preciso dar a un vector de componentes a, b para que se proyecte sobre el eje imaginario según un vector c dado en él.

4. Transformación de expresiones binomias en monomias.—La transformación anterior convierte, como se ha visto, el binomio $a \sen x + b \cos x$ en el monomio $r \sen (x + \varphi)$ y en tal sentido se aplica muchas veces para hacer calculables por logaritmos expresiones binomias trigonométricas.

EJEMPLO.—Hacer calculable por logaritmos el segundo miembro de la relación $\cos a = \cos b \cos c + \sen b \sen c \cos A$.

Pondremos $\sen c \cos A = r \cos \varphi, \quad \cos c = r \sen \varphi$

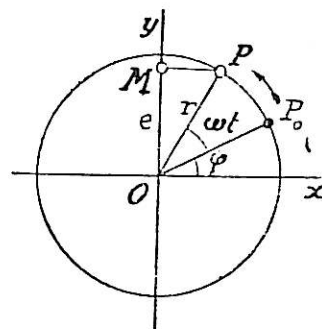
con lo que $\tg \varphi = \frac{\cot c}{\cos A}$, lo que permite determinar logarítmicamente φ . Con estos elementos, la igualdad se convierte en

$$\cos a = r \sen (b + \varphi) = \frac{\cos c \sen (b + \varphi)}{\sen \varphi}$$

5. Composición de movimientos armónicos de igual periodo.—Un movimiento armónico se define como el movimiento de la proyección ortogonal M sobre un eje e de un punto P que se mueve sobre una circunferencia coplanaria con e con movimiento circular uniforme.

Elijamos como eje e el diámetro perpendicular al origen de ángulos Ox . Si es r el radio (llamado *amplitud* del movimiento), φ el ángulo que forma OP con Ox en el instante inicial (ángulo llamado *fase inicial*), y es ω la *velocidad angular* en radianes por segundo, al cabo de t segundos el radio OP formará con Ox el ángulo $\varphi + \omega t$ y tendremos

$$y = OM = r \sen (\omega t + \varphi) \quad [1]$$



Esta clase de movimientos son los típicos de toda vibración elástica (sonido). En general, las funciones de tipo [1] se presentan en todos los fenómenos de carácter ondulatorio. Para que el paréntesis aumente en 2π habrá que incrementar t en $2\pi : \omega$, que se llama *período* del movimiento o del fenómeno.

Es de interés en tales aplicaciones hallar la suma o resultante de varias funciones del tipo [1] con igual velocidad angular ω , es decir, con igual período

$$r_1 \sen (\omega t + \varphi_1) + r_2 \sen (\omega t + \varphi_2) + \dots + r_n \sen (\omega t + \varphi_n)$$

Desarrollando los senos se obtiene una expresión de la forma

$$a \sen \omega t + b \cos \omega t \quad [2]$$

donde a y b valen, en función de los datos,

$$\begin{aligned} a &= r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 + \dots + r_n \cos \varphi_n \\ b &= r_1 \sen \varphi_1 + r_2 \sen \varphi_2 + \dots + r_n \sen \varphi_n \end{aligned}$$

Aplicando a la expresión $|z|$ la transformación del párrafo anterior, es decir, $a=R \cos \Phi$ $b=R \operatorname{sen} \Phi$, resultará

$$\sum_1^n r_i \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_i) = R \operatorname{sen} (\omega t + \Phi)$$

Lo que nos dice: *La suma o resultante de movimientos armónicos alineados de igual período, es un movimiento armónico de igual período.*

La interpretación más sencilla de este resultado consiste en representar mediante vectores v_1, v_2, \dots, v_n de módulos r_1, r_2, \dots, r_n y argumentos $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ cada uno de los movimientos componentes. La amplitud R y la fase Φ del movimiento resultante coinciden con el módulo y el argumento del vector resultante de v_1, v_2, \dots, v_n (Lección 6.ª, § 10). Esta interpretación vectorial de los fenómenos ondulatorios es muy frecuente en la técnica (corrientes alternas).

6. Resolución trigonométrica de ecuaciones algebraicas.—Recíprocamente a lo visto en los párrafos anteriores, las funciones circulares se aplican en ocasiones para la resolución de ciertas ecuaciones algebraicas. Veamos algunos ejemplos.

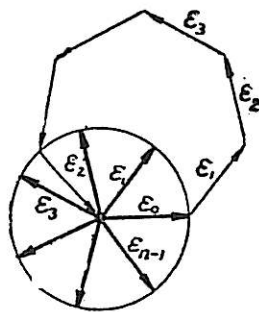
ECUACIÓN BINOMIA.—Llámase ecuación binomia la de la forma $Ax^n + B = 0$, o sea $x^n = -B/A = C$, es decir, se reduce a la determinación de las raíces enésimas de C , problema que hemos resuelto en el § 5 de la lección anterior para C complejo o real cualquiera.

Si C es real, los argumentos de las raíces se simplifican, pues uno de ellos es nulo si $C > 0$ y vale π/n si $C < 0$. Los demás se obtendrán sumando

$$\frac{2\pi}{n}, \quad 2 \frac{2\pi}{n}, \quad 3 \frac{2\pi}{n} \dots (n-1) \frac{2\pi}{n}.$$

Si $C = 1$ el módulo de las raíces es la unidad, y el problema equivale a la *inscripción del n -gono regular en la circunferencia de radio 1.*

RAÍCES DE LA UNIDAD.—Los vectores que unen el centro con los vértices son, pues, en este caso, las raíces de la ecuación $x^n = 1$, es decir, las raíces n -simas de la unidad. Designándolas por $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$, sus valores son



$$\epsilon_0 = 1$$

$$\epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

$$\epsilon_2 = \cos 2 \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} 2 \frac{2\pi}{n} = \epsilon_1^2$$

$$\epsilon_3 = \cos 3 \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} 3 \frac{2\pi}{n} = \epsilon_1^3$$

.....

$$\epsilon_{n-1} = \dots = \epsilon_1^{n-1}$$

Se comprende fácilmente que

$$\epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-1} = 0$$

puesto que componiendo los vectores representativos se cierra un polígono

regular. Lo mismo resulta identificando la ecuación $x^n - 1 = 0$ con su descomposición factorial $(x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_1) \dots (x - \varepsilon_{n-1}) = 0$. La suma de las raíces ε es, en valor absoluto, el coeficiente (nulo) de x^{n-1} . El término independiente es análogamente,

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} = \pm 1$$

correspondiendo el signo + al caso n impar, y el signo — al caso n par.

ECUACIÓN CUADRÁTICA.—Resolver una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es hallar dos números x_1, x_2 dada su suma algebraica $s = -\frac{b}{a}$ y su producto $p = \frac{c}{a}$. Supuestas reales las raíces, s es una suma aritmética si $p > 0$ y es una diferencia si $p < 0$.

Una solución trigonométrica sencilla de este problema se desprende de las siguientes identidades:

$$\cot \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

$$\cot \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

1.º Si p es positivo, podemos, pues, poner

$$[1] \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{p} \cot \alpha \\ x_2 &= \sqrt{p} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \text{ con lo que } \left\{ \begin{aligned} x_1 x_2 &= p \\ x_1 + x_2 &= \frac{2\sqrt{p}}{\operatorname{sen} 2\alpha} = s \end{aligned} \right.$$

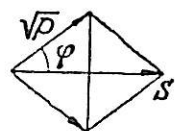
de donde $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\sqrt{p} : s$, que permite calcular α siempre que $2\sqrt{p} < s$, es decir, $4p < s^2$. Calculando α se obtienen inmediatamente x_1, x_2 por [1].

2.º Si p es negativo y es p' su valor absoluto, escribiremos

$$[2] \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{p'} \cot \alpha \\ x_2 &= -\sqrt{p'} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \text{ y tendremos } \left\{ \begin{aligned} x_1 x_2 &= -p' = p \\ x_1 + x_2 &= \frac{2\sqrt{p'}}{\operatorname{tg} 2\alpha} = s \end{aligned} \right.$$

de donde $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\sqrt{p'} : s$. Y una vez obtenido α calcularemos x_1, x_2 por [2].

3.º Si $p > 0$ y $4p > s^2$ (es decir, $\frac{4c}{a} > \frac{b^2}{a^2}$ o sea $4ac > b^2$), la solución indicada antes es imposible, pero entonces las raíces son imaginarias conjugadas, su módulo r es precisamente \sqrt{p} y su argumento φ se desprende de la parte real $\frac{s}{2} = r \cos \varphi$, lo que es suficiente para determinarlos (v. § 8, lec. 8.^a).



ECUACIÓN CÚBICA (*)—Sabemos por Análisis que la ecuación cúbica general $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ puede transformarse en otra sin el término de 2.º grado mediante el cambio $z = x - \frac{a}{3}$. Queda, en efecto, la ecuación

$$x^3 = 3px + 2q \quad [1]$$

en la que se ha puesto

$$3p = \frac{a^2}{3} - b, \quad 2q = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c$$

Supondremos p y q reales y admitiremos que $q > 0$, de lo contrario tomaríamos como incógnita $-x$ y cambiaría de signo toda la ecuación. Sustituyamos ahora x por la suma de dos nuevas incógnitas $x = u + v$. Estas u , v han de satisfacer la condición [1]

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 3p(u + v) + 2q \quad [2]$$

y además otra que podemos poner a voluntad y que elijiremos en forma que simplifique [2]. Escribiremos, pues,

$$uv = p \quad \text{con lo que queda} \quad u^3 + v^3 = 2q \quad [3]$$

En resumen, el problema ha quedado reducido a hallar u , v o mejor sus cubos u^3 y v^3 , de los que se conoce la suma $u^3 + v^3 = 2q$ y el producto $u^3 v^3 = p^3$. u^3 y v^3 son, pues, las raíces de la ecuación *resolvente* cuadrática

$$X^2 - 2qX + p^3 = 0 \quad [4]$$

Halladas las raíces X_1 , X_2 de esta ecuación, y puestos

$$u^3 = X_1, \quad v^3 = X_2$$

es decir,

$$u = \sqrt[3]{X_1}, \quad v = \sqrt[3]{X_2}$$

elegiremos pares de valores de estas raíces cúbicas cuyo producto valga p . Cada par sumado dará una raíz x de la ecuación [1] propuesta. No tiene ésta más que tres soluciones porque elegido un valor u_1 de $\sqrt[3]{X_1}$, el correspondiente v_1 de $\sqrt[3]{X_2}$ es precisamente $p : u_1$.

1. Si $q^2 > p^3$ la ecuación [4] tiene dos raíces X_1 y X_2 reales y distintas, que pueden hallarse algebraicamente o trigonométricamente, como hemos indicado en el párrafo anterior.

Si u_1 es la determinación real de $\sqrt[3]{X_1}$, la correspondiente v_1 será la determinación real de $\sqrt[3]{X_2}$ y tendremos la solución real $x_1 = u_1 + v_1$. Si tomamos ahora la segunda determinación de $\sqrt[3]{X_1}$.

$$u_2 = u_1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = u_1 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(*) En la resolución trigonométrica de las ecuaciones cuadrática y cúbica, seguimos en esencia la exposición de *Hessenberg* en su bello tratadito de *Trigonometría*.

deberemos tomar como correspondiente v_2

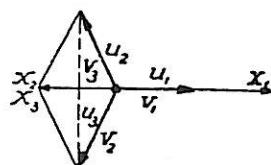
$$v_2 = v_1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = v_1 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

con objeto de que el producto $u_2 v_2$ sea real (p) y, análogamente, a $u_3 = u_1 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ le corresponde $v_3 = v_1 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. En resumen, tenemos para [1] las tres raíces

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1 && \text{(real);} \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u_1 - v_1) \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u_1 - v_1) \end{aligned} \right\} \text{(imagin. conj.)}$$

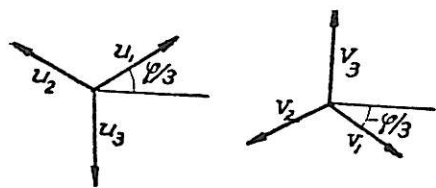
II. Si $q^2 = p^3$ será $X_1 = X_2 = q$, real, $u_1 = v_1 = \sqrt[3]{q}$, y tendremos

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \sqrt[3]{q} = 2q : p \\ x_2 = x_3 &= -\frac{1}{2} x_1 = -q : p \end{aligned}$$



La ecuación tiene tres raíces reales que se expresan racionalmente en función de los coeficientes. Dos de ellas son iguales entre sí.

III. *Caso irreducible.*—Si $q^2 < p^3$ las dos raíces X_1, X_2 de la ecuación resolvente son complejas conjugadas de módulo $r = \sqrt[3]{p^3}$ y de argumento φ definido por $\cos \varphi = q : r$. Una de las raíces X_1 tendrá, pues, argumento $+\varphi$, y la otra X_2 tendrá argumento $-\varphi$.



Habrá que sumar las raíces cúbicas u_1, u_2, u_3 de una y v_1, v_2, v_3 de otra, que tengan argumentos respectivamente simétricos, como indica la figura, con objeto de que su producto sea real. Y, por lo tanto, las raíces de la ecuación serán, en definitiva.

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1 = 2 \sqrt[3]{p} \cos \frac{1}{3} \varphi \\ x_2 &= 2 \sqrt[3]{p} \cos \left(\frac{1}{3} \varphi + 120^\circ \right) \\ x_3 &= 2 \sqrt[3]{p} \cos \left(\frac{1}{3} \varphi + 240^\circ \right) \end{aligned} \quad [5]$$

Las tres raíces de [1] son reales, pero ha habido que obtenerlas sumando raíces cúbicas de las raíces imaginarias de [2].

Hasta que se manejaron los números complejos, este caso fué considerado irresoluble y se llamó *caso irreducible*.

En este caso irreducible se puede llegar más rápidamente a las soluciones [5] comparando la ecuación

$$x^3 = 3px + 2q \quad [1]$$

con la identidad (que resulta de la del § 9 de la lección anterior) cualesquiera que sea k y α

$$k^3 \cos^3 \alpha = \frac{3k^2}{4} \cdot k \cos \alpha + \frac{k^2}{4} \cos 3\alpha \quad [6]$$

Pues tomando para k y α valores que verifiquen

$$\frac{k^2}{4} = p, \quad \frac{k^3}{4} \cos 3\alpha = 2q$$

se obtendrán para $x = k \cos \alpha$ soluciones de la ecuación [1].

Pero de [7] resulta $k = 2\sqrt{p}$, $\cos 3\alpha = \frac{8q}{k^3} = \frac{q}{\sqrt{p^3}}$

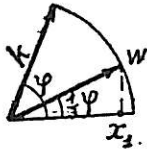
y llamando φ al ángulo comprendido entre 0 y π cuyo coseno vale $q : \sqrt{p^3}$ se tendrán para α las soluciones $\pm \frac{1}{3}\varphi \pm \frac{1}{3}2k\pi$, que sólo proporcionan para x las tres distintas x_1, x_2, x_3 , antes halladas [5].

NOTAS

7. El problema de la trisección del ángulo.—La solución que acabamos de exponer, correspondiente al caso irreducible, tiene una interpretación geométrica muy sencilla.

Asignemos a cada ecuación $x^3 = 3px + 2q$ que cumpla $q^2 < p^3$ (y, por tanto, $p > 0$), un vector k_φ de módulo $k = 2\sqrt{p}$ y argumento φ comprendido entre 0 y π , dado por $\cos \varphi = q : \sqrt{p^3}$.

La solución $x_1 = 2\sqrt{p} \cos \frac{1}{3}\varphi$ es la proyección sobre el eje x del vector w de igual módulo y argumento un tercio de φ . (Las otras dos soluciones resultan girando w de 120° y 240° .)



Dado, recíprocamente, un ángulo φ , o el arco correspondiente en la circunferencia trigonométrica ($k=1$), la ecuación cúbica que corresponde a estos valores de k y φ es ($p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{8} \cos \varphi$)

$$x^3 = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \cos \varphi$$

y tendrá como solución primera $x_1 = \cos \frac{1}{3}\varphi$, es decir; la abscisa del extremo del tercio del arco

Cualquier construcción que permitiera obtener con la regla y el compás el ángulo $\frac{1}{3}\varphi$ conocido φ , permitiría asimismo hallar $\cos \frac{1}{3}\varphi$ dado $\cos \varphi$. Ya veremos más adelante que ello no es posible en general (salvo valores particulares de φ).

8. Inscripción del heptágono regular.—La ecuación binómica $x^7 - 1 = 0$ tiene la raíz $x=1$. Dividiendo la ecuación por $x-1$ queda la ecuación recíproca (ciclotómica)

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

cuyo grado se reduce a la mitad mediante la sustitución $z = x + \frac{1}{x}$, con lo que resulta $z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$; y a su vez, mediante el nuevo cambio $z = X - \frac{1}{3}$ (v. § 6), se transforma en

$$X^3 - \frac{7}{3}X + \frac{7}{27}$$

ecuación cúbica equivalente a la de la trisección del ángulo φ dado por

$$\cos \varphi = \frac{7}{54} : \sqrt{\frac{7^3}{9^3}} = 1 : 2\sqrt{7}$$

9. Solución trigonométrica de la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$.—Resolver en números naturales la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ es hallar triángulos rectángulos con lados de medida entera o, lo que es lo mismo, equivale a hallar ángulos agudos de seno y coseno racionales; pues si $\sin \alpha = p/q$, $\cos \alpha = r/s$ y los reducimos a común denominador x/z , y/z , los números enteros x y y verificarán la ecuación dada.

Pero $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ se expresan racionalmente en función de $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ y recíprocamente $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ (lec. 6.^a, § 6). En consecuencia:

Los triángulos pitagóricos son aquellos definidos por ángulos agudos α cuya $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ es racional.

Tomando, pues, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{m}{n}$ y calculando $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \frac{m}{n}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} = \frac{2mn}{n^2 + m^2}$, $\operatorname{cos} \alpha = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$, bastará

poner $x=2mn$, $y=n^2-m^2$, $z=n^2+m^2$ y dar valores naturales a m y n tales que $m < n$, para tener todas las soluciones naturales de la ecuación.

Ejemplos: $m=1, n=2$, resulta $x=4, y=3, z=5$
 $m=1, n=3$, " $x=6, y=8, z=10$
 $m=2, n=3$, " $x=12, y=5, z=13$

10. Triángulos herónicos.—Una generalización de los triángulos rectángulos pitagóricos son los triángulos oblicuángulos *herónicos*, cuyos lados y cuya área son racionales, lo que implica la racionalidad del perímetro $2p$, del radio inscrito $\rho = \text{área} : p$, y de $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \rho : (p-a)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \rho : (p-b)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \rho : (p-c)$.

Recíprocamente, asignando valores racionales positivos a $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ y $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$ (cuyo producto sea < 1), con lo cual también será racional positivo

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = 1 : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) = [1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B] : [\operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B]$$

serán asimismo racionales $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$, $\operatorname{sen} C$; y elegido un lado a racional lo serán b y c (teorema de los senos), así como el área $= \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$. Multiplicándolos por un factor conveniente podremos conseguir finalmente que estos lados, y el área, sean enteros.

Ejemplo: Pongamos $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{2}{3}$. Calculemos $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{4}{7}$; y luego $\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A : (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A) = \frac{4}{5}$, así como $\operatorname{sen} B = \frac{12}{13}$, $\operatorname{sen} C = \frac{56}{65}$.

Reduciendo estos senos al denominador común 65, resultan proporcionales a los numeradores $4 \cdot 13 = 52$, $12 \cdot 5 = 60$ y 56 . El triángulo de lados $a=13$, $b=15$ y $c=14$ proporcionales a estos números, tiene además el área $= \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = 84$ (entera), siendo, por tanto, un triángulo herónico.

Precisamente fué el triángulo descubierto por Herón de Alejandría (siglo III) y que ha motivado el calificativo dado a todos ellos.

EJERCICIOS

Resolver las ecuaciones

1. $2 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{cos} x = 1$ 2. $\operatorname{cos}^2 x = \operatorname{cos} 2x$ 3. $\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = 0$
 4. $\operatorname{tg} x = \operatorname{cot} x$ 5. $2 \operatorname{cos}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 3$ 6. $2 \operatorname{cos} 3x = 6 \operatorname{cos} x - 1$

Resolver los sistemas

7. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = a \\ x \pm y = a \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \operatorname{cos} x \pm \operatorname{cos} y = a \\ x \pm y = a \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{m}{n} \\ x \pm y = a \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{cos} y} = \frac{m}{n} \\ x \pm y = a \end{cases}$

11. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a \\ \operatorname{cos} x + \operatorname{cos} y = b \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = a \\ \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y = b \end{cases}$ 13. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a \\ x + y = a \end{cases}$

Resolver trigonómicamente las ecuaciones algebraicas

14. $x^2 + 7x - 5 = 0$, 15. $x^2 + 3x + 1 = 0$ 16. $x^3 - 6x + 8 = 0$. 17. $x^3 = x + 2$

18. Cortar una esfera por un plano de modo que los volúmenes en que queda dividida estén en la razón 1:2.

19. Resolver gráficamente la ecuación (no reducible) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$

20. Idem íd. $\operatorname{sen} x = x - 3$.

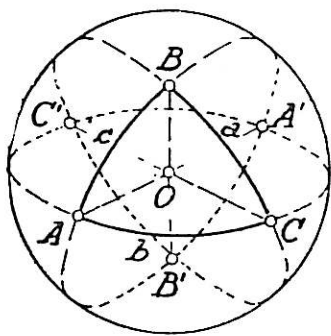
21. Colocar un orificio de desagüe en una caldera cilíndrica horizontal de modo que no se llene más que en sus dos terceras partes

Capítulo III.—LOS PROBLEMAS CLASICOS DE LA TRIGONOMETRIA ESFERICA

LECCIÓN 10.—CONCEPTOS Y FÓRMULAS FUNDAMENTALES

Dijimos en la lección 1.^a, al dar comienzo a la Trigonometría plana, que el objeto de la Trigonometría es sustituir las construcciones gráficas de triángulos por métodos de cálculo más aproximados, aproximación que se echa de menos en Topografía, para los triángulos planos, y en Astronomía y Geodesia, para los triángulos esféricos. Veamos, pues, ahora qué fórmulas ligan los elementos de estos últimos. Pero antes hemos de recordar algunos conceptos fundamentales.

1. Triedros y triángulos esféricos.—Cortando un triedro $OABC$ por una sup. esf. con centro en su vértice, se obtiene un triángulo esférico ABC cuyos lados \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} se miden por las caras del triedro, y cuyos ángulos A , B , C se miden por los diedros del triedro. Es, pues lo mismo calcular los elementos de un triángulo esférico que los de un triedro. La representación esférica ofrece la ventaja de ser más intuitiva y por ello se ha hecho uso de ella desde tiempo inmemorial (*).



Con objeto de establecer cómoda comparación entre las fórmulas de la trigonometría plana y la esférica, designaremos asimismo por A , B , C los ángulos del triángulo y por a , b , c los lados opuestos.

De la definición de triedro se desprende: *Los lados y los ángulos de un triángulo esférico son menores que un ángulo llano (**).* Los supondremos medidos en grados sexagesimales para mayor comodidad en el uso de las tablas. Recordemos (lec. 48, Tomo I) que:

En todo triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo, y viceversa.

La suma $A+B+C$ de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos. La diferencia $A+B+C-180^\circ$ se llama *exceso esférico*. Su medida en radianes multiplicada por r^2 da el *área del triángulo esférico* (tomo I, lección 54). Lo designaremos por ϵ .

(*) La antigua concepción de una bóveda celeste no tuvo otro origen ni tiene hoy otra finalidad.

(**) Se estudian triángulos esféricos más generales (de Möbius, Gauss-Study, Klein) de lados mayores de 180° y hasta de 360° . (V. *Enciclopedia delle Matematiche elementari*, Ber. Bolari.)

La suma $a + b + c$ de los lados de un triángulo esférico (caras de un triedro) es menor que cuatro rectos. Se la llama *perímetro* y se la designa por $2p$. La diferencia $360^\circ - (a + b + c) = 360^\circ - 2p$ se llama *defecto esférico* y la designaremos por d .

Los círculos máximos a que pertenecen los lados, dividen a la superficie esférica en ocho triángulos, correspondientes a otros tantos triedros en los que los planos de las caras del triedro $OABC$ dividen al espacio. Entre ellos es útil considerar, en ocasiones, el triángulo $A'B'C'$ simétrico del ABC respecto al centro (que corresponde al triedro opuesto por el vértice y tiene iguales elementos, aunque en sentido opuesto) y los triángulos $\Delta_1 \equiv A'BC$, $\Delta_2 \equiv AB'C$, $\Delta_3 \equiv ABC'$ llamados *triángulos adyacentes*, definidos por dos vértices y el simétrico del tercero. Cada uno de estos triángulos adyacentes tiene un lado común con el ABC y los otros dos, suplementarios de los de éste; también tienen un ángulo igual y los otros dos ángulos del uno suplementarios de los del otro. Así, por ejemplo, comparando ABC y $A'BC$ se tiene

$$\widehat{BC} \text{ común; } \widehat{BA'} = 180^\circ - c; \quad \widehat{CA'} = 180^\circ - b;$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \sphericalangle A'BC = 180^\circ - \sphericalangle B; \quad \sphericalangle A'CB = 180^\circ - \sphericalangle C$$

Estas relaciones permiten calcular fácilmente los excesos y los defectos de los triángulos adyacentes. Así, llamando ϵ_1 al exceso y d_1 al defecto del triángulo Δ_1 , se tendrá

$$\epsilon_1 = (A + 180^\circ - B + 180^\circ - C) - 180^\circ = 180^\circ + A - B - C$$

$$d_1 = 360^\circ - (a + 180^\circ - b + 180^\circ - c) = b + c - a = 2(p - a)$$

y análogamente los de Δ_2 y Δ_3

$$\epsilon_2 = 180^\circ + B - A - C, \quad \epsilon_3 = 180^\circ + C - A - B$$

$$d_2 = a + c - b = 2(p - b), \quad d_3 = a + b - c = 2(p - c)$$

verificándose

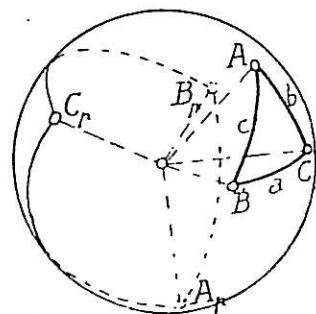
$$\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 360^\circ, \quad d + d_1 + d_2 + d_3 = 360^\circ$$

2. Triángulos polares.—Vimos en el Tomo I que a todo triángulo esférico Δ se puede hacer corresponder otro Δ_p , llamado **POLAR**, cuyos lados son suplementarios de los ángulos de Δ y cuyos ángulos son suplementarios de los lados de Δ .

$$a_p = 180^\circ - A, \quad b_p = 180^\circ - B, \quad c_p = 180^\circ - C$$

$$A_p = 180^\circ - a, \quad B_p = 180^\circ - b, \quad C_p = 180^\circ - c$$

Para construirlo, basta tomar como vértices A_p, B_p, C_p los polos de las circunferencias de a, b, c situados, respecto de cada circunferencia, en el mismo hemisferio (o en hemisferio opuesto, como en la figura) que el triángulo.



El exceso y defecto de Δ_p valdrán, pues,

$$\varepsilon_p = 3 \cdot 180^\circ - (a + b + c) - 180^\circ = 360^\circ - (a + b + c) = d$$

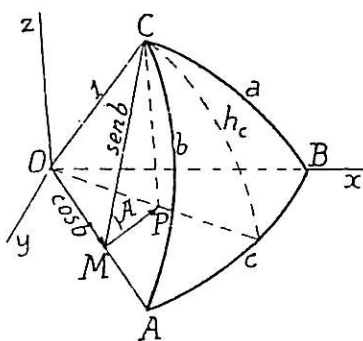
$$d_p = 360^\circ - 3 \cdot 180^\circ + A + B + C = A + B + C - 180^\circ = \varepsilon$$

El $\left\{ \begin{array}{l} \text{exceso} \\ \text{defecto} \end{array} \right\}$ esférico de un triángulo es igual al $\left\{ \begin{array}{l} \text{defecto} \\ \text{exceso} \end{array} \right\}$ esférico de su triángulo polar.

3. Fórmulas de Bessel. Teorema del coseno.

Para la resolución de los triedros o triángulos esféricos, podríamos seguir un camino análogo al de la trigonometría plana, a saber, empezar resolviendo los triedros rectángulos (lo que se consigue sin dificultad cortándolos por planos perpendiculares a sus aristas y calculando los triángulos rectángulos que resultan) y resolviendo, finalmente, los oblicuángulos por descomposición en triedros rectángulos. Todo el conjunto de fórmulas a que nos conduciría este camino, puede obtenerse de una vez, mediante el teorema de las proyecciones, ganándose grandemente en rapidez, lo que se pierde en espontaneidad (*).

Sea ABC un triángulo esférico en el que supondremos, de momento, A y b agudos. Sea el radio igual a la unidad.



Proyectemos C sobre el plano AOB en P , y sobre OA en M . El plano CMP resulta perpendicular a OA por contener dos perpendiculares CP y CM , de modo que el triángulo CMP es rectángulo en P y su ángulo en M es igual al A del triángulo esférico.

Con las hipótesis apuntadas tendremos $OM = \cos b$, $\overline{CM} = \sin b$, $\overline{MP} = \sin b \cos A$, $CP = \sin b \sin A$.

Consideremos ahora la quebrada $OMPC$ y expresemos que la proyección de la resultante OC sobre OB es igual a la suma de las proyecciones de las componentes OM , MP y CP sobre el mismo eje. Cua-

lesquiera que sean a y c , esas proyecciones valdrán en valor y signo

$$\text{pr. } OC = \cos a, \quad \text{pr. } OM = \cos b \cos c, \quad \text{pr. } MP = \sin b \cos A \sin c, \quad \text{pr. } CP = 0$$

Por tanto, tendremos

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Si $A > 90^\circ$ cambia el sentido de MP , pero asimismo cambia el signo de $\cos A$. Si $b > 90^\circ$ bastaría aplicar la fórmula obtenida al triángulo adyacente Δ_1 con los elementos $b' = 180^\circ - b$, $c' = 180^\circ - c$, $a' = a$, $A' = A$ y la fórmula subsiste. Si $A = 90^\circ$ se anula MP ; si $b = 90^\circ$ se anula OM , lo que automáticamente acusa la anulación de $\cos A$ o de $\cos b$.

(*) En la Trigonometría plana hemos preferido el camino que podríamos llamar «espontáneo» porque, a nuestro juicio, penetra más en la significación geométrica de las fórmulas, sin merma apreciable de brevedad.

Permutando letras, obtenemos, pues, el grupo de fórmulas válidas para todo triángulo esférico,

$$\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{array} \quad \text{[I]}$$

cada una de las cuales relaciona los tres lados y un ángulo.

Estas fórmulas desempeñan, pues, papel análogo al teorema del coseno en el plano, siendo fáciles de retener y traducir al lenguaje vulgar. Pueden aplicarse, como en el plano para calcular:

- 1.º Un lado cualquiera dados los otros dos y el ángulo comprendido.
- 2.º Los ángulos A, B, C dados los lados a, b, c .

4. Fórmula de la altura esférica. Teorema de los senos.—Proyectemos ahora la misma quebrada sobre el eje OZ perpendicular al plano AOB y se tendrá $pr. OM = pr. MP = 0$, $pr. CP = CP = \sin b \sin A$, $pr. OC = \sin h_c$ (altura esférica del triángulo sobre AB).

Por tanto,

$$\sin h_c = \sin b \sin A$$

válida también para A y b obtusos, por no variar de signo los senos

Aplicando el mismo razonamiento al ángulo B , resultará

$$\sin h_c = \sin a \sin B$$

de donde, igualando, $\sin a \sin B = \sin b \sin A$, o sea, $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$

Y análogamente

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \text{[II]}$$

Los senos de los lados de un triángulo esférico son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Este teorema permite calcular un ángulo B (lado b) conocidos su lado opuesto b (ángulo opuesto B) y otros elementos opuestos como a y A ; pero el cálculo del tercer ángulo C no es tan sencillo como en el plano por no existir la relación $A+B+C=180^\circ$. Necesitamos relaciones que ligen ángulos y lados no opuestos, o los tres ángulos y un lado.

5. Relaciones entre lados y ángulos no opuestos.—Sustituyendo en la primera fórmula de Bessel $\cos c$ por su expresión sacada de la tercera y $\sin c$ por su expresión $\sin a \sin C : \sin A$, sacada del teorema de los senos, resulta

$$\cos a = \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \sin a \sin C \cot A$$

y transponiendo el término $\cos a \cos^2 b$, resulta, después de dividir por $\sin a \sin b$

$$\left. \begin{array}{l} \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A \\ \text{y por permutación de letras} \\ \cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A \\ \cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B \\ \cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B \\ \cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C \\ \cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C \end{array} \right\} \text{[III]}$$

Estas fórmulas relacionan, como se ve, dos lados, el ángulo comprendido y uno opuesto.

6. Relación entre tres ángulos y un lado.—Aplicando el grupo de Bessel al triángulo polar, es decir, sustituyendo los lados por los suplementos de los ángulos y viceversa, resulta

$$\left. \begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{array} \right\} \text{[IV]}$$

Fórmulas que relacionan los tres ángulos y un lado.

Con los grupos de fórmulas obtenidos podemos abordar la resolución de triángulos esféricos en todos los casos, lo que haremos en la próxima lección. Veamos antes en qué se convierten estas fórmulas aplicadas a los triángulos rectángulos y a los rectiláteros.

7. Fórmulas para la resolución de triángulos rectángulos.—Supongamos ABC rectángulo en A , es decir, $\sin A = 1$, $\cos A = 0$, $\cot A = 0$.

Las fórmulas obtenidas se transforman así:

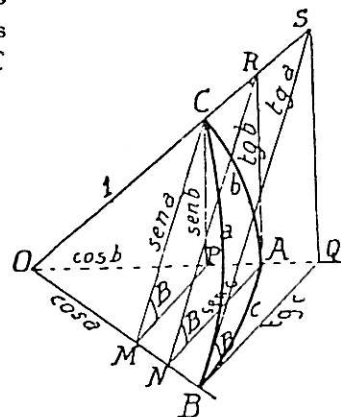
$$\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad \text{[I]} \quad \text{en [I']} \rightarrow \cos a = \cos b \cos c \quad (1) \\ \left. \begin{array}{l} \sin A \sin b = \sin a \sin B \\ \sin A \sin c = \sin a \sin C \end{array} \right\} \text{[II]} \quad \text{en [II']} \left\{ \begin{array}{l} \sin b = \sin a \sin B \quad (2) \\ \sin c = \sin a \sin C \quad (3) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A \\ \cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A \\ \cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B \\ \cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C \end{array} \right\} \text{[III]} \quad \text{en [III']} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \quad (4) \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \quad (5) \\ \operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B \quad (6) \\ \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C \quad (7) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{array} \right\} \text{[IV]} \quad \text{en [IV']} \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cot B \cot C \quad (8) \\ \cos B = \cos b \sin C \quad (9) \\ \cos C = \cos c \sin B \quad (10) \end{array} \right. \end{array}$$

Todas estas fórmulas pueden obtenerse *directamente* cortando el triedro $OABC$ perpendicularmente a las aristas OA y OB y aplicando las fórmulas de la Trigonometría plana a los triángulos sección y a los formados en las caras. La figura interpreta los lados de los triángulos obtenidos cortando el triedro por planos perpendiculares a la arista OB , que pasan por los vértices A, B, C del triángulo esférico.

- Del triángulo OMP se deduce (1).
- Del triángulo CMP se deduce (2).
- Del triángulo RNA se deduce (6).
- Del triángulo SBQ se deduce (5).

Las (4) y (7) resultan por permutación de letras en (5) y (6).

- Combinando (1) con (6) y (7) resulta (8).
- Combinando (1) con (3) y (5) resulta (9).
- Combinando (1) con (2) y (4) resulta (10).



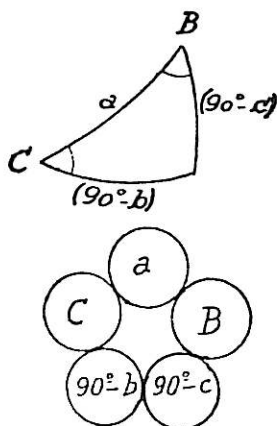
REGLA MNEMOTÉCNICA DE NEPER.—Las diez fórmulas obtenidas para los triángulos rectángulos se construyen fácilmente con la siguiente regla mnemotécnica debida a Neper.

Puestos en orden circular los elementos $90^\circ - b, 90^\circ - c, B, a, C$, que son los del triángulo rectángulo, con omisión del ángulo recto y sustitución de los catetos por sus complementos (v. esquema), se verifica :

El coseno de cada elemento es igual al producto :

- 1.º de las cotangentes de los adyacentes;
- 2.º de los senos de los opuestos.

Con esta regla (a la que favorecen las asonancias y consonancias subrayadas) tenemos en cada caso la relación que nos convenga, según sean los tres elementos que queramos relacionar.



EJEMPLOS : Si queremos relacionar a, B y b ; pondremos $\cos (90^\circ - b) = \text{sen } a \text{ sen } B$, que es la fórmula [2]

Si queremos relacionar b, c, B , escribiremos $\cos (90^\circ - c) = \cot (90^\circ - b) \cot B$, que es la fórmula [6]

8. Fórmulas para los triángulos rectiláteros.—Se llaman así los que tienen un lado recto ; sea a . Introduciendo en los grupos de fórmulas I a IV la hipótesis $a = 90^\circ$, $\text{sen } a = 1$, $\text{cos } a = 0$, $\text{cotg } a = 0$ (o aplicando las fórmulas del párrafo anterior al triángulo polar) obtenemos las siguientes fórmulas para la resolución de triángulos rectiláteros :

$$\begin{array}{l}
 \text{[I'']} \left\{ \begin{array}{l} \cos A = -\cot b \cot c \quad (8') \\ \cos b = \cos B \text{ sen } c \quad (9') \\ \cos c = \cos C \text{ sen } b \quad (10') \end{array} \right. \quad \text{[III'']} \left\{ \begin{array}{l} \text{tg } B = -\text{tg } A \cos c \quad (4') \\ \text{tg } C = -\text{tg } A \cos b \quad (5') \\ \text{tg } B = \text{sen } C \text{ tg } b \quad (6') \\ \text{tg } C = \text{sen } B \text{ tg } c \quad (7') \end{array} \right. \\
 \text{[II'']} \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } B = \text{sen } A \text{ sen } b \quad (2') \\ \text{sen } C = \text{sen } A \text{ sen } c \quad (3') \end{array} \right. \quad \text{[IV'']} \left\{ \begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C \quad (1') \end{array} \right.
 \end{array}$$

LECCIÓN 11.—RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

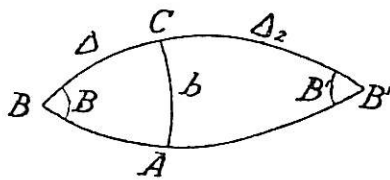
1. **Resolución de triángulos rectángulos.**—Seis son los casos de resolución cuyos datos indicamos en la columna izquierda. A su derecha consignamos las fórmulas usadas y el esquema de cálculo, aunque basta recordar la regla de Neper.

Datos	Fórmulas	CALCULOS
1.º a, b	(1) (2) (4)	$\cos c = \cos a : \cos b$; $\sin B = \sin b : \sin a$ $\cos C = \operatorname{tg} b : \operatorname{tg} a$
2.º b, c	(6) (7) (1)	$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b : \sin c$; $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} c : \sin b$ $\cos a = \cos b \cos c$
3.º a, B	(2) (5) (8)	$\sin b = \sin B \sin a$; $\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$ $\operatorname{tg} C = \cot B : \cos a$
4.º b, B	(2) (6) (9)	$\sin a = \sin b : \sin B$; $\sin c = \operatorname{tg} b : \operatorname{tg} B$ $\sin C = \cos B : \cos b$
5.º b, C	(4) (7) (9)	$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b : \cos C$; $\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$ $\cos B = \cos b \sin C$
6.º B, C	(8) (9) (10)	$\cos a = \cot B \cot C$; $\cos b = \cos B : \sin C$ $\cos c = \cos C : \sin B$

En lo que concierne a los elementos determinados por sus senos, se tendrá en cuenta la propiedad recordada:

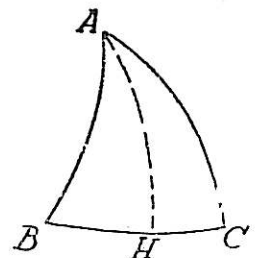
A mayor lado se opone mayor ángulo, o también esta otra, que se desprende de las relaciones (6) y (7):

Un cateto y un ángulo opuesto son simultáneamente agudos u obtusos, y que aplicada a los casos primero y tercero resuelve las respectivas ambigüedades en la determinación de B y b .



El único caso ambiguo es el cuarto, pues si existe un triángulo solución, el adyacente Δ_2 también lo es, por tener los elementos b y B' iguales a los datos. Las soluciones son equivalentes si el triángulo es birrectángulo. La existencia de soluciones exige para los elementos dados por sus senos o cosenos, que éstos sean ≤ 1 .

2. **Resolución de triángulos isósceles.**—Para resolver un triángulo ABC esférico isósceles se procede como en el plano, descomponiéndolo en dos triángulos rectángulos por medio de la altura esférica AH trazada sobre el lado desigual y aplicando lo dicho en el párrafo anterior. Si $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ es $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $BH = \frac{1}{2}\widehat{BC}$, $\sphericalangle BAH = \frac{1}{2}\sphericalangle B$, y bastará dar; 1.º Dos lados desiguales. 2.º Dos ángulos desiguales. 3.º un lado de los iguales y el ángulo A . 4.º un lado de los iguales y el ángulo B . 5.º El lado desigual y el ángulo opuesto. 6.º El lado desigual y un ángulo contiguo B .



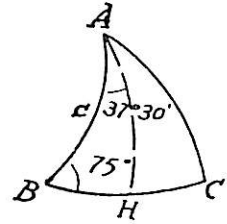
Si el triángulo es equilátero $a=b=c (<120^\circ)$ será también equiángulo $A=B=C (>60^\circ)$ y bastará dar un lado $<120^\circ$ o un ángulo $>60^\circ$ para resolverlo, aplicando lo anterior.

Ejemplo: Calcular los lados de un triángulo equilátero cuyos ángulos valen 75°

En el triángulo rectángulo ABH se tendrá $\sphericalangle B=75^\circ \quad \sphericalangle B:2=37^\circ 30'$

$$\cos c = \cot 75^\circ \cot 37^\circ 30'$$

de donde se calcula $c=60^\circ 33' 42''$



3. Casos de resolución de triángulos oblicuángulos.—Seis son los casos de resolución de triángulos oblicuángulos:

- | | |
|--|--|
| 1.º Dados los tres lados | 4.º Dados los tres ángulos |
| 2.º Dados dos lados y el ángulo comprendido. | 5.º Dados dos ángulos y el lado común. |
| 3.º Dados dos lados y un ángulo opuesto. | 6.º Dados dos ángulos y un lado opuesto. |

Resolviendo el triedro polar, podemos reducir los casos 4.º, 5.º, y 6.º, respectivamente, a los 1.º, 2.º y 3.º De modo que sólo detallaremos éstos.

4. Resolución de un triángulo dados los tres lados a, b, c .—El teorema del coseno permite calcular los cosenos de los ángulos Por ejemplo:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Pero esta fórmula no es apta para el cálculo logarítmico y se transforma de modo parecido a la del plano (lec. 7.ª, § 2, II):

$$\begin{aligned} 1 - \cos A &= \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(b - c + a) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

Sustituyendo $1 - \cos A$ por $2 \sin^2 \frac{A}{2}$ y $1 + \cos A$ por $2 \cos^2 \frac{A}{2}$ y poniendo $a + b + c = 2p$, de donde $b + c - a = 2(p - a)$, $a - b + c = 2(p - b)$, $a + b - c = 2(p - c)$, resulta:

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}}$$

y análogamente,

$$\operatorname{sen} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}}; \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}; \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}}$$

[V]

fórmulas análogas a las de Briggs en el plano y que permiten calcular logarítmicamente los ángulos.

Ejemplo: Sea $a=27^{\circ}59'2''$, $b=41^{\circ}5'6''$, $c=60^{\circ}22'25''$.

Calculemos el semiperímetro $p=\frac{1}{2}(a+b+c)=64^{\circ}43'16'',5$

$$p-a=36^{\circ}44'14'',5, \quad p-b=23^{\circ}38'10'',5, \quad p-c=4^{\circ}20'51'',5$$

Cálculo de A: $\log \operatorname{sen}(p-c) = \bar{2},8797139$

$$\log \operatorname{sen}(p-b) = \bar{1},6030868$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} p = 0,0437158$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen}(p-a) = \underline{0,2231915}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{2},7497080 = \bar{1},3748540 = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$$

de donde

$$\frac{A}{2} = 13^{\circ} 20' 10'', \quad A = 26^{\circ} 40' 20''$$

y análogamente

$$B = 38^{\circ} 57' 10'', \quad C = 123^{\circ} 44' 20''$$

5. Resolución de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido a , b , C .—El teorema del coseno da el tercer lado

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C,$$

fórmula cuyo segundo miembro binomio puede transformarse en monomio, como se indicó en la lección 9.^a, § 4, para hacerlo calculable por logaritmos.

Obtenido c se pueden hallar A y B aplicando el teorema de los senos o reduciéndolo al caso anterior.

Resulta, sin embargo, más práctico efectuar el cálculo por las fórmulas del párrafo siguiente.

5. Analogías de Gauss-Delambre y de Neper.—Sustituyamos en

$$\cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2}$$

los factores del segundo miembro por sus valores obtenidos en el § 4 Resulta

$$\begin{aligned} \cos \frac{A+B}{2} &= \left(\frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} c} - \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} c} \right) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{c}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}} \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Esta fórmula y sus análogas, obtenidas partiendo de $\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}$, $\cos \frac{A-B}{2}$ y $\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$, suelen escribirse en forma de proporción (analogía)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{c}{2}}, \\ \frac{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{c}{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Delambre)} \\ \text{Gauss} \end{array}$$

y se llaman analogías de Delambre y también de Gauss, por haberlas hallado ambos independientemente.

Se recuerdan los numeradores teniendo presente que a un coseno en un miembro corresponde el signo + en el otro y a un seno el signo - y para recordar los denominadores basta observar que los lados tienen la misma función en el numerador y denominador, mientras los ángulos tienen función distinta.

Dividiendo las analogías de Gauss se obtienen las de Neper (descubiertas muy anteriormente)

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \end{array} \right\} \text{(Neper)}$$

APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.—Para resolver un triángulo esférico dados dos lados a , b y el ángulo comprendido C , podemos aplicar las analogías de Neper y calcular con ellas $\frac{1}{2}(A+B)$ y $\frac{1}{2}(A-B)$, con lo que se tendrá A y B por suma y resta.

El teorema de los senos o, mejor, una analogía de Gauss, dará luego c .

Ejemplo:

$$a = 73^\circ 58' 54'', \quad b = 38^\circ 45', \quad c = 46^\circ 33' 41''$$

$$\frac{a-b}{2} = 17^\circ 36' 57'', \quad \frac{a+b}{2} = 56^\circ 21' 57'', \quad \frac{1}{2}C = 23^\circ 16' 50,5''$$

Tomando logaritmos en las dos primeras fórmulas de Neper (operando con 7 decimales.)

log cos $\frac{1}{2}(a-b) = \bar{1},9791417$	log sen $\frac{1}{2}(a-b) = \bar{1},4809167$
colog cos $\frac{1}{2}(a+b) = 0,2565779$	colog sen $\frac{1}{2}(a+b) = 0,0795682$
log cot $\frac{1}{2}C = 0,3662603$	log cot $\frac{1}{2}C = 0,3662603$
log tg $\frac{1}{2}(A+B) = 0,6019799$	log tg $\frac{1}{2}(A-B) = \bar{1},9267452$

$$\frac{1}{2}(A+B) = 75^\circ 57' 40,6''$$

$$\frac{1}{2}(A-B) = 40^\circ 11' 25,5''$$

Sumando, resulta $A = 116^\circ 9' 6''$, y restando, $B = 35^\circ 46' 15''$. Finalmente, para el cálculo de c se tendrá

$$\cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} : \cos \frac{A+B}{2} \quad (\text{Gauss})$$

$$\log \cos \frac{1}{2}(a+b) = \bar{1},7434221$$

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}C = \bar{1},5968566$$

$$\text{colog} \cos \frac{1}{2}(A+B) = 0,6151485$$

$$\log \cos \frac{1}{2}c = \bar{1},9554272 \quad \frac{1}{2}c = 35^\circ 31', \quad c = 51^\circ 2'$$

7. Resolución dados dos lados y un ángulo opuesto a , b , A .—El teorema de los senos da B ,

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$$

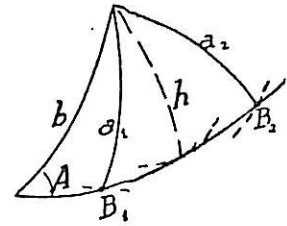
Los grupos III ó IV permiten calcular los restantes elementos, pero es preferible aplicar para ello las analogías de Neper.

Las primeras darán $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ y las segundas darán $\operatorname{tg} \frac{c}{2}$.

DISCUSIÓN: Existe solución sólo cuando

$$\text{sen } b \cdot \text{sen } A \leq \text{sen } a,$$

es decir (fig.) si es $h \leq a$. Si es $<$ pueden existir dos soluciones. Para dilucidar su validez no hay más que imaginar la construcción del triángulo o apelar a la condición *a mayor lado se opone mayor ángulo*. La discusión es análoga a la efectuada para triángulos planos en la lección 3.^a



Ejemplo: Sea $a=57^{\circ}36'$ $b=31^{\circ}14'$ $A=104^{\circ}25'$

Dada la aproximación de los datos, operemos con 4 decimales

$$\begin{aligned} \log \text{sen } b &= \bar{1},7148 \\ \log \text{sen } A &= \bar{1},9861 \\ \text{colog sen } a &= 0,0735 \\ \hline \log \text{sen } B &= \bar{1},7744 \quad B = 36^{\circ}30', \quad \text{o bien} \quad 143^{\circ}30' \end{aligned}$$

Pero como $b < a$ debe ser $B < A$ y sólo vale la solución $B=36^{\circ}30'$.

Con esto podemos calcular C y c mediante las analogías de Neper, en las que

$$\frac{1}{2}(a+b)=44^{\circ}25', \quad \frac{1}{2}(a-b)=13^{\circ}11', \quad \frac{1}{2}(A+B)=70^{\circ}27,5', \quad \frac{1}{2}(A-B)=33^{\circ}57,5'$$

Cálculo de C

$$\text{tg } \frac{C}{2} = \frac{\text{sen } \frac{a-b}{2}}{\text{sen } \frac{a+b}{2} \text{tg } \frac{A-B}{2}}$$

$$\log \text{sen } \frac{1}{2}(a-b) = \bar{1},3581$$

$$\text{colog sen } \frac{1}{2}(a+b) = 0,1550$$

$$\text{colog tg } \frac{1}{2}(A-B) = 0,1716$$

$$\log \text{tg } \frac{C}{2} = \bar{1},6847$$

$$\frac{C}{2} = 25^{\circ}49' \quad C = 51^{\circ}38'$$

Cálculo de c

$$\text{tg } \frac{c}{2} = \text{tg } \frac{a-b}{2} \frac{\text{sen } \frac{A+B}{2}}{\text{sen } \frac{A-B}{2}}$$

$$\log \text{tg } \frac{1}{2}(a-b) = \bar{1},3696$$

$$\log \text{sen } \frac{1}{2}(A+B) = \bar{1},9742$$

$$\text{colog sen } \frac{1}{2}(A-B) = 0,2527$$

$$\log \text{tg } \frac{c}{2} = \bar{1},5965$$

$$\frac{c}{2} = 21^{\circ}33' \quad c = 43^{\circ}6'$$

8. Cálculo del área. Fórmula de L'Huilier.—Una vez conocidos los ángulos de un triángulo esférico, el área o ángulo sólido del triedro viene dada por el exceso esférico ϵ medido en radianes.

Si se dan los tres lados, se puede formular directamente dicho exceso esférico sin calcular los ángulos, mediante la fórmula de L'Huilier. Para obtenerla, transformemos las analogías de Gauss del siguiente modo:

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2} - \text{sen } \frac{C}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} + \text{sen } \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\text{sen } \frac{A+B}{2} - \cos \frac{C}{2}}{\text{sen } \frac{A+B}{2} + \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

Con objeto de expresar en producto todas las sumas o diferencias, sustitu-
yamos $\text{sen } \frac{A+B}{2}$ por $\text{cos } \left(90^\circ - \frac{A+B}{2}\right) = \text{cos } \frac{1}{2}(180^\circ - A - B)$ así como
 $\text{cos } \frac{A+B}{2}$ por $\text{sen } \frac{1}{2}(180^\circ - A - B)$.

Resultará así

$$\frac{-2 \text{cos } \frac{1}{4}(180^\circ - A - B + C) \text{sen } \frac{\varepsilon}{4}}{2 \text{sen } \frac{1}{4}(180^\circ - A - B + C) \text{cos } \frac{\varepsilon}{4}} = \frac{-2 \text{sen } \frac{p}{2} \text{sen } \frac{1}{2}(p - c)}{2 \text{cos } \frac{p}{2} \text{cos } \frac{1}{2}(p - c)} = -\text{tg } \frac{p}{2} \text{tg } \frac{1}{2}(p - c)$$

$$\frac{2 \text{sen } \frac{1}{4}(180^\circ - A - B + C) \text{sen } \frac{\varepsilon}{4}}{2 \text{cos } \frac{1}{4}(180^\circ - A - B + C) \text{cos } \frac{\varepsilon}{4}} = \frac{-2 \text{sen } \frac{1}{2}(p - b) \text{sen } \frac{1}{2}(a - p)}{2 \text{cos } \frac{1}{2}(p - b) \text{cos } \frac{1}{2}(a - p)} = \text{tg } \frac{1}{2}(p - b) \text{tg } \frac{1}{2}(p - a)$$

Multiplicándolas, resulta la fórmula de L'Huilier

$$\text{tg}^2 \frac{\varepsilon}{4} = \text{tg } \frac{p}{2} \cdot \text{tg } \frac{1}{2}(p - a) \cdot \text{tg } \frac{1}{2}(p - b) \cdot \text{tg } \frac{1}{2}(p - c)$$

que permite calcular logarítmicamente ε dados a, b, c

APLICACIÓN AL CÁLCULO DE UN TRIÁNGULO DADOS LOS TRES LADOS.—Aplicando la fórmula de L'Huilier a los triángulos adyacentes, cuyos lados son bien fáciles de obtener, se pueden calcular asimismo los excesos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ de dichos triángulos, lo cual da ecuaciones lineales suficientes para el cálculo de A, B, C y además el criterio de comprobación $\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 360^\circ$.

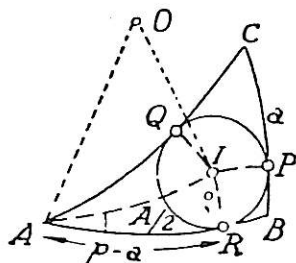
Así, por ejemplo (§ 1, lección 10), de

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ, \quad \varepsilon_1 = 180^\circ + A - B - C, \quad \text{resulta } A = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_1)$$

y análogamente, $B = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_2), \quad C = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_3)$.

La comodidad de tal criterio de comprobación hace aconsejable este método cuando no se tiene absoluta seguridad en los cálculos.

9.—Radio esférico de la circunferencia inscrita.—Los dos arcos AQ y AR comprendidos entre un vértice A y los puntos de contacto de la circunferencia inscrita son iguales (por su simetría respecto del plano diametral AOI que pasa por A y por el centro esférico I de dicha circunferencia). Podemos, pues, repetir aquí el razonamiento usado en el plano (Tomo I, lección 24, § 7) para expresar, en función de los lados, las distancias esféricas AR y AQ .



Los puntos de contacto P, Q, R dividen los lados en seis arcos, dos a dos iguales. Tres de ellos distintos, sumarán el semiperímetro $p = \widehat{AR} + \widehat{BP} + \widehat{PC} = \widehat{AR} + a$ de donde $\widehat{AR} = b - a = \widehat{AQ}$ y análogamente $\widehat{BP} = \widehat{BR} = p - b, \quad \widehat{CP} = \widehat{CQ} = p - c$.

En el triángulo ARI , rectángulo en R , conocemos, pues $\sphericalangle IAR = A/2$, $\widehat{AR} = p - a$. El otro cateto es el radio ρ del círculo inscrito y se tendrá por la fórmula [6] de los triángulos rectángulos

$$\operatorname{tg} \rho = \operatorname{sen}(p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - a) \operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} p}}$$

10.—Fórmulas que dan los lados en función de los tres ángulos.—Aplicando las fórmulas (V) obtenidas en el párrafo 4, al triedro polar, de lados $a_p = 180^\circ - A$, $b_p = 180^\circ - B$, $c_p = 180^\circ - C$, y llamando 2σ a la suma $A+B+C$ resulta $2p_p = 3 \cdot 180^\circ - 2\sigma$, $p_p = 270^\circ - \sigma$

$$p_p - a_p = 90^\circ + A - \sigma, \quad p_p - b_p = 90^\circ + B - \sigma, \quad p_p - c_p = 90^\circ + C - \sigma$$

y las fórmulas de $\operatorname{tg} \frac{A_p}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{a}{2} \right) = \cot \frac{a}{2}$ y sus análogas darán

$$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - B) \cos(\sigma - C)}{\cos(180^\circ - \sigma) \cos(\sigma - A)}}, \quad \cot \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - A) \cos(\sigma - C)}{\cos(180^\circ - \sigma) \cos(\sigma - B)}}$$

$$\cot \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - A) \cos(\sigma - B)}{\cos(180^\circ - \sigma) \cos(\sigma - C)}}$$

Si se expresa σ en función del exceso $\epsilon = 2\sigma - 180^\circ$ de donde $\sigma = 90^\circ + \frac{\epsilon}{2}$ resulta

$$180^\circ - \sigma = 90^\circ - E, \quad \sigma - A = 90^\circ + E - A, \text{ etc.}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \operatorname{sen}(A - E)}{\operatorname{sen}(B - E) \operatorname{sen}(C - E)}}, \quad \text{con} \quad E = \frac{\epsilon}{2}$$

y análogamente $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$ y $\operatorname{tg} \frac{c}{2}$

11. Radio esférico de la circunferencia circunscrita.—Uniendo el centro esférico O' de la circunferencia circunscrita (circuncentro) con los vértices, se obtienen tres triángulos isósceles. Los arcos AO' y BO' forman, pues, con el lado AB ángulos iguales cuyo valor llamaremos γ . Análogamente, sea α el valor de los ángulos que forman BO' y CO' con BC , y β el que forman CO' y AO' con AC .

Si O' es interior al triángulo, se tendrá

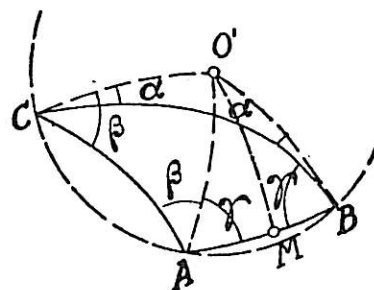
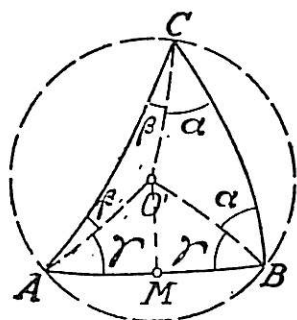
$$2(\alpha + \beta + \gamma) = A + B + C = 2\sigma$$

Por tanto

$$\alpha = \sigma - (\beta + \gamma) = \sigma - A$$

y análogamente

$$\beta = \sigma - B, \quad \gamma = \sigma - C$$



Si O' es interior a Δ_1 , por ejemplo, $A+B+C = 2\beta + 2\gamma - 2\alpha$ y las fórmulas anteriores siguen siendo válidas si convenimos en considerar negativo α , y lo mismo podríamos observar acerca de los signos de β y γ .

Ahora bien, considerando en cualquier caso el punto medio M de AB , en el triángulo $O'AM$ conocemos $AM = c/2$ y $\sphericalangle O'AM = \gamma = \sigma - C$ y por tanto llamando r al radio esférico $O'A$, se tendrá (fórmula [4] de los triángulos rectángulos)

$$\operatorname{tg} r \cos(\sigma - C) = \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos(180^\circ - \sigma) \cos(\sigma - C)}{\cos(\sigma - A) \cos(\sigma - B)}}$$

de donde

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\cos (180^\circ - \sigma)}{\cos (\sigma - A) \cos (\sigma - B) \cos (\sigma - C)}}$$

O bien, en función del semiexceso E ,

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E}{\operatorname{sen} (A - E) \operatorname{sen} (B - E) \operatorname{sen} (C - E)}}$$

12. Conexión analítica entre los grupos de fórmulas de la trigonometría esférica.—Recordemos que, excepto el teorema de los senos, todos los grupos de fórmulas usadas en la resolución de triángulos esféricos han sido deducidos del teorema del coseno, es decir, del grupo I. incluso las fórmulas (V) que dan los senos y cosenos de los semiángulos y las analogías de Gauss y de Neper deducidas de ellas (§§ 4 y 6) (*). Si demostramos que el teorema de los senos es consecuencia analítica del grupo V quedará probado que lo es del I, y, por tanto, que con éste basta para establecer todas las fórmulas de la Trigonometría esférica.

Multiplicando las expresiones de $\operatorname{sen} \frac{A}{2}$ y $\operatorname{cos} \frac{A}{2}$ en (V) dividiendo el resultado por $\operatorname{sen} a$, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{cos} \frac{A}{2}}{\operatorname{sen} a} = \frac{2}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} (p - a) \operatorname{sen} (p - b) \operatorname{sen} (p - c)}$$

expresión *simétrica* en a, b, c ; por tanto, permutando las letras, resulta:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

EJERCICIOS

1. Expresar en función de los lados el producto $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$.
2. Expresar en función de los ángulos el producto $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$.
3. Si D es un punto del lado BC de un triángulo esférico ABC , demostrar la relación $\operatorname{cos} AD \operatorname{sen} BC = \operatorname{cos} AB \operatorname{sen} DC + \operatorname{cos} AC \operatorname{sen} BD$.
4. Si ABC es un triángulo esférico cuyo circuncentro es el punto medio del lado AB , demostrar que se verifica $\operatorname{sen}^2 \frac{c}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{b}{2}$.
5. ¿En qué se convierten las relaciones de los ejercicios 3 y 4 para triángulos muy pequeños?
6. Demostrar que la bisectriz esférica de un ángulo de un triángulo esférico divide al lado opuesto en dos arcos cuyos senos son proporcionales a los senos de los lados contiguos.
7. Aplicar las fórmulas [V], § 4, a un triángulo rectángulo.
8. Idem íd. las fórmulas de Gauss y de Neper.
9. Demostrar que en un triángulo esférico ABC rectángulo en A se verifica $\operatorname{sen} (B+C) = \frac{\operatorname{cos} b + \operatorname{cos} c}{1 + \operatorname{cos} b \operatorname{cos} c}$.
10. Hallar fórmulas análogas para $\operatorname{sen} (B-C)$ y $\operatorname{cos} (B \pm C)$.
11. Demostrar que en un triángulo esférico equilátero se verifica $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sec \frac{1}{2} a$.

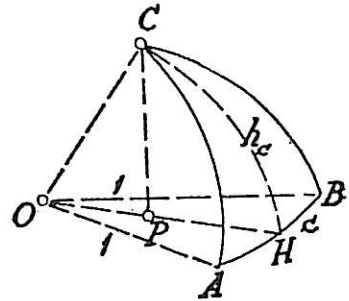
(*) El grupo III se dedujo además del II.

LECCIÓN 12.—APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

1. Seno de un triedro.—Sea $O(ABC)$ un triedro y ABC el triángulo esférico que resulta de cortarle por la superficie esférica de centro O y radio l .

El teorema de los senos $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$ puede expresarse, multiplicando por $\text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } c$, $\text{sen } A \text{ sen } b \text{ sen } c = \text{sen } B \text{ sen } a \text{ sen } c = \text{sen } C \text{ sen } a \text{ sen } b$

El valor común de estos productos es el llamado *seno del triedro*, y podemos escribirlo así (fórmula [2] de los triángulos rectángulos)



$$\text{sen } O(ABC) = \text{sen } h_a \text{ sen } a = \text{sen } h_b \text{ sen } b = \text{sen } h_c \text{ sen } c$$

En el tetraedro $OABC$, la cara OAB tiene por área $\frac{1}{2} \text{sen } c$, mientras su altura CP es $\text{sen } h_c$.

El seno del triedro $O(ABC)$ es, pues, seis veces el volumen del tetraedro $OABC$ formado tomando $OA=1$, $OB=1$, $OC=1$.

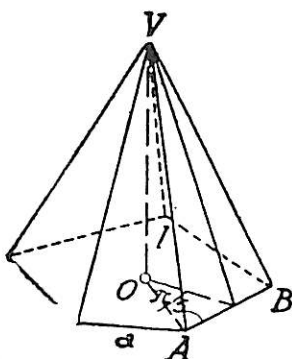
2. Volumen de un tetraedro y de un paralelepípedo en función de tres aristas concurrentes y del seno del triedro que forman.—Si $OA=l$, $OB=m$, $OC=n$. El área del triángulo OAB es $\frac{1}{2}lm \text{ sen } c$, mientras la altura $CP=n \text{ sen } h_c$, con lo que $\text{vol} = \frac{1}{6}lmn \text{ sen } O(ABC)$.

El volumen de un tetraedro es igual a $1/6$ del producto de tres aristas concurrentes por el seno del triedro que forman. Por tanto,

El volumen de un paralelepípedo es igual al producto de tres aristas concurrentes por el seno del triedro que forman.

3. Cálculo de diedros y ángulos sólidos. Aplicación a poliedros.—Con los recursos de la trigonometría esférica podemos calcular diedros y ángulos sólidos de anguloides definidos por datos angulares, o de poliedros definidos por datos angulares o lineales.

Ejemplo: Sea, por ejemplo, la pirámide pentagonal regular definida por la arista básica a y la arista lateral l . Considerando el triedro $A(OBV)$, de vértice A en la base, y cuyas caras son OAB en la base, la BAV en la cara lateral y VAO en el plano bisector del diedro δ de arista VA , se tendrá



$$\text{cara } OAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \quad \cos BAV = a : 2l$$

y se tendrá para calcular el diedro δ la relación (fórmula [4] de triángulos esféricos rectángulos)

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) = \text{sen} (BAV) \text{ sen } \frac{\delta}{2}$$

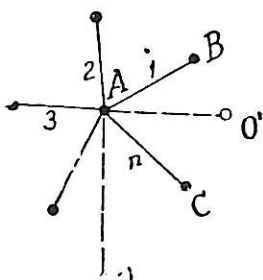
de donde

$$\operatorname{sen} \frac{\delta}{2} = \cos \frac{\pi}{5} : \sqrt{1 - \frac{a^2}{4l^2}}$$

Calculado δ en radianes podemos obtener el ángulo sólido de la pirámide, que valdrá (Tomo I, lec. 54. § 4) $5\delta - 3\pi$.

ANGULO DIEDRO DE UN POLIEDRO REGULAR.—En función del número m de lados de cada cara y el número n de aristas concurrentes en cada vértice, podemos expresar fácilmente los elementos angulares de un poliedro regular mediante sencillos cálculos trigonométricos. Formularemos aquí solamente el cálculo del diedro δ de dos caras contiguas, que no se pudo calcular en el tomo I, por falta de base para ello.

El triedro isósceles $A(OBC)$ formado por dos aristas concurrentes de una cara AB , AC y el radio AO por el vértice común A , se divide en dos triedros rectángulos trazando por dicho radio el plano OAO' perpendicular a la cara.



De este triedro se conoce el ángulo $CAO' = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}$ (mitad del ángulo del polígono regular de m lados) y el diedro opuesto $= \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$.

Por consiguiente, el otro diedro, que será la mitad del diedro δ buscado, podrá calcularse por (fórmula (10) de los triángulos esféricos rectángulos)

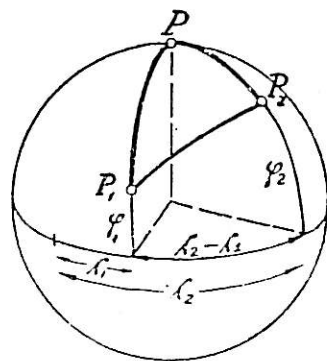
$$\cos \frac{\pi}{n} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}, \quad \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} = \cos \frac{\pi}{n} : \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}$$

que aplicado a los distintos poliedros da: para el tetraedro $\delta = 70^\circ 31' 43'' ,6$; para el octaedro, su suplemento $109^\circ 28' 16'' ,4$; para el hexaedro 90° ; para el dodecaedro $116^\circ 35' 54'' ,2$; para el icosaedro $138^\circ 11' 22'' ,75$ (*).

De estos valores podemos deducir el ángulo sólido en el vértice de cada poliedro, que valdrá, expresando δ en radianes, $n\delta - (n-2)\pi$.

4. Mínima distancia geográfica entre dos puntos.—Supuesta la Tierra rigurosamente esférica, la distancia geográfica más corta entre dos puntos P_1 , P_2 de longitudes λ_1 , λ_2 y latitudes φ_1 , φ_2 , es el arco de circunferencia máxima $\widehat{P_1 P_2}$ (menor que 180°) (**).

El valor angular de dicho arco se halla resolviendo el triángulo esférico definido por un polo P y los dos puntos P_1 , P_2 , del cual se conocen los lados PP_1 , PP_2 (colatitudes) que valen, respectivamente, $90^\circ - \varphi_1$, $90^\circ - \varphi_2$ (considerando positivas las latitudes del hemisferio a que pertenece el polo elegido y negativas



(*) Los valores correspondientes al cubo y al icosaedro son exactos; los otros son inconmensurables con el ángulo recto. En el tomo I demostramos la inconmensurabilidad del diedro del tetraedro.

(**) La demostración rigurosa de este hecho sale de los límites de este curso.

las del otro) y el ángulo que forman, que es la diferencia de longitudes $\lambda_2 - \lambda_1$ (o su suma si están en distinto lado del meridiano origen). Se trata, pues, de la resolución de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido (v. §§ 5, 6, lec. anterior).

Ejemplo 1.º Calcular la distancia geográfica entre Madrid y Buenos Aires.

La longitud del Observatorio de Madrid referida al meridiano de Greenwich es $3^\circ 41'$ (Oeste), mientras Buenos Aires (Estación Radiotelegráfica Dársena N) tiene longitud $58^\circ 22'$ al Oeste del mismo meridiano $\lambda_2 - \lambda_1 = 54^\circ 41'$.

La latitud del Observatorio de Madrid es de $40^\circ 24' 30''$ (Norte) y la de la referida estación de Buenos Aires es $34^\circ 36'$ (Sur). Tenemos, pues, en el triángulo esférico PP_1P_2 (P polo Norte) conocidos dos lados $a = 90^\circ + 34^\circ 36' = 124^\circ 36'$, $b = 90^\circ - 40^\circ 24' 30'' = 49^\circ 35' 30''$ y el ángulo comprendido $C = 54^\circ 41'$. El cálculo de c (Lección 11, § 5) da, aproximadamente: distancia esférica Madrid-Buenos Aires = $89^\circ 45'$, que corresponde a unos 9970 Kms.

La distancia lineal se calcularía tomando la cuerda del arco c , es decir, $d = 2R \sin \frac{c}{2} \cong 8980$ kilómetros.

Ejemplo 2.º Comparar la distancia geográfica mínima y la distancia siguiendo un paralelo, entre dos puntos de igual latitud, como, por ejemplo, P_1 (Nueva York) de longitud $76^\circ 21'$ (Oeste) y latitud $40^\circ 43'$, y P_2 (Nápoles) de longitud $14^\circ 13'$ (Este) e igual latitud. Se tiene $\angle P = \lambda_1 + \lambda_2 = 90^\circ 34'$

El triángulo esférico PP_1P_2 que determina el arco de circunferencia máxima P_1P_2 es, en este caso, isósceles, lo que simplifica su resolución (§ 2.º, Lección 11).

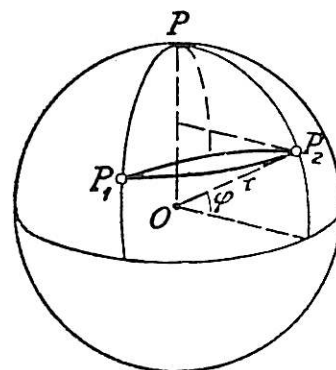
$$\text{sen } \frac{1}{2} \widehat{P_1P_2} = \text{sen } \widehat{PP_1} \text{ sen } \frac{1}{2} \widehat{P_1PP_2} = \text{sen } 49^\circ 17' \text{ sen } 45^\circ 17'$$

de donde resulta el arco de circunferencia máxima.

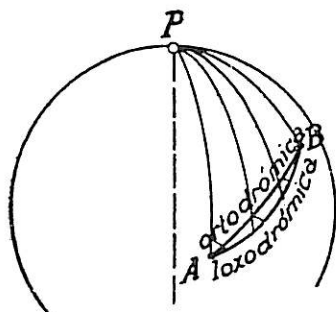
$$P_1P_2 = 7247,7 \text{ Kms.}$$

Para hallar la longitud del arco de paralelo, basta hallar su radio = $r \cos \varphi$, puesto que se conoce su graduación, y se tendrá:

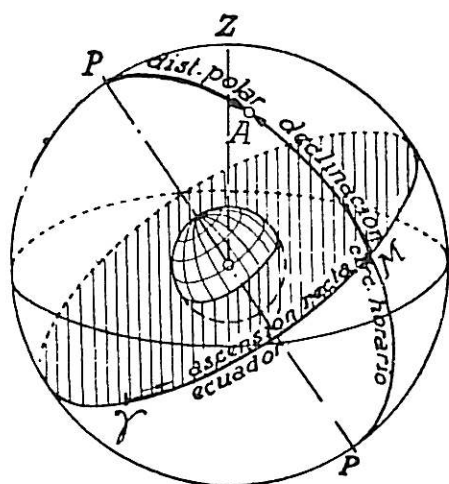
$$\text{paralelo } P_1P_2 = \frac{90^\circ 34'}{360^\circ} 2\pi r \cos 40^\circ 43' = 7631,8 \text{ Km.}$$



OBSERVACIÓN.—El arco de circunferencia máxima u *ortodrómica* no ha sido el camino elegido por los navegantes. Han preferido seguir caminos de rumbo fijo, es decir, curvas llamadas *loxodrómicas*, que forman ángulo constante con el meridiano en cada punto, prefiriendo así la seguridad y comodidad en la navegación a la rapidez en la llegada. Por el ejemplo anterior, se puede juzgar del orden de la diferencia, ya que los paralelos son un caso particular de las loxodromias (ángulo constante de 90° con el meridiano). En la navegación aérea actual a grandes distancias, empiezan a seguirse ya las ortodrómicas, ajustando la variación del rumbo a la trayectoria deseada.



5. Ángulos que determinan la posición de las estrellas en la esfera celeste.—La Astronomía esférica prescinde de las distancias de la Tierra a los astros, y considera sólo las visuales, como si todos los astros estuvieran en una superficie esférica de centro la Tierra y radio indeterminado. Las intersecciones de esta superficie con el eje de la Tierra y el plano de su ecuador se llaman respectivamente *polos* y *ecuador* celestes. El Sol en su movimiento aparente anual cruza el ecuador celeste en dos puntos (equinociales); el punto correspondiente al equinoccio de primavera se llama *punto vernal*, y se suele designar por la letra γ .



La posición de un astro A en la esfera celeste se determina imaginando trazado el círculo máximo que pasa por A y los polos (círculo horario) y dando los arcos: 1.º *declinación* o arco de círculo horario AM comprendido entre A y el ecuador celeste; se considera positiva en el hemisferio Norte y negativa en el hemisferio Sur; 2.º *ascensión recta* γM o arco de ecuador comprendido entre γ y M medido de 0 a 360° en el sentido llamado directo e indicado en la figura (sentido del movimiento de rotación de la Tierra).

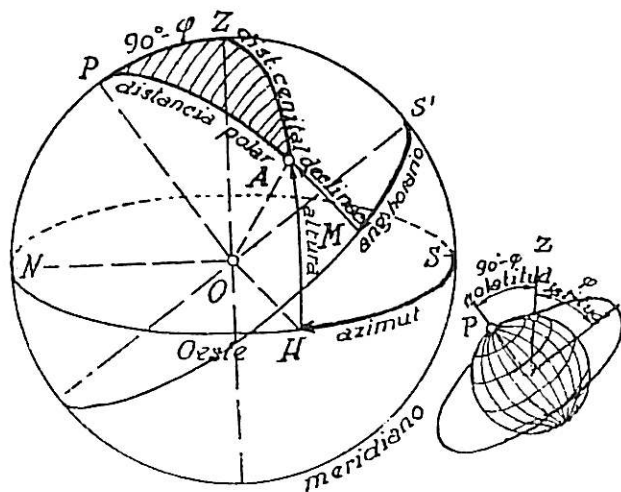
El complemento PA de la declinación se llama *distancia polar*.

Cada estrella fija tiene así sus dos coordenadas fijas (*) que se hallan tabuladas en las efemérides astronómicas, mientras el Sol, los planetas y cometas tienen coordenadas variables con el tiempo, según tablas que se hallan también en dichas efemérides.

Si en lugar de referir la posición de los astros al ecuador y a sus polos, la referimos a la circunferencia sección de la esfera celeste por el plano de la órbita de la Tierra, circunferencia llamada *eclíptica*, y a sus polos, se obtienen las *coordenadas eclípticas* llamadas *latitud* y *longitud celestes* y que se definen análogamente. No hemos de hacer uso de ellas en las aplicaciones que siguen.

6. Posición de un astro respecto del observador.—Debido al movimiento de rotación diurno de la Tierra, el conjunto de todos los astros gira aparentemente alrededor nuestro en veinticuatro horas, y es preciso saber fijar la posición de un astro en un momento dado *respecto al observador*

COORDENADAS HORIZONTALES.—Lo más cómodo para un observador es referir la posición instantánea de un astro A al plano horizontal y a un punto del horizonte. La inclinación AOH de la visual respecto al plano horizontal se llama *altura* del astro y su complemento *distancia cenital*, y el ángulo que forma el plano vertical que pasa por la estrella con el meridiano contado a partir del punto Sur en el sentido S. O. N. E. (retrógrado) se llama *azimut* (v. figura). Hallada la línea meridiana ZS (por la culminación del Sol o de una estrella) se pueden determinar estas dos coordenadas, azimut y altura, por medio de un teodolito.



COORDENADAS ECUATORIALES. — Si

(*) Tal como se han definido, es obligado advertir que sufren, a largo plazo, ligerísimas variaciones debidas a un lento movimiento del punto γ y del ecuador, que no tiene objeto profundizar aquí.

en lugar de referir la posición instantánea de A al plano horizontal y a su polo (cenit) lo referimos al ecuador celeste y a su polo P , las dos coordenadas son: el *ángulo horario* $S'M$ o ángulo del meridiano con el círculo horario PA que pasa por la estrella, contado de 0° a 360° en sentido retrógrado (v. figura) y la *declinación* AM ya definida en el párrafo anterior. Estas coordenadas tienen sobre las anteriores la ventaja de ser la *declinación invariable* para cada estrella, y el *ángulo horario varía proporcionalmente al tiempo* en virtud del movimiento diurno de la Tierra.

7. Triángulo astronómico o de posición.—Consideremos el triángulo esférico PZA formado por el polo, el cenit y el astro. En este triángulo se tiene

PZ = colatitud o complemento de la latitud del lugar (v. figura).

ZA = distancia cenital.

PA = distancia polar.

$\sphericalangle PZA = 180^\circ$ — azimut.

$\sphericalangle ZPA$ = ángulo horario.

Por tanto, podemos resolver en él los siguientes problemas:

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS HORIZONTALES EN ECUATORIALES Y VICEVERSA.—Si se conoce la latitud del lugar y las coordenadas horizontales, azimut y altura, podemos hallar las ecuatoriales, ángulo horario y distancia polar. En efecto, se conocen en el triángulo PZA dos lados, PZ , ZA , y el ángulo comprendido, PZA .

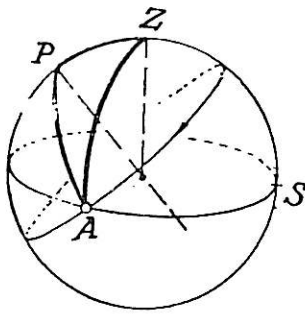
Si se conocen la latitud del lugar y las coordenadas ecuatoriales del astro, se podrán calcular las horizontales. Se conocen ahora PZ , PA , y el ángulo comprendido ZPA .

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD DE UN LUGAR.—Si se mide el azimut y la altura de un astro en un momento dado y se conoce su declinación, se puede hallar la latitud del lugar de observación.—Pues se conocen ahora dos lados ZA , PA y el ángulo PZA opuesto a PA .

En este aspecto se utiliza el triángulo astronómico constantemente en la navegación, con objeto de calcular la latitud del lugar en que se halla el navegante.

La determinación de longitudes, hora local, relaciones entre el ángulo horario y la ascensión recta, son problemas que se resuelven mediante cronómetros, saliéndose ya su solución del ámbito de la Trigonometría propiamente dicha. Los omitimos para no prolongar excesivamente esta lección (v. cualquier tratado de Cosmografía o Astronomía esférica).

ORTO Y OCASO DE UN ASTRO.—En el caso particular en que el astro asoma (orto) o desaparece por el horizonte (ocaso), el triángulo astronómico es rectilátero, la distancia cenital ZA vale 90° , lo que simplifica la resolución del triángulo. Así:



Conocida la latitud del lugar y la declinación del astro, podemos averiguar los lugares del horizonte en que dicho astro sale y se pone, es decir, el azimut de dichos lugares, así como el tiempo durante el que será visible.

En efecto, del triángulo PZA se conocen los tres lados PA = distancia polar del astro, $ZA = 90^\circ$ y $PZ = 90^\circ - \varphi$ (colatitud del lugar). El ángulo PZA dará el lugar del orto y ocaso (en la figura, ocaso). El doble del ángulo horario ZPA dará el tiempo que se mantiene el astro sobre el horizonte, sin más que tener en cuenta que cada hora (sidérea) corresponde a $360^\circ : 24 = 15^\circ$.

EJEMPLO.—La latitud de Madrid es de $40^\circ 24'$. ¿En qué lugar del horizonte saldrá y se pondrá el Sol el día más largo del año y cuál será la duración de este día? Por tratarse del día de solsticio de verano, la declinación del Sol será en este día de $23^\circ 27'$ (inclinación de la eclíptica), es decir, $PA = 90^\circ - 23^\circ 27' = 66^\circ 33'$; además $PZ = 90^\circ - 40^\circ 24' = 49^\circ 36'$. con lo que tendremos (fórmulas [9'] y [8'] de los triángulos rectiláteros).

$$\begin{aligned} \cos 66^\circ 33' &= \cos PZA \sin 49^\circ 36', & \cos PZA &= \cos 66^\circ 33' : \sin 49^\circ 36', \\ \cos ZPA &= -\cot 66^\circ 33' \cot 49^\circ 36' = -\operatorname{tg} 23^\circ 27' \operatorname{tg} 40^\circ 24' \end{aligned}$$

de ellas se desprende $\sphericalangle PZA = 58^\circ 30'$; $\sphericalangle ZPA = 111^\circ 40'$ Por tanto, el orto y ocaso (teóricos) se verifican en puntos del horizonte a $58^\circ 30'$ del punto cardinal Norte, y el Sol está sobre el horizonte $223^\circ 20' : 15 = 14^h 53^m$.

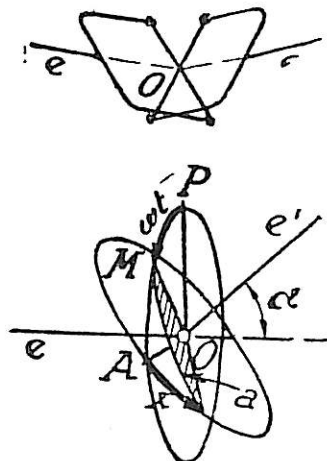
OBSERVACIONES.—Resuelto así el problema, hay que advertir: 1.º Que la duración calculada es en horas sidéreas (el día sidéreo, o tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de sí misma, es unos cuatro minutos más corto que el día solar por el movimiento aparente anual del Sol).

2.º No se ha tenido en cuenta el efecto de refracción que curva los rayos y hace aparecer el disco solar por encima del horizonte cuando, en rigor, estaría oculto si no existiera la atmósfera. Innecesario parece advertir, además, que la solución se refiere a un horizonte teórico (marítimo de igual latitud).

8. Una aplicación técnica. La articulación Cardan.—Para la transmisión de un movimiento circular de un eje a otro formando ángulo α con él se emplea, en mecanismos de gran precisión, la llamada *articulación Cardan* que consiste, esquemáticamente, en dos horquillas articuladas en los extremos de los brazos de una cruz. Las horquillas giran solidarias a sus respectivos ejes, de modo que cada brazo de la cruz se ve obligado a describir un plano perpendicular al eje respectivo. El movimiento equivale, pues, al de un ángulo recto sólido de vértice fijo O cuyos lados se deslizan en dos planos secantes por O , o también de un cuadrante de circunferencia α de extremos deslizantes sobre dos circunferencias máximas no perpendiculares. Conocido el movimiento de M (figura), es decir, el movimiento de rotación del eje e , conocemos para cada instante t el arco AM , y además el ángulo fijo $A = 180^\circ - \alpha$ y el lado opuesto a (recto) y se pide el lado x . Se tiene (fórmula [8'] de los triángulos rectiláteros)

$$\cos A = -\cot \widehat{MA} \cot x, \text{ o sea } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \omega t : \cos \alpha.$$

En la articulación Cardan son proporcionales las tangentes de los ángulos de giro pero no



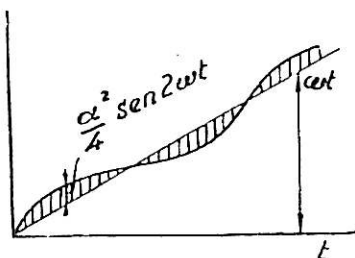
esos ángulos entre sí; y, por tanto, si un eje se mueve con movimiento circular uniforme el otro no. No obstante si a es pequeño, podemos tomar en primera aproximación $\cos \alpha = 1$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \omega t$, $x = \omega t$ (ω velocidad angular de ϵ).

Una segunda aproximación resulta de tomar $\cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{2}$ con lo que

$$\operatorname{tg} x \cong \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \operatorname{tg} \omega t$$

que podemos poner en la forma $\operatorname{tg} (\omega t + \xi)$ con $\xi = \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2\omega t$ (lección 8.^a, § 11); por tanto,

$$x = \omega t + \xi = \omega t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2\omega t$$



La variación de x consta (en segunda aproximación) del término uniforme ωt más un sumando adicional periódico de período mitad y amplitud $a^2/4$, lo que nos da idea de la anomalía introducida en la transmisión por el mecanismo.

9. La Trigonometría plana como primera aproximación de la esférica.

Supongamos un triángulo esférico cuyos lados tengan longitudes tan pequeñas, en comparación con el radio de la esfera, que puedan despreciarse los términos de grado 3° , 4° , ... en las medidas de a , b , c en radianes.

Si sustituímos $\operatorname{sen} a = a$, $\operatorname{sen} b = b$, $\operatorname{sen} c = c$; $\cos a = 1 - \frac{a^2}{2}$, $\cos b = 1 - \frac{b^2}{2}$, $\cos c = 1 - \frac{c^2}{2}$, el teorema esférico de los senos se convierte en

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

y el de los cosenos en

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + cb \cos A$$

de donde, despreciando el término de cuarto grado,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

y análogamente las demás.

Las fórmulas de la Trigonometría esférica se convierten en las de la trigonometría plana despreciando términos de tercer grado en adelante en las razones de los arcos al radio. Se exceptúa la fórmula $A + B + C = \pi$, que equivale a la anulación del exceso esférico y, por tanto, a la anulación de términos de 2.^o grado en las medidas de los lados en radianes (v. fórmula de L'Huilier).

Todos los cálculos de triángulos topográficos se basan en este principio, y son válidos en tanto son despreciables los términos aludidos, lo que comprueba la condición $A + B + C = 180^\circ$. Pero cuando los lados son mayores, la observación acusa la existencia de excesos no nulos por influencia de la curvatura de la Tierra; de los triángulos topográficos pasamos a los geodésicos y entonces hay que tener en cuenta los términos de grado superior. Aun en este caso, puede reducirse el cálculo de un triángulo esférico al de otro rec-

tilíneo de orden más elevado de aproximación mediante el siguiente notable teorema.

10. Teorema de Legendre.—Sean a, b, c las medidas de los lados en radianes, o sea, las longitudes de los arcos tomando el radio R de la esfera como unidad. Con la unidad cuadrada correspondiente R^2 el área del triángulo esférico viene medida por el exceso ε .

Supongamos los lados suficientemente pequeños en relación con el radio para que se puedan despreciar los términos de cuarto grado en a, b, c

Formemos el triángulo plano T' de lados a, b, c y sean A', B', C' , sus ángulos, y S su área.

El teorema de Legendre dice .

Despreciando errores de cuarto orden en las razones de los lados al radio, se puede tomar como área de un triángulo esférico T la del triángulo plano T' cuyos lados tienen igual longitud. Es decir, $\varepsilon = S$.

Los ángulos A', B', C' del triángulo plano T' son, con este mismo orden de error, los A, B, C del esférico disminuidos en un tercio del exceso O sea

$$A' = A - \frac{\varepsilon}{3}, \quad B' = B - \frac{\varepsilon}{3}, \quad C' = C - \frac{\varepsilon}{3}$$

Para demostrar el teorema comparemos los valores de

$$\operatorname{tg} \frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \text{y de} \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}}$$

desarrollando en este último los senos y despreciando los términos de 4.º grado en adelante en $p, p-a, p-b, p-c$, lo que permite poner

$$1 : \left(1 - \frac{p^2}{6}\right) \cong 1 + \frac{p^2}{6} \quad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &\cong \sqrt{\frac{(p-b)\left[1 - \frac{(p-b)^2}{6}\right](p-c)\left[1 - \frac{(p-c)^2}{6}\right]}{p\left(1 - \frac{p^2}{6}\right)(p-a)\left[1 - \frac{(p-a)^2}{6}\right]}} \cong \\ &\cong \operatorname{tg} \frac{A'}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{(p-b)^2}{6}\right)\left(1 - \frac{(p-c)^2}{6}\right)\left(1 + \frac{p^2}{6}\right)\left(1 + \frac{(p-a)^2}{6}\right)} \cong \\ &\cong \operatorname{tg} \frac{A'}{2} \left[1 + \frac{p^2 + (p-a)^2 - (p-b)^2 - (p-c)^2}{6}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pero $p^2 - (p-b)^2 = (2p-b)b = (a+c)b$; $(p-a)^2 - (p-c)^2 = (2p-a-c)(c-a) = b(c-a)$, con lo que el numerador del quebrado resulta $2cb$; y deteniendo el desarrollo binómico en el segundo término, se obtiene

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cong \operatorname{tg} \frac{A'}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2bc}{6}\right] \quad \text{que pondremos} \quad = \operatorname{tg} \left(\frac{A'}{2} + x\right)$$

y, por tanto (§ 11, lec. 8.^a),

$$\frac{bc}{6} = \frac{2x}{\operatorname{sen} A'}, \quad x = \frac{bc \operatorname{sen} A'}{12} = \frac{S}{6} \quad (*)$$

con error del orden de x^2 , es decir, siempre de cuarto orden en a, b, c .

En resumen,

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{A'}{2} + \frac{S}{6} \right) \quad \text{de donde} \quad A = A' + \frac{S}{3} \quad [1]$$

y análogamente

$$B = B' + \frac{S}{3}, \quad C = C' + \frac{S}{3}$$

Pero, sumando, resulta $A + B + C = A' + B' + C' + S = \pi + S$, de donde $S = A + B + C - \pi = \varepsilon$, lo que demuestra la primera parte del teorema, y, sustituyendo en [1], resulta la segunda parte.

EJERCICIOS

1. Demostrar la siguiente expresión del seno de un triedro de caras a, b, c .

$$2\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} (p-a) \operatorname{sen} (p-b) \operatorname{sen} (p-c)}$$

2. Expresión del seno del triedro polar.

3. Demostrar que la suma de los cosenos de los lados de un cuadrilátero esférico cuyas diagonales se cortan en su punto medio, es igual al cuádruple producto de los cosenos de dichas semidiagonales.

4. Calcular las medianas de un triángulo esférico cuyos elementos se suponen conocidos.

5. Idem íd. las bisectrices.

6. Dados los elementos de un triángulo esférico ABC , calcular los ángulos y los lados del triángulo rectilíneo ABC

7. Resolver un triángulo esférico conocidos $A, B, a \pm b$.

8. Idem íd. conocidos $C, c, a \pm b$.

9. Idem íd. conocidos c, b, h_c .

10. Idem íd. conocidos A, c y $a \pm b$.

11. Idem íd. conocidos a, A , y el exceso o el área.

12. Idem íd. conocidos a, b y $A \pm B$.

(*) Aplicando la fórmula de Taylor a la función $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ se obtiene más directamente

$$\frac{A}{2} = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{A'}{2} + \frac{bc}{6} \operatorname{tg} \frac{A'}{2} \right] \cong \frac{A'}{2} + \frac{bc}{6} \operatorname{tg} \frac{A'}{2} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A'}{2}} = \frac{A'}{2} + \frac{bc}{6} \operatorname{sen} \frac{A'}{2} \cos \frac{A'}{2}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f'(a)$$

13. Demostrar que el radio r_2 de la esfera inscrita en un polígono regular de arista a , viene dado, con las notaciones del § 3, por

$$r_2 = \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{m} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

14. Demostrar que el radio r_1 de la esfera circunscrita al poliedro regular es

$$r_1 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

15. Demostrar que si c es el número de caras del poliedro regular, se verifica

$$\text{Area} = \frac{ma^2 c}{4} \cot \frac{\pi}{m}, \quad \text{Vol.} = \frac{ma^3 r_2 c}{12} \cot \frac{\pi}{m}$$

16. Demostrar que el volumen de un tetraedro del que se conocen tres aristas concurrentes abc y los ángulos que forman $bc=a$, $ca=\beta$, $ab=\gamma$ pueden expresarse así:

$$V = \frac{1}{6} abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

17. Sustituyendo los cosenos de la fórmula anterior en función de los tres lados de cada triángulo a que pertenecen α , β , γ , obtener una expresión del volumen en función de las seis aristas del tetraedro.

18. Expresar la diagonal de un paralelepipedo en función de tres aristas concurrentes y de los ángulos que forman entre sí.

19. Calcular la distancia geográfica entre Madrid y Barcelona, sabiendo que esta ciudad está a $5^\circ 52'$ al Este de Madrid y que su latitud es $41^\circ 23'$ (latitud de Madrid $40^\circ 24' 30''$).

20. El ángulo que forman dos aristas laterales contiguas de una pirámide octogonal regular es 20° . Calcular los diedros de dicha pirámide y el ángulo sólido en el vértice.

21. Calcular, con los datos del ejemplo 1.º del § 4 de esta lección, el lugar en que cruzaría el Ecuador un avión en vuelo directo de Madrid a Buenos Aires siguiendo el arco de círculo máximo.

22. El avión del ejercicio anterior después de ocho horas de vuelo a 500 Km/hora ha caído al mar. Averiguar la longitud y latitud del lugar en que ha caído.

23. La diferencia de hora entre París y Roma es de 40 m. 27 s. Las latitudes de estas capitales son: París $48^\circ 50'$, Roma $41^\circ 54'$. Calcular la velocidad media de un avión que ha tardado tres horas en ir de una capital a otra siguiendo un arco de círculo máximo.

24. Cuál es la duración del día más largo y la del más corto en Berlín (latitud $52^\circ 30'$).

25. Con los datos de los ejercicios 23 y 24 y sabiendo que la distancia geográfica entre París y Berlín es de 472 millas (nos referimos a la milla náutica o geográfica, es decir, 1 milla = arco de un minuto de circunferencia máxima), averiguar la diferencia de horario entre París y Berlín.

26. Una calle madrileña tiene la dirección N.E.-S.O. Averiguar a que hora (solar) no habrá sombra en sus aceras, en los días más largo y más corto del año.

27. Averiguar la latitud de una ciudad en que el hecho consignado en el ejercicio anterior ocurre en el momento de salir el sol el día más largo del año.

28. Averiguar la latitud de un lugar en que el sol se pone a las tres de la tarde (hora solar) en el día más corto del año.

PARTE SEGUNDA

NOCIONES DE GEOMETRIA PROYECTIVA

(METODO METRICO)

Capítulo IV.—INVARIANTES METRICOS DE LA PROYECTIVIDAD

LECCIÓN 13.—INCIDENCIA Y ORDENACIÓN PROYECTIVAS
LEYES DE DUALIDAD

1. Concepto de punto impropio, recta impropia y plano impropio.—

Ya hemos usado antes de ahora la palabra *dirección*. Para dar una dirección, dibujamos una recta. Pero la dirección no es precisamente esta recta, puesto que cualquier recta paralela cumple el mismo cometido. Entendemos, pues, por *dirección* lo que tienen de común todo un sistema de rectas paralelas entre sí y es inútil buscar definición más precisa. Se trata de uno de tantos conceptos matemáticos que se definen por abstracción. Observemos ahora que *el concepto dirección tiene propiedades de incidencia idénticas a las del punto*:

- I. Dos rectas de un plano o tienen común un punto, o tienen común una dirección.
- II. Dos puntos determinan una recta; y análogamente: Un punto P y una dirección determinan una recta; quiere decir: hay una recta y una sola que pasa por P y es paralela a las que tienen esta dirección (axioma del paralelismo).
- III. Por una recta y un punto no incidentes, no pasa más que un plano. Y análogamente: Por una recta no pasa más que un plano paralelo a una dirección dada (distinta de la de la recta).

Si convenimos en llamar a una dirección *punto impropio* y en llamar recta (proyectiva) al conjunto de todos sus puntos ordinarios más su punto impropio, estos enunciados desdoblados se unificarán y podremos decir:

- | | |
|--|--|
| <p>I. <i>Dos rectas en un plano determinan un punto (propio o impropio) común a ambas.</i></p> | <p>II. <i>Dos puntos (propios, o uno propio y otro impropio) determinan una recta a la que pertenecen.</i></p> |
|--|--|

Y dos puntos impropios, es decir, dos direcciones, ¿qué determinan? Para contestar a esta pregunta tracemos por un punto cualquiera del espacio rec-

tas paralelas a ambas direcciones, estas paralelas determinan un plano. Todos los planos que podemos obtener de este modo *son paralelos entre sí* y se dice que tienen la misma *orientación*. También diremos que la orientación de un plano *contiene* las direcciones de todas sus rectas

II'. Dos direcciones determinan, pues, una *orientación que las contiene*. El concepto *orientación* tiene propiedades de incidencia idénticas a las de *recta*, puesto que el enunciado que acabamos de establecer es análogo al II y además:

III'. Un punto y una orientación determinan un plano el que pertenecen. Enunciado análogo a los III anteriores.

IV Un plano y una orientación distinta de la del plano determinan una dirección, lo mismo que un plano y una recta no incidentes definen un punto.

V. Dos planos o tienen una recta común o una orientación común.

Si llamamos a una orientación *recta impropia*, puede englobarse II' en II diciendo simplemente: *Dos puntos (propios o impropios) determinan una recta (propia o impropia)*.

Finalmente, observando que cada recta propia tiene un solo punto impropio (dirección), cada plano propio tiene una sola recta impropia (orientación), y que dos rectas impropias (orientaciones) tienen un punto impropio (dirección) común como si fuesen rectas coplanarias, vemos que los elementos impropios se comportan en sus propiedades como si fuesen puntos y rectas de un plano, que llamaremos asimismo *plano impropio*

2. Generalización de las relaciones de incidencia.—Con estos convenios nominales se logra dar una definitiva unidad a todos los enunciados aludidos, que resumiremos así, sin distinción ya de los adjetivos propio e impropio:

En Geometría plana:

- | | |
|--|---|
| (I). <i>Dos rectas determinan un punto situado en ambas.</i> | (II). <i>Dos puntos determinan una recta que pasa por ellos</i> |
|--|---|

En Geometría del espacio:

- | | |
|---|---|
| (II). <i>Dos puntos determinan una recta que pasa por ambos.</i> | (V). <i>Dos planos determinan una recta situada en ambos.</i> |
| (III). <i>Un punto y una recta no incidentes determinan un plano que pasa por ellos</i> | (IV). <i>Un plano y una recta no incidentes definen un punto situado en ellos</i> |

Análogamente verificará el lector que:

Tres puntos no alineados determinan un plano que pasa por ellos.

Tres planos no concurrentes en una recta determinan un punto situado en ellos

Si una recta tiene dos puntos en un plano, está contenida en él.

Si una recta pertenece a dos planos que pasan por un punto, es incidente con dicho punto

Los términos «pasar por», «estar en», utilizados en estos enunciados, son relaciones recíprocas que significan, respectivamente, «contener» «estar contenido» y ambas relaciones pueden englobarse en el concepto común «ser incidentes»

Nos proponemos estudiar, en lo que sigue, propiedades geométricas derivadas de la noción de incidencia, que constituyen el objeto de la Geometría proyectiva.

3. Ley de dualidad en el plano, en el espacio y en la radiación.—La disposición a doble columna de las proposiciones anteriores nos permite ver la perfecta simetría que existe en el plano entre las propiedades iniciales de la recta y del punto (así generalizados), en lo que a relaciones de incidencia se refiere. Y en el espacio, la que existe en las propiedades del punto y del plano entre sí y en relación con el concepto recta. La relación de pertenencia «estar en» se convierte en la recíproca «pasar por», pero si no se quiere distinguir una de otra se puede utilizar el concepto universal de «incidencia». Resulta de aquí:

LEY DE DUALIDAD EN EL PLANO.—*Demostrada una propiedad, relativa a puntos y rectas de un plano, como consecuencia estricta de las relaciones de incidencia entre unos y otras, se puede considerar demostrada otra propiedad llamada dual o correlativa, que se obtiene sin más que permutar los conceptos «punto» y «recta» y los «estar en» y «pasar por»*

LEY DE DUALIDAD EN EL ESPACIO.—*Demostrada una propiedad relativa a puntos, rectas y planos como consecuencia estricta de las relaciones de incidencia entre unos y otros, se puede considerar demostrada otra propiedad, llamada dual o correlativa, que se obtiene sin más que permutar los conceptos «punto» y «plano» y los «estar en» y «pasar por».*

Pues, siendo ciertas las premisas correlativas, bastará repetir los razonamientos con la permutación de conceptos indicada.

Como consecuencia inmediata de uno y otro principio, si llamamos *radiación* a la figura correlativa o dual del *plano* (considerado como conjunto de puntos y rectas), es decir, al *conjunto de planos y rectas que pasan por un punto* (llamado *vértice* de la radiación), se verifica:

LEY DE DUALIDAD EN LA RADIACIÓN.—*A toda propiedad relativa a condiciones de incidencia entre las rectas y los planos de una radiación corresponde otra que se obtiene permutando los conceptos «recta» y «plano» así como los «estar en» y «pasar por».*

La ley de dualidad permite, pues, agrupar a pares las propiedades de la Geometría proyectiva y economizar los razonamientos. La forma de exposición usual es la de doble columna, ya iniciada en el párrafo anterior

EJEMPLO.—Como primer ejemplo de aplicación de la ley de dualidad en el espacio demosremos las dos proposiciones correlativas siguientes.

Si tres rectas abc son concurrentes dos a dos, sin serlo las tres, son coplanarias.

Si tres rectas abc son coplanarias dos a dos, sin serlo las tres, son concurrentes.

En efecto (izquierda), el plano determinado por a y el punto de intersección de bc (exterior a a por hipótesis) contiene también b y c por tener cada una de dichas rectas dos puntos en el plano.

Demostrada la proposición de la izquierda podemos dar por demostrada la de la derecha y recíprocamente.

4. Figuras de primera, segunda y tercera categoría.—Un conjunto de puntos de una recta r (que puede ser el de *todos* sus puntos) se llama *serie de puntos*, llamándose la recta r *base* de la serie. Tiene las siguientes figuras duales:

En el plano: *Haz de rectas*: conjunto de rectas del plano que pasan por un punto llamado *vértice* del haz.

En el espacio: *Haz de planos*: conjunto de planos que pasan por una recta llamada *arista*.

Las tres figuras se llaman *formas* o *figuras de primera categoría*.

Todo conjunto de puntos y rectas de un plano se llama *forma* o *figura plana* y tiene como correlativo la *forma* o *figura radiada*, o conjunto de planos y rectas de una radiación. Ambas figuras se llaman *formas de segunda categoría* (si no son simplemente de *primera*).

Todo conjunto de puntos, rectas y planos del espacio (que no sea figura de segunda categoría) se llama *figura* o *forma de tercera categoría*.

5. Las operaciones fundamentales de la Geometría proyectiva.—Proyectar un punto A desde otro V es trazar la recta VA . Proyectar una recta a desde el punto V , no incidente con a es trazar el plano Va . Proyectar el punto A desde la recta r es trazar el plano rA . Las operaciones correlativas son las de: cortar una recta por otra; cortar un plano α por otro π ; cortar una recta a por un plano π o viceversa, y significan: hallar el elemento común (punto o recta), sea éste propio o impropio.

De las propiedades antes establecidas se deduce:

Las operaciones de proyección y sección conservan las relaciones de incidencia.

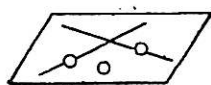
Por ejemplo: Si varios puntos están en una recta r sus proyecciones desde un punto V exterior son rectas de un mismo plano (el Vr). Si varios planos pasan por una recta r , sus intersecciones con un plano secante α pasan por un punto (el de intersección $r\alpha$). Así, pues:

Proyectando una serie $ABCD \dots$ desde un punto V no situado en su base b o desde una recta r no coplanaria con b se obtiene un haz de rectas o un haz de planos. Se les designa así $V(ABCD \dots)$ o $r(ABCD \dots)$.

Cortando, en cambio, un haz de planos por una recta que no corte a la arista, o cortando un haz de rectas por una recta que no pase por el vértice, se obtiene una serie. Cortando un haz de planos por un plano que no pase por su arista se obtiene un haz de rectas.

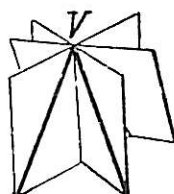
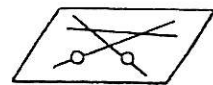
Proyectando una forma plana desde un punto exterior, se obtiene una figura radiada. Cortando una figura radiada por un plano no incidente con el vértice, se obtiene una figura plana.

Establecido un teorema relativo a una figura de segunda categoría, las leyes de dualidad permiten establecer otros tres :



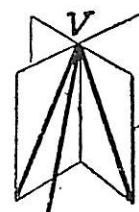
Teorema 1.º Ciertos puntos y rectas de una forma plana verifican la propiedad P .

Teorema 2.º Ciertas rectas y puntos de una forma plana verifican la propiedad P' dual de P en el plano.



Teorema 3.º Ciertos planos y rectas de una forma radiada verifican la propiedad R dual de P en el espacio.

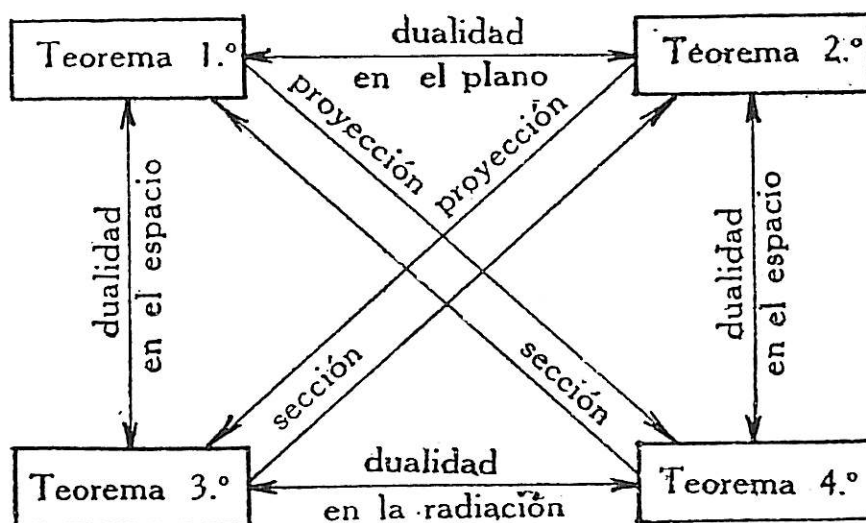
Teorema 4.º Ciertas rectas y planos de una forma radiada verifican la propiedad R' dual de R en la radiación o de P' en el espacio.



De la conservación de las relaciones de incidencia en las operaciones de sección y proyección resulta :

Proyectando los puntos y rectas del teorema 1.º (2.º) desde un punto exterior a su plano, se obtienen rectas y planos que verifican el teorema 4.º (3.º), y cortando éstos se obtienen aquéllos.

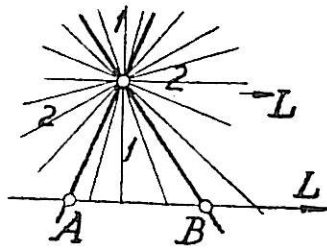
Así, pues, las cuatro propiedades pueden deducirse unas de otras por las relaciones señaladas en las flechas del siguiente esquema :



6. Segmentos y ángulos proyectivos.—La introducción de los conceptos punto, recta y plano impropios nos ha permitido sentar las fecundas leyes de dualidad, pero la nueva acepción de las palabras *punto*, *recta* y *plano* exige revisar sus propiedades de orden y separación.

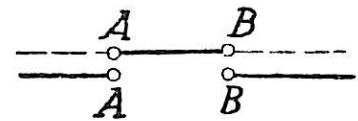
Ante todo observemos que la noción proyectiva de *haz* de rectas o de planos (§ 5) difiere de las que dimos en el tomo I para los conjuntos de *semirectas* y de *semitplanos* con un mismo extremo o borde. Aquí interesa considerar *rectas completas* o *planos completos*. Las rectas de un haz se seguirán

llamando *rayos*, y tanto la palabra «haz» como «rayo» tendrán desde ahora la nueva acepción. Una recta de un haz no establece diferenciación alguna entre las restantes. Con dos rectas quedan ya separadas las rectas del haz en dos conjuntos que llamaremos *ángulos completos* o *proyectivos*, cada uno de los cuales está constituido por un ángulo ordinario y su opuesto por el vértice. Dos rectas secantes definen, pues, dos ángulos completos.

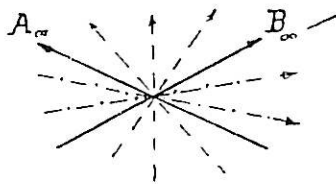


Hemos dicho que proyectando una serie desde un punto exterior a su base, se obtiene un haz y, recíprocamente, cortando al haz se obtiene la serie. Gracias a la introducción del punto impropio, a cada punto de la serie corresponde una recta del haz y recíprocamente.

Para que las propiedades de separación se conserven en la sección del haz por una recta, será preciso admitir que dos puntos *A* y *B* de una recta la dividen sólo en dos regiones que llamaremos *segmentos proyectivos*. Si los puntos *A* y *B* son propios uno de los segmentos proyectivos *AB* es el segmento ordinario y otro está formado por sus dos prolongaciones. Si *A* es propio y *B* impropio se obtiene las dos regiones llamadas *semirrectas* en el tomo primero.

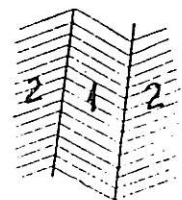


Llamaremos, por último, *segmento impropio* $A_{\infty} B_{\infty}$ al conjunto de los puntos impropios de los rayos de un ángulo completo.



La recta proyectiva se comporta así, en cuanto se refiere a la separación de sus puntos, como una línea *cerrada*, y ya no le son aplicables los axiomas establecidos en la lección 2ª del Tomo I para las rectas y puntos allí considerados (*).

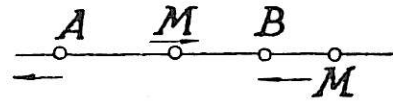
Análogamente: Dos planos de un haz le dividen en dos *diedros completos* o *proyectivos*, cada uno formado por un diedro ordinario y su opuesto por la arista. Si uno de los planos es impropio los diedros proyectivos se convierten en las regiones, llamadas *semiespacios* en el Tomo I, limitadas por el otro.



Proyectando un segmento proyectivo desde un punto impropio no incidente, obtenemos un ángulo proyectivo limitado por dos rectas paralelas. Son dos asimismo, los ángulos proyectivos limitados por dos rectas paralelas: uno es la zona de plano entre ambas, y el otro el resto del plano. Análoga observación para diedros limitados por planos paralelos.

(*) Quizás estas palabras choquen con el concepto intuitivo de recta que el lector se haya formado. Si prescinde, de momento, de la intuición y vuelve a los primeros pasos axiomáticos, recordará que el punto, la recta y el plano no se definieron, a priori, sino como entes que cumplen ciertas propiedades (axiomas). Lógicamente no hay, pues, contradicción alguna en seguir llamando ahora *puntos*, *rectas* y *planos* a entes que cumplan propiedades similares aunque no idénticas. Por otra parte no tardará la intuición del lector en adaptarse a la nueva modalidad y a llenar de contenido imaginativo las nuevas locuciones.

7. Ordenación proyectiva de la recta.—Consecuentemente con lo dicho, para fijar un orden en la recta proyectiva no bastará dar dos puntos ordenados AB , ya que existen dos segmentos proyectivos de extremos en A y B . Será preciso dar tres puntos AMB ordenados para indicar con el punto intermedio M el segmento AB elegido, definiendo así un *sentido*, es decir, un criterio de ordenación. Análoga observación para haces de rectas y planos.



Es preciso dar tres puntos ordenados de una serie o tres rayos (planos) de un haz de rectas (de planos) para definir un sentido en ellos.

8. Triedros y triángulos proyectivos.—Todo triángulo ordinario (métrico) puede considerarse como interferencia de dos de sus ángulos (fig. I) Adop-

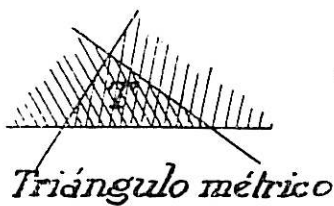


Fig. I

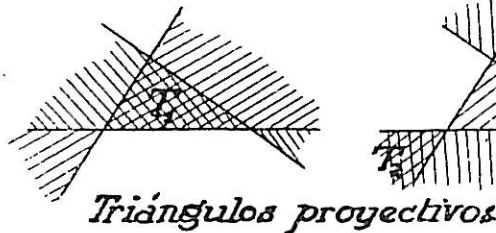
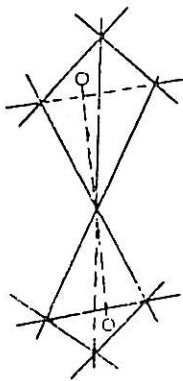


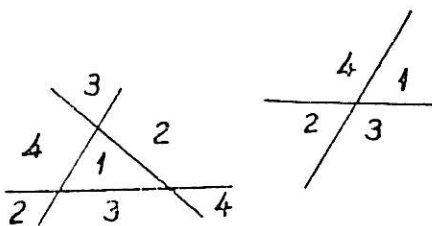
Fig. II

taremos como definición de *triángulo proyectivo* la interferencia de dos ángulos completos que tienen un lado común (rayado doble en la figura II) y, análogamente, llamaremos *triedro proyectivo* a la interferencia de dos diedros completos que tienen dos caras coincidentes, lo que equivale a considerar dos triedros ordinarios opuestos por el vértice (definidos por los diedros opuestos).



Tres planos dividen así al espacio en *cuatro triedros proyectivos* (en lugar de los ocho triedros ordinarios).

Tres rectas del plano le dividen en *cuatro triángulos proyectivos* (fig.). Si una de las rectas es impropia, los triángulos proyectivos se convierten en los cuatro ángulos ordinarios limitados por las otras dos. No se contradice ello con la definición de ángulo ordinario (métrico) como interferencia de dos semiplanos, pues desde un punto de vista proyectivo, *semiplano* es cada uno de los ángulos proyectivos limitado por una recta propia y la impropia.



9. Separación recíproca de los pares de elementos de una cuaterna.—Diremos que dos puntos de una serie A, B separan a otros dos C, D , cuando C y D pertenecen a dos segmentos proyectivos distintos AB , lo que coincide con la definición de separación dada en el Tomo I. Por tanto, según allí se demostró:

1. Si dos puntos A y B separan a otros dos C y D éstos separan a aquéllos.

Diremos, análogamente, que dos rayos a y b (o dos planos α y β) de un haz separan a otros dos c , d (γ , δ) cuando pertenecen a ángulos (diedros) distintos definidos por a y b (α , β).

La correspondencia entre segmentos y ángulos (diedros) en la proyección permite afirmar :

II. Si dos rayos de un haz separan a otros dos, éstos separan a aquéllos.

III. Si dos planos de un haz separan a otros dos, éstos separan a aquéllos.

Estas propiedades son respectivamente correlativas de I en el plano y en el espacio.

10. Carácter proyectivo y dual de la separación.—El procedimiento empleado en el párrafo anterior para deducir una propiedad de separación en el haz de rectas o de planos de su correspondiente en la serie, es completamente general.

De una propiedad de orden o separación en una serie, podemos deducir, por proyección desde un punto o una recta exterior, su correlativa en el plano (haz de rectas) o en el espacio (haz de planos).

En resumen: Las propiedades de separación y ordenación proyectivas siguen verificando las leyes de dualidad.

NOTA

El espacio proyectivo.—El conjunto de puntos, rectas y planos que resultan después de ampliar el espacio métrico euclídeo (edificado en el Tomo I) con la agregación de los elementos impropios, constituye un nuevo espacio que podemos llamar *proyectivo euclídeo*, por haber fundado dichos elementos en la noción de paralelismo.

De no haber precedido a estas nociones de Geometría proyectiva, el desarrollo de la Métrica en el Tomo I, con su cuadro de axiomas y conceptos fundamentales, más práctico hubiera sido crear directamente nuestro espacio proyectivo mediante la simple admisión, como axiomas, de las nuevas propiedades de incidencia y orden que acabamos de establecer. Así procede modernamente algún tratadista (*). Tal sistema excluye, sin embargo, desde un principio, indebidamente, del marco de la Geometría proyectiva, algunas Geometrías como la llamada hiperbólica, en la que por un punto de un plano pueden trazarse infinitas rectas no secantes a una recta dada del mismo.

Con objeto de no formular axiomáticamente hipótesis alguna sobre el infinito de la recta (carácter cerrado y ordenación cíclica de sus puntos) ni sobre la existencia de un punto común a dos rectas (propiedad I, § 2), Pasch y Schur, siguiendo la vía preconizada por Klein, no parten de la recta como concepto primitivo, sino del segmento, ordenando axiomáticamente sus puntos, es decir, establecen axiomáticamente las propiedades inmediatamente perceptibles de nuestro espacio visual finito, y lo amplían, con la agregación de elementos impropios (inaccesibles), definiendo el punto impropio mediante la radiación, y ésta como conjunto de rectas coplanarias dos a dos pero no en conjunto. De esta forma, al margen de todo axioma de paralelismo se construye un *espacio proyectivo* más general que cumple asimismo las propiedades establecidas en esta lección (**).

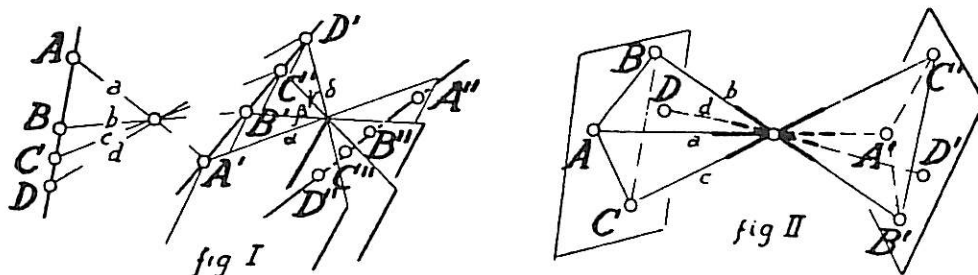
La considerable longitud que tal sistema imprime a las demostraciones nos han hecho preferir didácticamente el camino clásico que sigue siendo en esencia el de los libros más generalizados modernamente (Enriques, Severi, ...).

(*) V., por ejemplo, el artículo de *Togliatti* sobre Geometría proyectiva en la «Enciclopedia delle Matematiche elementari», de *Berzolari*.

(**) En los «Fundamentos de la Geometría proyectiva superior» de *Rey Pastor*, Cap. III, hallará el lector el desarrollo de los comienzos de la Geometría por tal sistema, según un conjunto de axiomas convenientemente seleccionado y simplificado por *Rey Pastor*.

LECCIÓN 14.—LA PROYECTIVIDAD SEGÚN PONCELET Y SUS INVARIANTES MÉTRICOS

1. **La proyectividad según Poncelet.**—Proyectando, por ejemplo, una serie $ABCD \dots$ desde un punto exterior (fig. I), tenemos un haz de rectas $abcd \dots$. Cortando este haz por otra recta, tenemos otra serie $A'B'C'D' \dots$. Proyectando



esta serie desde una recta (no secante) obtenemos un haz de planos $\alpha\beta\gamma\delta$, el cual cortado a su vez por otra recta dará una nueva serie $A''B''C''D'' \dots$, etc.

Todos estos haces y series los llamó Poncelet *proyectivos entre sí*.

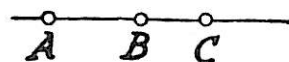
Análogamente (fig. II), por proyecciones y secciones sucesivas podemos pasar de una figura de segunda categoría $ABCD \dots$, a otras $abcd \dots$, $A'B'C'D' \dots$, que llamaremos *proyectivas con ella*.

DEFINICIÓN.—*Dos formas de primera o de segunda categoría se llaman proyectivas entre sí cuando pueden obtenerse una de otra por una sucesión de proyecciones y secciones. La transformación que permite pasar de la primera figura a la segunda se llama inversa de la que transforma la segunda en la primera. Tales transformaciones se llaman proyectivas.*

Dadas dos figuras, para reconocer si son proyectivas según la definición, hemos de hallar una sucesión de proyecciones y secciones que las ligue, pero ¿cómo podremos reconocer, a priori, si tal sucesión existe? Tratemos de caracterizar la correspondencia proyectiva mediante elementos métricos intrínsecos de las figuras. Pero para ello empecemos recordando las relaciones métricas que caracterizan algunos casos particulares de proyectividad estudiados en el Tomo I.

El problema es análogo al que resolvimos en el Tomo I al caracterizar una semejanza (producto de una homotecia por un movimiento) mediante relaciones de «proporcionalidad de segmentos» o «igualdad de ángulos» de las propias figuras semejantes.

2. **Razón simple de una terna.**—Dados tres puntos propios alineados ABC llamemos *razón simple* en're ellos al valor de la razón entre los segmentos propios orientados $AB:AC$, cuyo signo es $+$ ó $-$, según que el sentido de ellos sea coincidente u opuesto (de acuerdo con Tomo I. Lec. 19, § 6).



La designaremos abreviadamente así (ABC) , de modo que

$$(ABC) = \frac{AB}{AC}$$

Es esencial el orden, pues si se altera varía el valor de la razón; por ejemplo

$$(ACB) = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{(ABC)}$$

Al permutar los elementos segundo y tercero en una razón simple, ésta se transforma en su inversa.

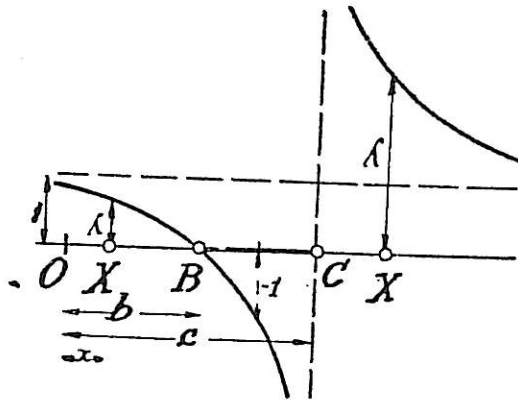
El lector demostrará fácilmente las relaciones

$$(CBA) = 1 - (ABC), \quad (CAB) = \frac{1}{1 - (ABC)}, \quad (BAC) = \frac{(ABC)}{(ABC) - 1}$$

de las que no hemos de hacer uso.

3. Variación de la razón simple. Coordenadas baricéntricas.—Si suponemos el punto primero A variable, y le llamamos X , a cada punto propio X , distinto de C , corresponderá una razón

$$\lambda = (XBC) = \frac{XB}{XC}$$



y, recíprocamente, a cada razón λ corresponde un punto X , según vimos en Tomo I, Lecc. 19, § 6.

Si llamamos x a la abscisa de X en la recta (supuestos elegidos en ella un origen y una unidad) y b y c las abscisas de B y C , se tendrá en valor y signo, para cualquier posición de X ,

$$\lambda = \frac{b - x}{c - x} \quad [1]$$

función de x que

- 1.º Es negativa en el intervalo BC ($b < x < c$) y positiva fuera de él.
- 2.º Se anula para $x = b$, $X \equiv B$ (punto origen).
- 3.º Tiende a infinito para $X \rightarrow C$ (punto límite).
- 4.º Tiende a 1 para $x \rightarrow \pm \infty$ y diremos que la razón simple $XB : XC = 1$ cuando X es el punto impropio de la recta.

La representación gráfica de esta función es la que se indica en la figura, en la que se han llevado los valores de λ en ordenadas sobre las posiciones de X .

Despejando x en (1) se obtiene $x = \frac{b - \lambda c}{1 - \lambda}$, que da la abscisa única x correspondiente a un valor dado de λ .

Esta correspondencia biunívoca entre el punto X y el valor de λ correspondiente, permite tomar dicho valor λ como nuevo número indicador de la posición de X y se llama *coordenada baricéntrica* de X , con relación a los puntos B y C de referencia.

4. La razón simple como invariante en la proyección paralela.—Establecido lo anterior, recordemos el teorema de Thales (Tomo I, Lecc. 19, § 1). De él se desprende:

La razón simple es un invariante en toda proyección paralela. Significa: Al proyectar paralelamente una terna ACD , según otra $A'C'D'$, se conserva el valor de la razón simple $(A'C'D') = (ACD)$, puesto que

$$A'C' : A'D' = AC : AD$$

También es invariante la razón simple en toda proyección central sobre rectas paralelas (§ 9, Lecc. 19, Tomo I). (En la proyección paralela sobre rectas paralelas, es invariante por separado la longitud de cada segmento.)

En cambio, al proyectar una serie $ACD \dots$ desde un punto propio V sobre otra $A'C'D' \dots$ no paralela, varía la razón simple. En efecto, expresándola en función de los ángulos ordinarios convexos ac, ad formados por los rayos proyectantes VA, VC, VD se tiene (teorema de los senos)

$$AC = VC \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } VAC}, \quad AD = VD \frac{\text{sen } ad}{\text{sen } VAD}$$

y dividiendo,

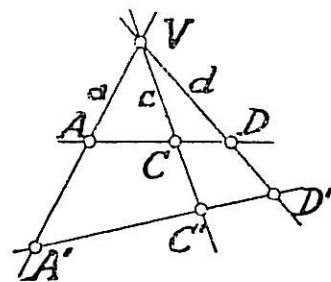
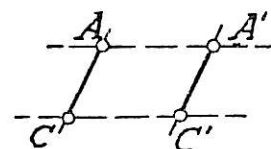
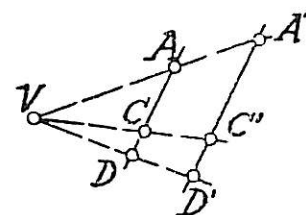
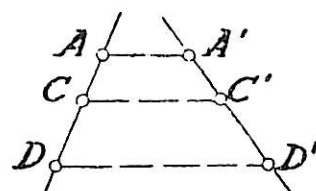
$$(ACD) = \frac{AC}{AD} = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } ad} \cdot \frac{VC}{VD} \quad [2]$$

De los dos factores del segundo miembro, el primero es fijo si lo son los tres rayos acd ; el segundo depende de la recta que secciona el haz. Para otra sección

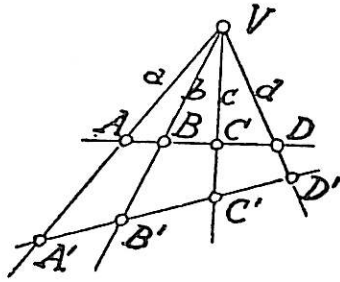
$$\frac{A'C'}{A'D'} = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } ad} \cdot \frac{VC'}{VD'}$$

y sólo es $\frac{VC}{VD} = \frac{VC'}{VD'}$ si las secciones son paralelas.

La razón $\frac{\text{sen } ac}{\text{sen } ad}$ se llama *razón simple de la terna de rayos acd* y se la designa por (acd) , conviniendo asimismo en atribuir signos iguales o distintos a los ángulos, según sea del mismo o de opuesto sentido (y en tomar siempre ángulos ac, ad convexos, únicos que pueden proyectar segmentos propios)



5. La razón doble como invariante métrico de la proyectividad.—La



expresión (2) sugiere la construcción de un invariante en la proyección no paralela por división de dos razones simples. Pues dividiendo la razón simple (2) por la análoga, construída tomando otro punto B,

$$(ICD) = \frac{BC}{BD} = \frac{\text{sen } bc}{\text{sen } bd} \cdot \frac{VC}{VD}$$

desaparecerá el factor variable $VC : VD$, quedando

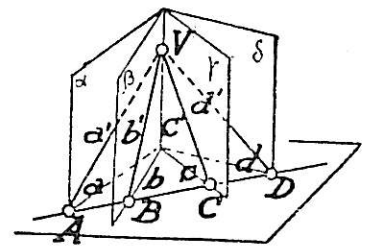
$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } ad} : \frac{\text{sen } bc}{\text{sen } bd} \quad \text{o bien} \quad (ACD) : (BCD) = (acd) : (bcd) \quad [3]$$

El primer miembro se llama *razón doble* o *anarmónica* de la cuaterna de puntos A, B, C, D y se la designa por $(ABCD)$. El segundo miembro se llama *razón doble* de la cuaterna de rayos a, b, c, d designándosela por $(abcd)$ con los convenios establecidos en los párrafos anteriores en cuanto a los signos. Podemos, pues, afirmar:

La razón doble de una cuaterna de $\left\{ \begin{matrix} \text{puntos} \\ \text{rayos} \end{matrix} \right\}$ es igual a la razón doble de la cuaterna de $\left\{ \begin{matrix} \text{rayos} \\ \text{puntos} \end{matrix} \right\}$ obtenida $\left\{ \begin{matrix} \text{proyectando} \\ \text{cortando} \end{matrix} \right\}$ la anterior $\left\{ \begin{matrix} \text{desde un punto} \\ \text{por una recta} \end{matrix} \right\}$ no $\left\{ \begin{matrix} \text{alineado} \\ \text{concurrente} \end{matrix} \right\}$ con ellos.

Definiremos, análogamente, por *razón doble* $(\alpha\beta\gamma\delta)$ de cuatro planos de un haz la de una sección recta $(abcd)$ del mismo. Se tendrá

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } ad} : \frac{\text{sen } bc}{\text{sen } bd}$$



Pero comparando esta sección con otra oblicua $a'b'c'd'$, ambas se cortan en una cuaterna de puntos $ABCD$ situada en la intersección de sus planos, y por tanto,

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd) = (ABCD) = (a'b'c'd')$$

La razón doble de un haz de cuatro planos es igual a la de $\left\{ \begin{matrix} \text{puntos} \\ \text{rayos} \end{matrix} \right\}$ que resulta de cortarlo por $\left\{ \begin{matrix} \text{una recta} \\ \text{un plano} \end{matrix} \right\}$ cualquiera no $\left\{ \begin{matrix} \text{concurrente} \\ \text{incidente} \end{matrix} \right\}$ con la arista.

En resumen: La razón doble de cuatro elementos de una figura de primera categoría es un invariante en toda transformación proyectiva de la misma.

Cuando esta razón doble vale -1 la cuaterna es armónica, pues de

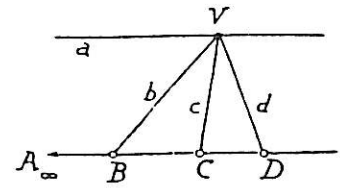
$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1 \quad \text{se desprende} \quad \frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}$$

coincidiendo con la definición dada en Tomo I. Lecc. 19, § 7.

NOTA.—Las demostraciones anteriores suponen propios los puntos $ABCD$ de la sección así como la recta que la produce.

Si uno de los puntos, A por ejemplo, es impropio, veremos en seguida que $(ABCD) = BD : BC$; pero

$$\frac{BD}{BC} = \frac{\text{sen } bd}{\text{sen } bc} \cdot \frac{VD}{VC}$$



verificándose ahora (por el paralelismo entre a y la recta BD)

$$\frac{VD}{VC} = \frac{\text{sen } VCD}{\text{sen } VDC} = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } ad}$$

con lo que subsiste la relación (3).

Finalmente, adoptando como *razón doble de cuatro puntos impropios* la razón doble de cuatro rayos proyectantes desde un punto cualquiera del plano, definición independiente del punto elegido, se conservará la validez de la relación (3) aun en el caso en que se corte el haz $abcd$ por la recta impropia.

6. Permutación de elementos de la razón doble.—Es conveniente considerar la razón doble como *producto* de razones simples, bastando invertir la razón divisor (§ 2)

$$(ABCD) = (ACD) : (BCD) = (ACD) \cdot (BDC)$$

Como ocurre con las razones simples, es preciso dar el orden de los elementos de una razón doble, si bien pueden existir razones dobles iguales con ordenaciones distintas, como establece el siguiente teorema:

I. Si en una razón doble $(ABCD)$ se permutan dos elementos y también los otros dos, la razón doble no altera. Es decir,

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$

pues todas dan el mismo valor $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$.

En cambio, fijado un elemento, por ejemplo A , al variar el orden de los otros tres, se obtienen razones distintas. En particular

II. La permutación de los dos últimos elementos transforma la razón doble en su valor recíproco. En efecto (§ 2),

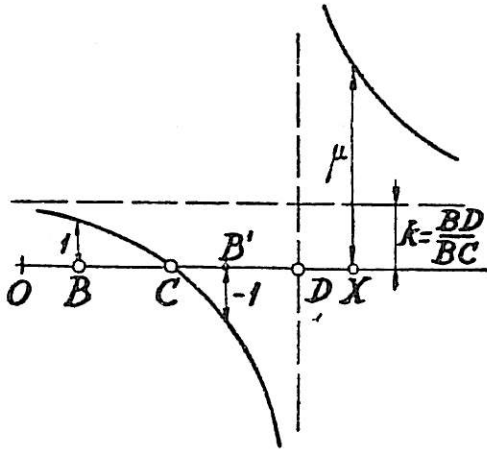
$$(ABDC) = (ADC) \cdot (BCD) = \frac{1}{(ACD)} \cdot \frac{1}{(BDC)} = \frac{1}{(ABCD)}$$

III. Dejamos como ejercicio para el lector demostrar que si $(ABCD) = \mu$ es $(ACBD) = 1 - \mu$, de donde

$$(ACDB) = \frac{1}{1 - \mu}, \quad (ADBC) = 1 - \frac{1}{\mu}, \quad (ADCB) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu}}$$

7. Variación de la razón doble. Coordenada proyectiva.—Consideremos fijos los puntos BCD de la cuaterna $ABCD$ y variable el primer punto que llamaremos X , y sea x su abscisa. Se tendrá

$$\mu = (XBCD) = \frac{XC}{XD} : \frac{BC}{BD} = \frac{XC}{XD} \cdot k \quad [3]$$



Los valores de μ son, pues, los de la razón simple $\lambda = (XCD)$ multiplicados por el factor constante $k = BD : BC$. La representación gráfica de la función $\mu = \lambda k = \frac{c-x}{d-x} k$ (§ 3) será,

pues, la misma de la función $\lambda = (XCD)$ con un simple cambio de escala en el eje vertical (y eventualmente de sentido si k es negativo). En el supuesto k positivo, se halla

indicada la variación de μ en las ordenadas de la figura.

Vemos que :

Para $X \equiv B$ $(BBCD) = (BCD) : (BCD) = 1$. El 2.º punto se llama por ello *punto unidad*.

Para $X \equiv C$ $(CBCD) = 0$. El 3.º punto se llama por esta razón *punto cero*.

Para $X \rightarrow D$ $(DBC D) \rightarrow \pm \infty$ por anularse XD en (3). El tercer punto D se llama *punto límite*.

Para $X \equiv B'$ (armónicamente separado de B respecto CD) $(B'BCD) = -1$.

Para $X \rightarrow \infty$ $(\infty BCD) = 1 : \frac{BC}{BD} = (BDC)$ (§ 3).

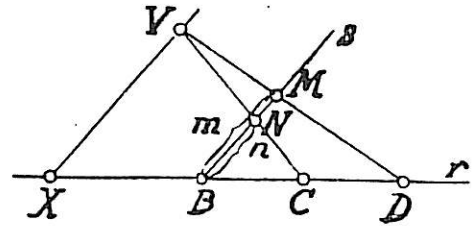
A cada valor de x abscisa de X corresponde, pues, un valor de μ y, recíprocamente, a cada valor de μ corresponde un valor de $\lambda = (XCD)$ y por tanto (§ 3) un valor de x .

Fijados tres puntos, BCD , la razón doble $(XBCD)$ puede, pues, servir como número indicador de la posición de X y se llama *coordenada proyectiva* de X respecto de la terna BCD .

8. Construcción de un punto dada la razón doble que determina con otros tres.—Para hallar gráficamente en una recta r el punto X que forma con tres puntos dados BCD una razón doble dada $(XBCD) = \frac{m}{n}$ tracemos una secante s por B y llevemos sobre ella $\overline{BM} = m$, $\overline{BN} = n$ hacia un mismo o distinto lado de B , según que m y n sean de igual o distinto signo. La paralela a s por el punto V de intersección de CN y DM cortará a r en el punto X

deseado. En efecto, proyectando la cuaterna $XBCD$ desde V sobre s resulta (por el § anterior)

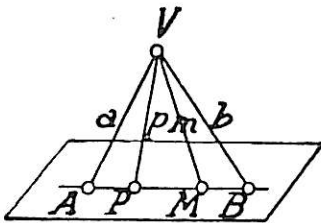
$$(XBCD) = (\infty BNM) = BM : BN = m : n$$



Si se da el valor de la razón doble con el punto incógnito X en otro lugar de la cuaterna permutaremos X con el elemento primero, permutando asimismo los otros dos, y aplicaremos la construcción anterior, variando la nomenclatura. Así, por ejemplo, dado el valor de $(BCDX)$, lo pondremos en la forma equivalente (§ 6) $(XDCB)$ y aplicaremos la construcción tomando D en lugar de B .

9. Invariantes métricos en formas de segunda categoría.—La razón doble, como invariante métrico en formas de primera categoría, lo es también en las formas de segunda a que puedan pertenecer aquéllas. Es el invariante más sencillo y él nos bastará para establecer la teoría métrica de la proyectividad; pero cabe construir otros invariantes más complejos siguiendo la misma idea de su generación, que repetimos.

Proyectando una terna PAB desde un punto V no alineado con ella y expresando la razón simple (PAB) (§ 4) en función de los ángulos en el haz y la razón de distancias de V al origen A y al punto límite B , resulta

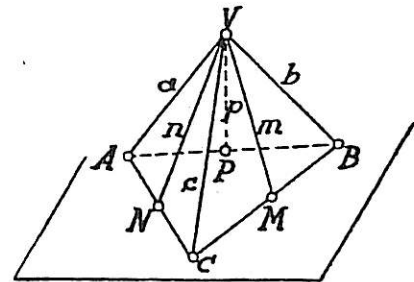


$$\frac{PA}{PB} = \frac{\text{sen } pa}{\text{sen } pb} \cdot \frac{VA}{VB} \quad [1]$$

Si multiplicamos ahora por la razón simple $\frac{MB}{MA} = \frac{\text{sen } mb}{\text{sen } ma} \cdot \frac{VB}{VA}$ formada por un nuevo punto M , e *invirtiendo* los otros dos, A y B (lo que equivale a dividir por $MA : MB$), se eliminarán las razones de distancias a V , y se obtiene el invariante «razón doble» en forma de producto (§§ 5 y 6).

Aplicemos la misma idea combinando tres razones simples: la [1] con otras dos $\frac{MB}{MC}$, $\frac{NC}{NA}$

de modo que cada una tenga su punto límite confundido con el origen de la siguiente, y el de la última confundido con el origen de la primera (de otro modo: el extremo que está en el denominador de cada razón se halla en el numerador de la siguiente) disposición de razones que llamaremos, para abreviar, en cadena:



$$\frac{MB}{MC} = \frac{\text{sen } mb}{\text{sen } mc} \cdot \frac{VB}{VC} \quad [2]$$

$$\frac{NC}{NA} = \frac{\text{sen } nc}{\text{sen } na} \cdot \frac{VC}{VA} \quad [3]$$

Al multiplicar [1], [2] y [3] se eliminan asimismo las razones de distancias a V , quedando un nuevo invariante proyectivo

$$v = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{\text{sen } pa}{\text{sen } pb} \cdot \frac{\text{sen } mb}{\text{sen } mc} \cdot \frac{\text{sen } nc}{\text{sen } na} \quad [4]$$

referente a los seis puntos $APBMCNA$, o a los seis rayos $apbmcna$.

La relación se ha demostrado tan sólo con la hipótesis de ser alineadas cada una de las ternas PAB , MCB , NCA , y V no alineado con ninguna de ellas. Por tanto, la relación es válida:

1.º Tanto si las ternas PAB , MBC y NCA están en una misma recta como si no, y en este último caso;

2.º Tanto si V es coplanario con el triángulo ABC como si no.

Pero si V no es coplanario con ABC , la igualdad [4] puede expresarse así:

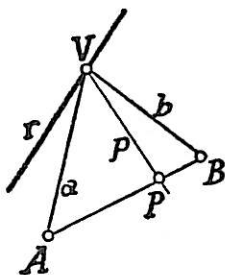
El producto de tres razones simples en cadena formadas con tres
 { vértices de un triángulo } y tres { puntos } situados en sus { lados }
 { aristas de un triedro } { rayos } { caras } es igual a
 la que se obtiene con los elementos que resultan de { proyectar }
 { desde un punto no coplanario } { cortar } { aquéllos }
 { por un plano no concurrente }

En una palabra, el producto de tres razones en cadena [4] es un invariante proyectivo de las formas planas o radiadas, es decir, un valor que se conserva al proyectarlas o cortarlas sucesivamente. Le llamaremos invariante de 2.ª categoría y su consideración nos será muy útil en la próxima lección.

Asimismo, el producto de razones en cuestión es igual al que resulta con las razones simples de los senos de los diedros obtenidos proyectando las ternas de puntos desde una recta r no concurrente con sus bases. Es decir:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{\text{sen } PrA}{\text{sen } PrC} \cdot \frac{\text{sen } MrB}{\text{sen } MrC} \cdot \frac{\text{sen } NrC}{\text{sen } NrA} \quad [4']$$

Para demostrarlo basta, en efecto, relacionar estas razones de senos con las de los rayos proyectantes $apbmcna$ desde un punto V tomado en r . Aplicando el teorema de los senos a los triedros par , pbr , resulta



$$\text{sen } pa = \frac{\text{sen } pra}{\text{sen } rpa} \text{sen } ra, \quad \text{sen } pb = \frac{\text{sen } prb}{\text{sen } rpb} \text{sen } rb$$

pero por ser $\text{sen } rpa = \text{sen } rpb$, al dividir se obtiene

$$\frac{\text{sen } pa}{\text{sen } pb} = \frac{\text{sen } pra}{\text{sen } prb} \cdot \frac{\text{sen } ra}{\text{sen } rb}$$

y análogamente

$$\frac{\text{sen } mb}{\text{sen } mc} = \frac{\text{sen } mrb}{\text{sen } mrc} \cdot \frac{\text{sen } rb}{\text{sen } rc}, \quad \frac{\text{sen } nc}{\text{sen } na} = \frac{\text{sen } nrc}{\text{sen } nra} \cdot \frac{\text{sen } rc}{\text{sen } ra}$$

y multiplicándolas

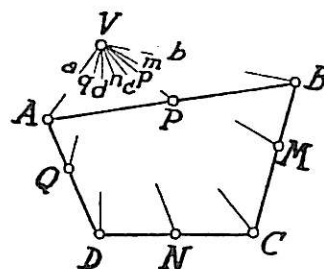
$$\frac{\text{sen } pa}{\text{sen } pb} \cdot \frac{\text{sen } mb}{\text{sen } mc} \cdot \frac{\text{sen } nc}{\text{sen } na} = \frac{\text{sen } pra}{\text{sen } prb} \cdot \frac{\text{sen } mrb}{\text{sen } mrc} \cdot \frac{\text{sen } nrc}{\text{sen } nra} \quad [4'']$$

que combinada con [4] da [4].

10. **Invariantes métricos en formas de tercera categoría.**—Aplicando la misma idea a cuatro ternas, proyectando desde V no alineado con ellas, o desde r no concurrente con sus bases obtenemos

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \frac{QD}{QA} = \frac{\text{sen } PVA}{\text{sen } PVB} \cdot \frac{\text{sen } MVB}{\text{sen } MVC} \cdot \frac{\text{sen } NVC}{\text{sen } NVD} \cdot \frac{\text{sen } QVD}{\text{sen } QVA}$$

$$= \frac{\text{sen } PrA}{\text{sen } PrB} \cdot \frac{\text{sen } MrB}{\text{sen } MrC} \cdot \frac{\text{sen } NrC}{\text{sen } NrD} \cdot \frac{\text{sen } QrD}{\text{sen } QrA}$$



relación válida tanto si las ternas están alineadas, son coplanarias, como si no. En este último caso, $ABCD$ es cuadrilátero alabeado y obtenemos un invariante que podemos llamar de *tercera categoría*.

Dejamos al lector la generalización de este invariante para ternas en cadena situadas en polígonos planos o en alabeados. La demostración es idéntica.

EJERCICIOS

1. ¿Cuántas razones dobles se pueden formar con cuatro puntos de una serie o con cuatro rayos o planos de un haz permutándolos, y cuántas de ellas son distintas? Téngase en cuenta las relaciones establecidas en el § 6.

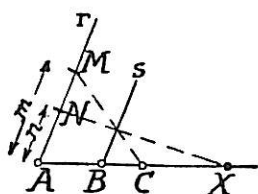
2. Dados en una recta los puntos A , de abscisa $x_1 = -1$; B , de abscisa $x_2 = 2$; C ($x_3 = -4$) y D ($x_4 = 1$), calcúlense los valores de las distintas razones dobles entre los cuatro puntos.

3. Compruébese que la razón doble $(ABCD)$ vale, en general, $\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$.

4. Demostrar que la razón doble de cuatro puntos $(ABCD)$ es igual a

$$\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AD} \right) : \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} \right)$$

5. Demostrar que si $ABCD$ es una cuaterna armónica, es decir, si $(ABCD) = -1$, se verifica $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$; o sea, que AB es media armónica entre AC y AD . (Compárese con la demostración gráfica dada en el Tomo I, lección 25, § 1.)



6. Demostrar que la razón doble de cuatro rayos $(abcd)$ es igual a $(\cot ab - \cot ad) : (\cot ab - \cot ac)$.

7. Demuéstrese la validez de la adjunta construcción para hallar el punto X que forme con tres puntos dados A, B, C una razón doble dada $(ABCX) = m : n$. (Las rectas r y s son paralelas.)

8. Demostrar que si $(ABCD) = (x_1 x_2 x_3 x_4) = -1$ (cuaterna armónica) se verifica $2(x_1 x_2 + x_3 x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$.

9. Dedúzcase, de la relación anterior, que si M es el punto medio de AB se verifica $MA^2 = MC \cdot MD$. (Considérese el origen en el punto M .)

10. Demostrar que el producto de las razones simples de tres ternas de rayos coplanarios en cadena $(apb)(bmc)(cna)$ es igual al producto de las razones simples $(APB)(BMC)(CNA)$ de las ternas de puntos que resultan de cortar aquéllas por una recta (que no pase por ninguno de sus vértices.) (Aplíquese a la terna apb y su sección APB la relación [1] del § 9, sustituyendo $VA:VB$ por $\text{sen } VBA:\text{sen } VAB$, y análogamente en las demás.)

11. Generalizar el teorema anterior a n ternas.

12. Demostrar análogamente que el producto de las razones simples de varias ternas de planos en cadena $(a\pi\beta)(\beta\mu\gamma)(\gamma\nu\delta) \dots (\phi\lambda\alpha)$ es igual al producto de las razones simples de rayos $(apb)(bmc)(cnd) \dots (fla)$ o de puntos $(APB)(BMC)(CND) \dots (FLA)$ que resultan de cortar aquellos haces por un plano o por una recta, respectivamente.

LECCION 15.—VALORES PARTICULARES DE LOS INVARIANTES MÉTRICO-PROYECTIVOS.
TEOREMAS DE CEVA Y MENELAO. CUATERNAS ARMÓNICAS

1. **Teorema de Ceva.**—Sea ABC un triángulo, unamos sus vértices con un punto D de su plano *no situado en ningún lado* y sean M , N y P las intersecciones de los lados BC , CA , AB , con las rectas que unen los vértices opuestos con D . Apliquemos al invariante de segunda categoría definido por los seis puntos $APBMCN$ la relación [4], § 9 de la lección anterior, tomando como vértice V el punto D ; resulta :

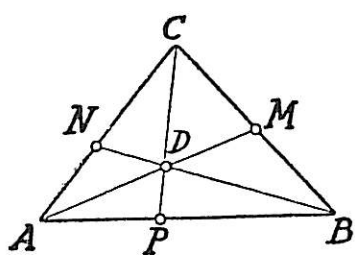


Fig. 1

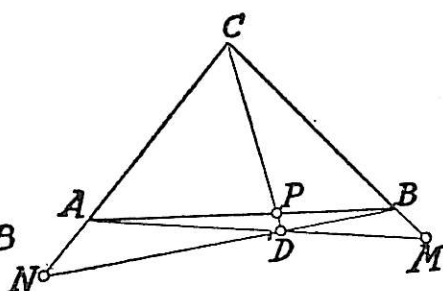


Fig. 2

$$v = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{\text{sen } PDA}{\text{sen } PDB} \cdot \frac{\text{sen } MDB}{\text{sen } MDC} \cdot \frac{\text{sen } NDC}{\text{sen } NDA} = -1$$

por ser

$$\sphericalangle PDA = -\sphericalangle MDC, \quad \sphericalangle MDB = -\sphericalangle NDA, \quad \sphericalangle NDC = -\sphericalangle PDB \quad (\text{fig. 1})$$

o bien

$$\sphericalangle PDA = 180^\circ - \sphericalangle MDC, \quad \sphericalangle MDB = -\sphericalangle NDA, \quad \sphericalangle NDC = 180^\circ - \sphericalangle PDB \quad (\text{fig. 2})$$

y análogamente para otras posiciones de D .

Y como, recíprocamente, dados M y N no hay más que un punto P sobre AB que dé para v el valor -1 (§ 3, lección anterior), queda así demostrado el

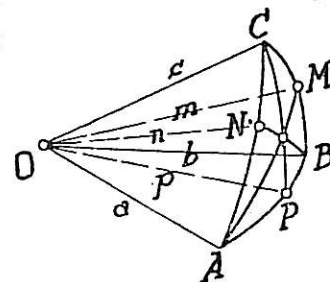
TEOREMA DE CEVA.—*La condición necesaria y suficiente para que sean concurrentes las rectas que unen los vértices A , B , C de un triángulo respectivamente con tres puntos M , N , P situados en los lados opuestos, es que el producto de las tres razones simples en cadena $(PAB) \cdot (MBC) \cdot (NCA)$ valga -1 .*

$$\boxed{\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1} \quad [1]$$

Si ahora proyectamos los seis puntos A , P , B , M , C , N desde un punto V situado fuera de su plano, obtendremos seis rectas de una radiación a , p , b , m , c , n cuyo invariante $\frac{\text{sen } pa}{\text{sen } pb} \cdot \frac{\text{sen } mb}{\text{sen } mc} \cdot \frac{\text{sen } nc}{\text{sen } na}$ es igual al anterior en virtud de § 9, lección anterior, y resulta :

La condición necesaria y suficiente para que concurran en una recta los planos que unen las aristas a, b, c de un triedro con los rayos m, n, p respectivamente situados en las caras opuestas, es que se verifique

$$\frac{\text{sen } pa}{\text{sen } pb} \cdot \frac{\text{sen } mb}{\text{sen } mc} \cdot \frac{\text{sen } nc}{\text{sen } na} = -1$$



O lo que es lo mismo (cortando la radiación por una superficie esférica): El teorema de Ceva es válido en la Geometría esférica sustituyendo el concepto recta por circunferencia máxima y los segmentos por los senos de las distancias esféricas.

NOTA.—Las rectas AM, BN, CP se llaman *cevianas* y se puede traducir la condición de Ceva mediante los ángulos que éstas forman con los lados. En efecto, recordando § 4, fórmula [2], lección anterior, podemos escribir

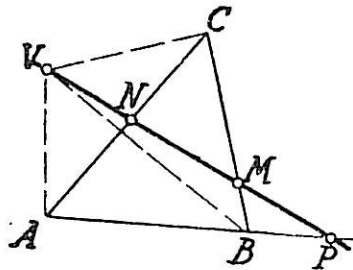
$$\frac{PA}{PB} = \frac{\text{sen } PCA}{\text{sen } PCB} \cdot \frac{CA}{CB}, \quad \frac{MB}{MC} = \frac{\text{sen } MAB}{\text{sen } MAC} \cdot \frac{AB}{AC}, \quad \frac{NC}{NA} = \frac{\text{sen } NBC}{\text{sen } NBA} \cdot \frac{BC}{BA}$$

y multiplicando (*) queda

$$\frac{\text{sen } PCA}{\text{sen } PCB} \cdot \frac{\text{sen } MAB}{\text{sen } MAC} \cdot \frac{\text{sen } NBC}{\text{sen } NBA} = -1 \quad [1']$$

Recíprocamente: Si tres rectas AM, BN y CP cumplen esta condición son *cevianas*, es decir, concurren en un punto, pues hallados con las dos primeras los puntos M y N no hay más que un punto P en el lado BC que cumpla la primera relación.

2. Teorema de Menelao.—Supongamos los puntos M, N, P en línea recta y tomemos como vértice V de proyección un punto de dicha recta distinto de M, N, P (situado, por ejemplo, fuera de los segmentos propios determinados por dichos puntos) Aplicando § 9, lección anterior, se tendrá:



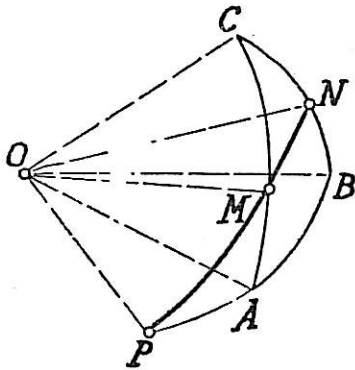
$$\begin{aligned} v &= \frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \\ &= \frac{\text{sen } PVA}{\text{sen } PVB} \cdot \frac{\text{sen } MVB}{\text{sen } MVC} \cdot \frac{\text{sen } NVC}{\text{sen } NVA} = +1 \end{aligned}$$

por reducirse cada denominador con el numerador siguiente.

Y como, recíprocamente, dados M y N no hay más que un punto P en el lado AB que dé para v el valor $+1$, queda demostrado el

(*) Téngase en cuenta que los segundos factores son razones absolutas (sin signo).

TEOREMA DE MENELAO.—*La condición necesaria y suficiente para que estén alineados los puntos M, N, P respectivamente situados en las rectas de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC es que el producto de las tres razones en cadena (PAB) · (MBC) · (NCA) valga +1*



$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = +1 \quad [3]$$

Y proyectando ahora desde un nuevo vértice V exterior al plano y aplicando la relación § 9, lección anterior, resulta el teorema análogo en la radiación, que el lector enunciará fácilmente, o su equivalente en la Geometría esférica :

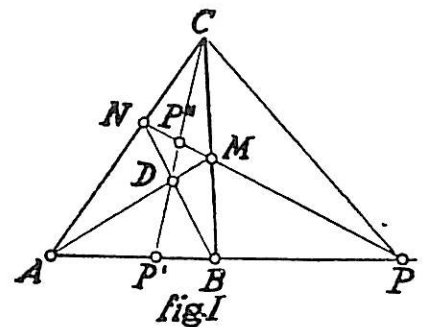
El teorema de Menelao se cumple, pues, en la Geometría esférica sustituyendo el concepto recta por circunferencia máxima y los segmentos por los senos de las distancias esféricas correspondientes ().*

3. Obtención de cuaternas armónicas con el simple uso de la regla.— Los teoremas de Menelao y de Ceva nos van a proporcionar una elegante construcción de cuaternas armónicas.

Dados M, N en las rectas de los lados CA y CB del triángulo ABC hallemos en la recta AB:

1.º El punto P (intersección de MN con AB) que cumple con M y N el teorema de Menelao

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = +1$$



2.º El punto P', que cumpla con los mismos M y N el teorema de Ceva (para lo cual basta proyectar desde C la intersección D de AM y BN)

$$\frac{P' A}{P' B} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1$$

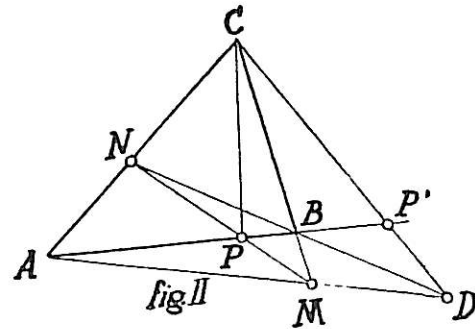
De ambas relaciones resulta

$$\frac{PA}{PB} = - \frac{P' A}{P' B}$$

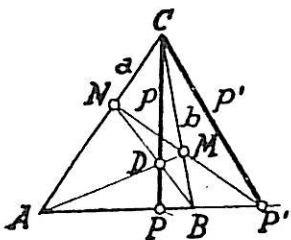
Es decir, los puntos P y P' están armónicamente separados por A y B.

(*) Precisamente para triángulos esféricos fué demostrado por Menelao.

Dados A y B se desprende así una construcción del punto P' armónicamente separado de otro P respecto de AB . Basta trazar por P una secante (transversal) al triángulo en M y N y hallar el punto P' por medio del punto D de intersección de AM y BN . La construcción es aplicable tanto si P es exterior como interior (figura II). Es también reversible, es decir, se puede partir de P' tomando D sobre $P'C$, determinando M , N y luego P .



Estas construcciones del conjugado armónico tienen la ventaja sobre las ya conocidas del lector por el tomo I (págs. 115, 143, 149) de no requerir más instrumento que la regla.



Se pueden aplicar para hallar el rayo p' separado armónicamente de otro p respecto de dos rayos a , b de un haz, sin más que aplicar la construcción anterior a una sección cualquiera ABP del haz (figura).

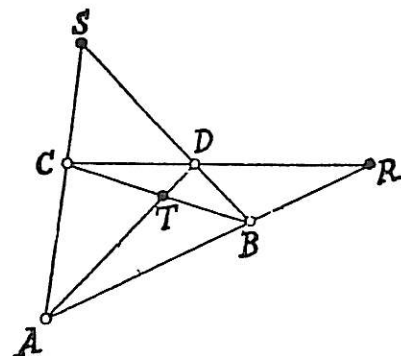
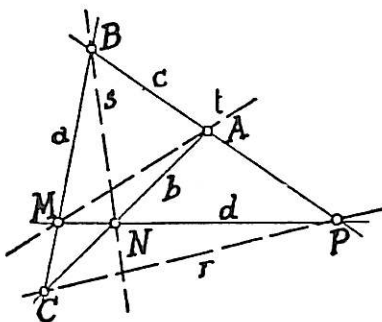
4. Cuadrilátero completo y cuadrivértice.—En el párrafo anterior hemos combinado los teoremas de Menelao y de Ceva, es decir las figuras formadas por un triángulo y una transversal o por un triángulo y un punto.

Dar tres rectas a , b , c que forman un triángulo y una cuarta d que no pasa por ninguno de sus vértices (transversal), es dar cuatro rectas no concurrentes tres a tres, y la figura que forman se llama *cuadrilátero completo*.

Sea el cuadrilátero definido por las cuatro rectas a , b , c , d , que llama-

Dar tres vértices de un triángulo ABC y un cuarto punto D no situado en ninguno de sus lados (punto de Ceva) es dar cuatro puntos no alineados tres a tres y se dice que forman un *cuadrivértice*.

Sea el cuadrivértice definido por los cuatro puntos $ABCD$ que llama-



remos *lados*. Los seis puntos de intersección de estos lados, dos a dos, se llaman *vértices* del cuadrilátero. Llámense *opuestos* dos vértices no situados en un mismo lado.

remos *vértices*. Las seis rectas de unión de los vértices dos a dos se llaman *lados* del cuadrivértice. Llámense *opuestos* dos lados no concurrentes en un mismo vértice. Son

Son opuestos ab y cd , ac y bd , bc y ad .

Las tres rectas r , s , t , que unen los pares de vértices opuestos se llaman *diagonales* del cuadrilátero.

Un cuadrilátero tiene, pues, en resumen, *cuatro lados, seis vértices y tres diagonales*.

Las figuras de las construcciones del párrafo anterior pueden traducirse en los siguientes teoremas:

En un cuadrilátero completo MACBN (fig. 1, § 3) los vértices A y B de una diagonal están armónicamente separados por los puntos P, P' de intersección de dicha diagonal con las otras dos.

opuestos AB y CD , AC y BD , BC y AD .

Los puntos R , S , T de intersección de los tres pares de lados opuestos se llaman *puntos diagonales* del cuadrivértice.

Un cuadrivértice tiene, pues, en resumen, *cuatro vértices, seis lados y tres puntos diagonales*.

En un cuadrivértice ABMN los lados AN, BM que pasan por un punto diagonal C están armónicamente separados por las rectas CD y CP que unen C con los otros dos puntos diagonales D y P

Se puede dar de estos teoremas una demostración directa del siguiente modo:

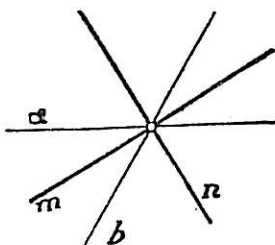
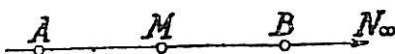
Demostremos el teorema de la izquierda. Proyectando la cuaterna $ABP'P$ desde el vértice D del cuadrilátero sobre la otra diagonal MN resulta $MNP'P$ y proyectando esta cuaterna desde el vértice C nuevamente sobre AB resulta $BAP'P$. Como en todas estas operaciones se ha conservado la razón doble de la cuaterna, resulta (§ 6, lec. anterior)

$$\mu = (ABP'P) = (BAP'P) = (ABPP') = \frac{1}{\mu}$$

de donde $\mu^2 = 1$ y como μ no puede valer $+1$ por no ocurrir tal cosa más que cuando coinciden los dos primeros puntos (§ 7, lec. anterior) resulta, en definitiva, $\mu = -1$, lo que prueba que A, B están armónicamente separados por PP' .

El teorema de la derecha se demuestra correlativamente.

5. Aplicaciones métricas de la cuaterna armónica.—1. La cuaterna

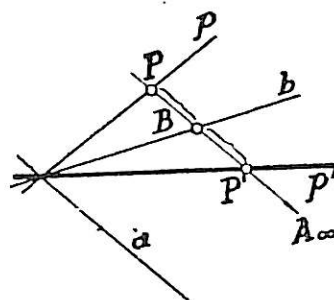


armónica más sencilla en la recta es la constituida por los extremos AB de un segmento, el punto medio M y el punto impropio N , y en el haz, la formada por dos rayos a , b y las bisectrices m , n de los ángulos que determinan (puesto que cumplen $\text{sen } ma : \text{sen } mb = -\text{sen } na : \text{sen } nb$.) con lo que recaemos en las construcciones de cuaternas armónicas, dadas en el tomo I.

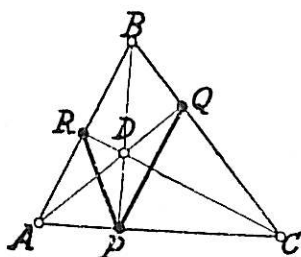
Recíprocamente: Si dos rayos m , n están armó-

nicamente separados por otros dos a , b y son perpendiculares entre sí, son sus bisectrices.

Si se dispone de un juego de escuadras, para trazar cómodamente paralelas (y además de un portasegmentos), la construcción más rápida para hallar el rayo conjugado armónico de uno dado p respecto de otros dos a , b es la que indica la figura, fundada en ser $pbp'a$ proyección de $PBP'A_\infty$ con $PB=BP'$.

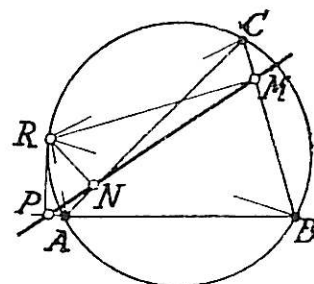


II. Aplicando la propiedad del cuadrivértice (teorema de la derecha del párrafo anterior) al cuadrivértice determinado por los vértices de un triángulo y su ortocentro, en el que los puntos diagonales son los pies de las alturas, resulta la propiedad: *Las alturas de un triángulo son bisectrices de su triángulo órtico* (ya demostrada en Tomo I, lección 16, § 5, con otros recursos).



6. Aplicaciones métricas de los teoremas de Menelao y de Ceva.—

I. RECTA DE SIMSON.—Proyectando desde un punto R de la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC las ternas en cadena (MBC) (NCA) (PAB) determinadas por los pies MNP de las perpendiculares desde R a los lados resulta (§ 9, lec. 14).



$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{\text{sen } PRA}{\text{sen } PRB} \cdot \frac{\text{sen } MRB}{\text{sen } MRC} \cdot \frac{\text{sen } NRC}{\text{sen } NRA} = 1$$

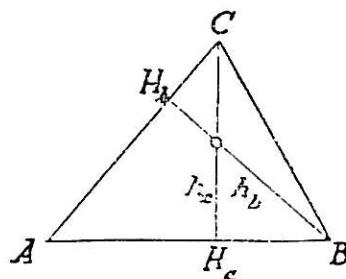
(En efecto (v. figura) $\sphericalangle MRP = \sphericalangle CRA$ por suplementarios de $\sphericalangle B$, de donde $\sphericalangle PRA = \sphericalangle MRC$, y análogamente $\sphericalangle MRB = \sphericalangle NRA$, $\sphericalangle NRC = \sphericalangle PRB$). La propiedad de estar los puntos MNP alineados (Recta de Simson) aparece así, como consecuencia del teorema de Menelao.

II. BARICENTRO.—Si MNP son los puntos medios de AB , BC , CA , se verifica, evidentemente, la relación de Ceva $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1$ por valer cada una de las razones -1 . Luego: *Las tres medianas son concurrentes*.

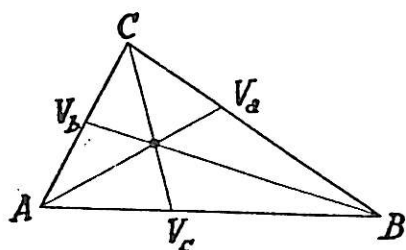
III. ORTOCENTRO.—De la semejanza de los triángulos rectángulos interceptados en el ángulo A por las alturas h_b , h_c resulta en valor absoluto

$$\begin{aligned} H_c A : H_b A &= AC : AB && \text{y análogamente.} \\ H_a B : H_c B &= BA : BC \\ H_b C : H_a C &= CB : CA \end{aligned}$$

Multiplicándolas y teniendo en cuenta los signos, resulta la relación de Ceva, que demuestra que: *Las tres alturas son concurrentes*.



IV. INCENTROS Y EXICENTROS.—Análogamente, del hecho de ser los segmentos determinados por la bisectriz de cada ángulo sobre el lado opuesto proporcionales a los lados que lo forman, se desprende (en valor absoluto):



$$\frac{V_a B}{V_a C} \cdot \frac{V_b C}{V_b A} \cdot \frac{V_c A}{V_c B} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}$$

y teniendo en cuenta los signos, resulta verificada la relación de Ceva. Lo que prueba la existencia del incentro, y análogamente para los exicentros.

7. Obtención de puntos y rectas notables de un triángulo a partir de otros.—Conociendo tres puntos MNP sobre los lados de un triángulo ABC que cumplan la condición de Ceva $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1$ y hallado, por tanto, el punto Γ de concurso de las cevianas AM, BN, CP , podemos hallar otros:

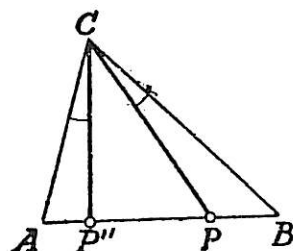
1.º Sustituyendo MNP por sus simétricos $M_1N_1P_1$ respecto de los puntos medios de los lados respectivos. En efecto, esto no hace más que invertir las tres razones que cumplen la relación de Ceva.

Los puntos $M_1N_1P_1$ se llaman isotómicos de M, N, P , las cevianas AM_1, BN_1, CP_1 , isotómicas de AM, BN, CP . El punto Γ_1 obtenido con ellas se llama recíproco de Γ .

2.º Sustituyendo las cevianas AM, BN, CP por sus isogonales AM'', BN'', CP'' (v. Tomo I, lec. 24, § 4).

En efecto, basta ver que se cumple la relación (v. nota del § 1)

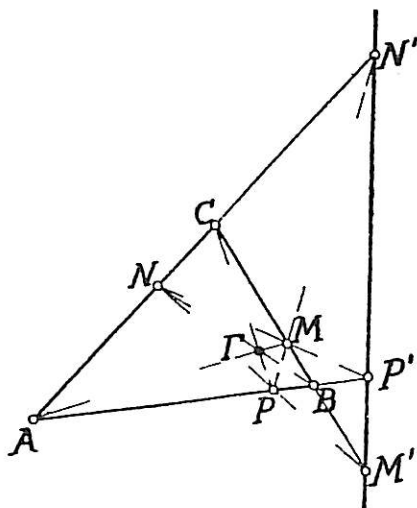
$$\frac{\text{sen } P'' CA}{\text{sen } P'' CB} \cdot \frac{\text{sen } M'' AB}{\text{sen } M'' AC} \cdot \frac{\text{sen } N'' BC}{\text{sen } N'' BA} = -1$$



por tener invertidas las razones respecto de la [1] del mencionado párrafo ($\sphericalangle P''CA = \sphericalangle PCB, \sphericalangle P''CB = \sphericalangle PCA$, etc.).

El nuevo punto Γ'' así obtenido se llama inverso o conjugado isogonal del Γ .

3.º Sustituyendo dos de los tres puntos M, N, P por sus conjugados armónicos respecto de los extremos de los lados en que se hallan, no se altera el valor del producto de razones, ya que se transforman dos de ellas en otras de igual valor y opuesto signo. Al punto Γ pueden hacerse corresponder así otros tres.



4.º Sustituyendo uno sólo de los tres puntos M, N, P por su conjugado armónico, se obtendrán tres puntos de una transversal (Menelao), por análoga razón.

8. Polo y polar respecto de un triángulo.—Análogamente a lo anterior, resulta:

Sustituyendo los tres puntos MNP por sus conjugados armónicos respecto de los vértices del triángulo, se obtienen tres puntos $M'N'P'$ de una recta llamada polar de Γ respecto del triángulo. Para hallar P' , por ejemplo, basta cortar AB por MN (§ 4), y análogamente los demás.

Recíprocamente: Los conjugados armónicos MNP de tres puntos $M'N'P'$ de una transversal cumplen la condición de Ceva determinando un punto Γ llamado polo de dicha transversal.

9. **Aplicaciones. Puntos de Gergonne, Nagel, Lemoine. Eje órtico y antiórtico.**—He aquí algunos ejemplos de aplicación de lo dicho en los párrafos anteriores:

I. Si M, N, P son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita, se verifica

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1$$

por ser en valor absoluto $PA=NA, MB=PB, NC=MC$.

Por tanto: *Las rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos de contacto de los lados opuestos con la circunferencia inscrita concurren en un punto, llamado punto de Gergonne.*

II. Los puntos M_1, N_1, P_1 de contacto de las circunferencias exinscritas son los isotómicos de M, N, P (pues, por ejemplo, $AN=CN_1=p-a$) (§ 7, lec. 24, Tomo I). Las cevianas AM_1, BN_1, CP_1 concurren en el *punto de Nagel* recíproco del de Gergonne.

III. *El circuncentro y el ortocentro son inversos entre sí.* Pues cada altura es isogonal del diámetro de la circunferencia circunscrita que pasa por su vértice. (Demuéstrese.)

IV. Las isogonales de las medianas (llamadas *simedianas*) concurren en un punto llamado *punto de Lemoine*, que es, por tanto, *el inverso del baricentro*.

V. La polar del baricentro respecto del triángulo, es la recta impropia.

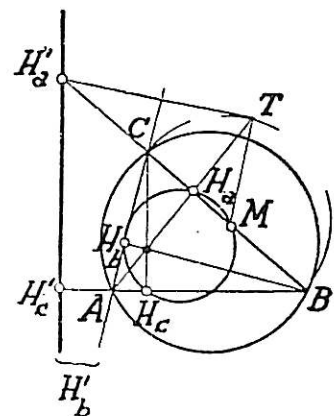
VI. *La polar del ortocentro es la recta llamada eje órtico y coincide con el eje radical de la circunferencia circunscrita y de la de Feuerbach, siendo, por tanto, perpendicular a la recta de Euler del triángulo* (lec. 21, § 4, Tomo I).

Basta ver que el punto H'_a armónicamente separado del H_a verifica (fig.) (CTB semicircunferencia de centro M)

$$\overline{H'_a H_a} \cdot \overline{H'_a M} = \overline{H'_a T}^2 = \overline{H'_a C} \cdot \overline{H'_a B}$$

es decir, H'_a tiene la misma potencia respecto de la circunferencia circunscrita y la de Feuerbach. Y análogamente H'_b, H'_c .

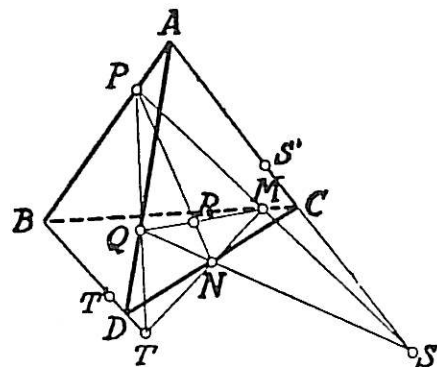
VII. La polar del incentro es la recta que pasa por los pies de las bisectrices exteriores (basta aplicar la definición). Se llama *eje antiórtico*.



VIII. La polar del punto de Lemoine respecto del triángulo se llama *recta de Lemoine* y coincide con la polar respecto del círculo circunscrito al triángulo. (Demuéstrese probando que las tangentes en los vértices del triángulo son las armónicamente separadas de las simedianas respecto de los lados del triángulo.)

Damos por terminada aquí esta breve enumeración de puntos y rectas notables. El lector que sienta curiosidad por la *Geometría del triángulo*, puede consultar el apéndice sobre dicho tema en la *Geometría de Rouché Comberouse*. Tomo I (*).

10. **Teorema análogo a los de Menelao y de Ceva en el cuadrilátero alabeado. Aplicación al tetraedro.**—Si $ABCD$ es un cuadrilátero alabeado formado por dos pares de aristas opuestas de un tetraedro y son $PMNQ$ las intersecciones de las rectas de sus lados AB, BC, CD, DA con un plano π , las rectas PN y QM se cortan en un punto R en el que concurren los cuatro planos ABN, BCQ, CDP y DAM , puesto que cada uno de ellos contiene una de las rectas PN o QM .



Proyectando las ternas en cadena PAB, MBC, NCD, QDA desde una recta r de π , aplicando [4], § 9, lección 14, y teniendo en cuenta la igualdad

(*) También encontrará un catálogo de propiedades en la *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, de Berzolari, Vol. II, Art. XXIV, por cierto con el error de atribuir al punto de Lemoine la propiedad de ser recíproco del circuncentro.

de los senos de los diedros $PrA = QrA$, $MrB = PrB$, etc., resulta fácilmente $\frac{PA \cdot MB \cdot NC \cdot QD}{PB \cdot MC \cdot ND \cdot QA} = 1$

y como, recíprocamente, dados tres puntos P , M , N en AB , BC , CD no hay más que un punto Q en AD que dé para $QD:QA$ el valor necesario para cumplir esta relación, *ésta es la condición necesaria y suficiente para que sean coplanarios los puntos P , Q , M , N y al mismo tiempo concurrentes los planos que unen cada lado con el punto situado en el lado opuesto.*

Considerando otro par de aristas opuestas AC y BD del tetraedro $ABCD$, se desprende de lo anterior que los puntos S , T de intersección del plano π con las dos nuevas aristas verifican con PN o QM condición idéntica. Por ejemplo, $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{TB}{TD} \cdot \frac{ND}{NC} \cdot \frac{SC}{SA} = +1$.

Los seis puntos $M'N'P'Q'S'T'$ armónicamente separados de $MNPQST$ respecto de los vértices del tetraedro verifican condiciones análogas.

Por estar MNT alineados (en la intersección de π con el plano BCD), el punto T' cumple con M y N la condición de Ceva. Por tanto, $T'C$ concurre con BN y DM y proyectando desde A resulta: Los tres planos ABN , ADM , ACT' concurren en la recta AR , la cual corta al plano BCD según el punto de Ceva correspondiente a MNT' . El punto R aparece así como punto de concurso de seis planos: ABN , ADM , DCP , BCQ , ACT' y BDS' .

Aplicación: Si $PQMN$ son los puntos medios de las aristas correspondientes, T y S son impropios, T' y S' son puntos medios de BD y AC , y R es el baricentro del tetraedro.

Dejamos a la iniciativa del lector hallar en el tetraedro los puntos análogos al incentro y exincentro, al punto de Gergonne, etc. El ortocentro sólo existe para tetraedros particulares llamados *ortocéntricos* (*).

11. Teorema de Carnot.—Si en lugar de un cuadrilátero consideramos un polígono plano alabeado y las secciones de las rectas de sus lados por otra recta o por un plano secante, se demuestra análogamente a §§ 2 y 10 que

El producto de las razones simples en cadena de las ternas formadas por los vértices de cada lado de un polígono plano o alabeado y sus intersecciones con una recta o con un plano vale la unidad.

12. Nota recapitulación.—El producto de dos razones en cadena $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MA}$ para cuatro puntos de una serie, y su equivalente en el haz, es la razón doble $(PMAB)$ y es el invariante métrico proyectivo más sencillo en formas de primera categoría. Sobre él edificó Chasles su teoría de la proyectividad.

El producto de tres razones en cadena $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA}$ y su equivalente en la radiación es, análogamente, un invariante métrico elemental en formas de segunda categoría, que nos ha permitido dar unidad a toda la llamada «Teoría de transversales», y cuyo fundamental interés parece no haber sido notado antes de ahora (**).

Los teoremas de Ceva y de Menelao, tanto en el plano como en la radiación, resultan al dar los valores $+1$ y -1 a dicho invariante, del mismo modo que la cuaterna armónica se obtiene al dar el valor -1 a la razón doble. Las propiedades del cuadrivértice, resultan finalmente, de la combinación de los teoremas de Ceva y Menelao.

(*) Para la «Geometría del tetraedro» puede consultar las mismas obras indicadas para la del triángulo.

(**) La génesis de dicho invariante y su generalización nos ha sido sugerida espontáneamente tal como queda expuesto en los §§ 9 y 10 de la lección anterior. Sin embargo, con objeto de no blasonar de inciertas prioridades en campo tan trillado, hemos consultado el venerable «Traité de Géométrie Supérieure» (1880) de Chasles y en él aparece, perdida entre innumerables propiedades, una relación (§ 407) análoga a las [4] y [5] de los §§ 9 y 10 aludidos, para un polígono plano y el punto V situado en su plano. Demuestra luego (§ 409), y esto ya es más interesante, que en otro polígono perspectivo se conserva el mismo valor. Faltaba sólo relacionar dicho valor con el correspondiente a una radiación proyectante para obtener el carácter invariante general y ver que subsiste para polígonos alabeados. Por lo mismo, las demostraciones que Chasles da de las propiedades aludidas no tienen la sencillez de las nuestras.

Generalizando la idea pueden hallarse invariantes métrico-proyectivos de 3, 4, ... n razones formando ternas alabeadas en cadena en espacios de 3, 4, ... n dimensiones. Los productos de estas razones serán igualmente invariantes respecto de las colineaciones en dichos espacios. Los valores particulares de estos invariantes darán lugar a teoremas análogos a los de Menelao y de Ceva, como hemos visto para el tetraedro, y para un polígono cualquiera. (Teorema de Carnot).

Toda la teoría de transversales se halla así condensada en la fórmula [4] del § 9 de la lección anterior.

EJERCICIOS

1. Si dos transversales cortan a los lados de un triángulo ABC en los puntos M, N, P y M', N', P' , respectivamente, se verifica $(BCMM')(CANN')(ABPP')=1$.

2. Generalícese la propiedad anterior a un polígono.

3. Demostrar que las bisectrices exteriores de un triángulo cortan a los lados opuestos en tres puntos alineados. Idem íd. dos bisectrices interiores y una exterior.

4. Demostrar que si M, N, P son tres puntos de una transversal situados en los lados BC, CA, AB de un triángulo, se verifica

$$\frac{\text{sen } PCA}{\text{sen } PCB} \cdot \frac{\text{sen } MAB}{\text{sen } MAC} \cdot \frac{\text{sen } NBC}{\text{sen } NBA} = +1$$

5. Demostrar, aplicando la propiedad anterior, que las tangentes a la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC en sus vértices, cortan a los lados opuestos en tres puntos alineados. (Más adelante se demostrará esta misma propiedad fundándonos en otras consideraciones.) (V. lec. 19.)

6. Las mediatrices de las bisectrices de un triángulo cortan a los lados correspondientes (opuestos a los vértices de que parten) en tres puntos alineados.

7. Demostrar que en la figura del § 1 de esta lección se verifica $(DAM)=(PAB)+(NAC)$.

8. Demostrar que los puntos medios de los segmentos de diagonales de un cuadrilátero completo, limitados por los vértices del mismo, están alineados.

9. Si desde un punto P se trazan las rectas PA, PB, PC que le unen a los vértices de un triángulo coplanario ABC , las perpendiculares a ellas por P cortan a los lados opuestos en tres puntos alineados.

10. Si P es un punto del plano de un triángulo y p y q son las rectas armónicamente separadas de AP y BP respecto de los lados que pasan, respectivamente, por A y B , el punto Q de intersección de dichas rectas está alineado con C y P .

11. Si P es un punto del plano de un triángulo ABC y trazamos las bisectrices w, u, v de los triángulos APB, BPC, CPA , así como sus perpendiculares w', u', v' , se verifica:

I. Los puntos de intersección ua, vb, wc , cumplen la condición de Ceva, es decir, unidos respectivamente con A, B, C se obtienen rectas concurrentes. Idéntica propiedad tienen los puntos $u'a, v'b, w'c$; así como $ua, v'b, w'c$, y también $u'a, vb, w'c$.

II. Los tres puntos $u'a, v'b, w'c$ están alineados. También lo están los tres puntos $ua, vb, w'c$, así como $ua, v'b, wc$, y también $u'a, vb, wc$.

12. Las bisectrices de los ángulos bajo los cuales se ven desde un punto fijo los lados de un polígono plano o alabeado de n lados $ABC \dots$ cortan a dichos lados en puntos $MNP \dots$ que verifican la relación $(MAB) \cdot (NBC) \dots = (-1)^n$.

13. Si $MNPQ$ son puntos de los lados de un cuadrilátero plano $ABCD$ que verifican $(MAB)(NBC)(PCD)(QDA)=1$, los lados opuestos del cuadrilátero $MNPQ$ se cortan en las diagonales de $ABCD$.

14. Si por los vértices de un cuadrilátero $ABCD$ se trazan rectas $abcd$ tales que cumplan la condición

$$\frac{\text{sen } a AD}{\text{sen } b AB} \cdot \frac{\text{sen } b BA}{\text{sen } b BC} \cdot \frac{\text{sen } c CB}{\text{sen } c CD} \cdot \frac{\text{sen } d DC}{\text{sen } d DA} = 1$$

las diagonales del cuadrilátero de lados $abcd$ pasan por los puntos de concurso de los lados opuestos de $ABCD$. Aplicación a las bisectrices interiores y exteriores.

Capítulo V.—PROYECTIVIDAD ENTRE FIGURAS DE PRIMERA CATEGORÍA

LECCIÓN 16.—LA PROYECTIVIDAD, SEGÚN CHASLES Y SEGÚN STAUDT. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROYECTIVIDAD

1. Definición de proyectividad según Chasles.—Hemos visto en la lección 14 que al deducir unas formas de primera categoría de otras por proyecciones y secciones, se conserva invariable la *razón doble* de cuatro elementos cualesquiera. Esta propiedad métrica fué adoptada por Chasles como definición de proyectividad.

Dos formas de primera categoría son proyectivas, según Chasles, cuando se corresponden elemento a elemento de tal modo que la razón doble de cuatro elementos cualesquiera, tomados en una forma, es igual a la razón doble de sus homólogos en la otra ()*.

Si, por ejemplo, los elementos A, B, C, D, E, \dots de una serie son respectivamente homólogos de los de otra proyectiva con ella $A', B', C', D', E', \dots$ escribiremos:

$$ABCDE \dots \bar{\wedge} A' B' C' D' E' \dots$$

y ello significa que son iguales todos los pares de razones dobles de cuaternas homólogas

$$(ABCD) = (A'B'C'D'), \quad (ABCE) = (A'B'C'E'), \dots$$

Análogamente, si la serie $ABCDE \dots$ es proyectiva con el haz de rectas $abcde \dots$ y con el haz de planos $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon \dots$ escribiremos

$$ABCDE \dots \bar{\wedge} abcde \dots \bar{\wedge} \alpha\beta\gamma\delta\epsilon \dots$$

Esta definición tiene, sobre la de Poncelet, la ventaja de manejar sólo caracteres intrínsecos de las formas, y el inconveniente de valerse, para la caracterización de la proyectividad, del concepto de *medida*, en rigor innecesario para la edificación de la Geometría proyectiva. De ella resulta inmediatamente:

Dos series o haces congruentes son proyectivos.

Aplicando esta definición a dos series impropias y recordando la definición de razón doble de cuatro puntos impropios (§ 5, lec. 14) resulta: *Dos series impropias son proyectivas entre sí cuando lo son los haces que las proyectan desde dos puntos propios cualesquiera.* Definición que es independiente de los puntos elegidos por el paralelismo de los pares de haces proyectantes de una misma serie impropia.

(*) Chasles usó la denominación de «homográficas».

2. Teorema fundamental de la proyectividad.—Diremos que dos formas de primera categoría son *superpuestas* cuando tienen la misma *recta base* si son series, la misma arista si son haces de planos, o cuando están situados en el mismo plano y tienen el mismo vértice si son haces de rectas.

Entre dos formas superpuestas puede, naturalmente, definirse una proyectividad. Demostremos:

Si en una proyectividad (según Chasles), entre dos formas de primera categoría superpuestas, tres elementos de una de ellas coinciden con sus homólogos en la otra, coinciden todos los restantes pares de puntos homólogos.

En efecto; si, por ejemplo, en la proyectividad

$$ABCDEF \dots \bar{\wedge} A'B'C'D'E'F' \dots$$

coinciden A con A' , B con B' , C con C' , deberá tenerse por definición

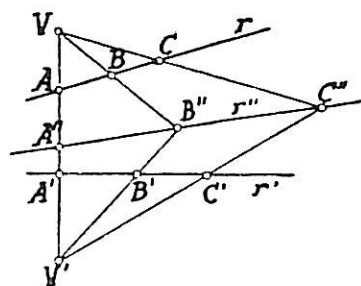
$$(ABCD) = (A'B'C'D') = (ABCD'),$$

lo que exige $D \equiv D'$ por no existir más que un punto que forme con otros tres una razón doble determinada (lec. 14. § 7). Análogamente $E \equiv E'$, $F \equiv F'$, ... Es decir, coinciden todos los pares de puntos homólogos.

3. Equivalencia de las definiciones de Chasles y Poncelet.—La conservación de la razón doble en las operaciones de proyectar y cortar, prueba que *Dos figuras proyectivas según Poncelet, lo son según Chasles.* Recíprocamente, demostremos que:

Dos series proyectivas, según Chasles, pueden obtenerse una de otra por una sucesión de proyecciones y secciones, es decir, son proyectivas, según Poncelet.

Para demostrarlo, supondremos las series coplanarias (bastando, si no cumplieran tal condición, proyectar una de ellas desde un punto exterior a las dos sobre un plano que pase por la otra) y además no superpuestas (bastando, en caso de que lo fueran, proyectar una de ellas sobre otra recta coplanaria). Sean estas rectas $ABC \dots$ y $A'B'C' \dots$ y r y r' sus bases respectivas. Elijamos ahora en la recta AA' dos puntos cualesquiera V, V' y cortemos los haces proyectivos $V' (A'B'C' \dots)$, $\wedge V (ABC \dots)$, por la recta $r'' \equiv B''C''$, siendo B'' la intersección de VB y $V'B'$, y el punto C'' la intersección de VC y $V'C'$. Sea A'' la intersección de r'' con AA' .



Las secciones de estos haces por r'' serán dos series proyectivas (Chasles) con tres elementos A'', B'', C'' coincidentes. Luego coincidirán todos los demás. Es decir, en la recta r'' se cortarán los pares de rayos homólogos de los haces proyectivos $V (ABC \dots)$ y $V' (A'B'C' \dots)$, quedando de este modo enlazadas las series dadas $ABC \dots, A'B'C' \dots$ por una sucesión de proyecciones y secciones. Así, proyectando $ABC \dots$ desde V y cortando por r'' obtenemos $A''B''C'' \dots$ y proyectando esta serie desde V' y cortando por r' obtenemos $A'B'C' \dots$

La demostración para haces de rectas o planos, puede siempre reducirse a la anterior, seccionando previamente cada haz por una recta.

La equivalencia de ambas definiciones de proyectividad nos permite aplicarlas indistintamente para llevar, en cada momento, las deducciones por la vía más cómoda, como verá el lector en el párrafo siguiente.

4. Determinación de una proyectividad por tres pares de elementos homólogos.—Para aplicar la construcción anterior, nos han bastado tres puntos A, B, C de una serie y otros tres homólogos A', B', C' en la otra. Dados pues, arbitrariamente tres puntos alineados A, B, C y otros tres A', B', C' , podemos hallar *de infinitud de maneras* un conjunto de proyecciones y secciones, es decir, una proyectividad (Poncelet) en la que sean homólogos ABC y $A'B'C'$. Ahora bien, cualquiera que sea la sucesión de operaciones elegida, la correspondencia obtenida es la misma, pues todo nuevo punto X de la serie ABC define con A, B, C una razón doble $(XABC)$, y le ha de corresponder en la segunda serie el único punto X' que forma con A', B', C' una razón doble $(X'A'B'C')$ igual a la $(XABC)$ (Chasles). En resumen:

Una proyectividad entre dos formas de primera categoría queda definida dando tres pares de elementos homólogos.

5. La proyectividad según Staudt.—Con objeto de eliminar de la Geometría proyectiva todo concepto de medida y, teniendo en cuenta que la cuaterna armónica puede definirse *gráficamente* mediante el cuadrivértice o cuadrilátero y, por consiguiente, usando sólo conceptos de incidencia, Staudt dió la siguiente definición de proyectividad:

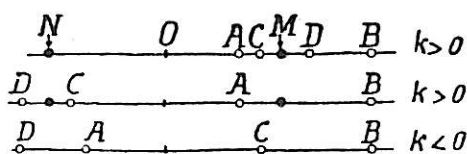
Dos formas de primera categoría se llamarán proyectivas cuando se corresponden elemento a elemento y a toda cuaterna armónica formada por elementos de la primera figura corresponda una cuaterna armónica formada por los elementos homólogos.

Como se ve esta definición exige mucho menos que la de Chasles, pues sólo supone la correspondencia de las razones dobles de valor -1 y es, por tanto, más general. Podemos afirmar que: *Dos formas proyectivas según Chasles o Poncelet, lo son según Staudt.*

Pero la proposición recíproca ya no es evidente y su demostración exige algunos pasos que vamos a precisar, razonando en las series para fijar las ideas. De las series se pasa a los haces, como hemos visto antes

6. Carácter ordenado de la correspondencia de Staudt.—*La correspondencia de Staudt es una correspondencia ordenada.* Más concretamente; a dos pares de elementos separados (no separados) AB y CD corresponden pares $A'B'$ y $C'D'$ también separados (no separados).

En efecto: la separación y no separación de dos pares puede caracterizarse mediante la existencia o no existencia de ciertas cuaternas armónicas del siguiente modo



Dados dos pares de puntos cualesquiera AB, CD en una recta, tales que no admitan un mismo centro de simetría, es posible hallar una inversión o involución de la misma, en la que sean homólogos dichos pares (§§ 6 y 7. lec 25. Tomo I), es decir, un punto O (centro) tal que $OA \cdot OB = OC \cdot OD = k$,

Si la inversión es la potencia k positiva, cada par cae a un mismo lado de O . Si ambos pares caen a distinto lado, no se separan. Si ambos pares están a un mismo lado y es $OC > OA$ deberá ser (para que se mantenga constante el producto) $OD < OB$ y tampoco se separan los pares.

Análogamente: Si la inversión es de potencia negativa, los pares se separan. Y en virtud del principio de reciprocidad serán ciertos los recíprocos:

Si los pares AB y CD no se separan, existe una inversión de potencia positiva en la que son homólogos y, por tanto, existen dos puntos M y N dobles tales que $OM = ON = \sqrt{k}$ que separan armónicamente ambos pares (v. párrafos citados). Si los pares se hallan separados, la inversión es de potencia negativa y no existen tales puntos.

Queda por ver el caso singular en que los pares AB y CD admitan un mismo centro de simetría. En tal caso los pares no se separan y admiten asimismo dos puntos armónicamente separados por ambos, que son el centro de simetría y el punto impropio.

Establecido esto, la proposición I es evidente, pues si el par AB está (no está) separado por el CD , no existe (existe) un par de puntos M y N armónicamente separados por AB y CD y lo mismo debe ocurrir con sus homólogos en la correspondencia.

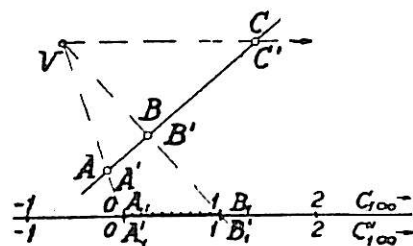
7. Teorema de Staudt.—II. Dos series proyectivas superpuestas $ABCD \dots, A'B'C'D' \dots$ (según la definición de Staudt) que tienen coincidentes tres pares de elementos homólogos $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C'$ tienen coincidentes todos los demás.

Proyectemos, en efecto, las series desde un punto V sobre una recta paralela a VC . Obtendremos dos nuevas series superpuestas $A_1B_1C_1, \dots, A'_1B'_1C'_1, \dots$ proyectivas según Staudt (puesto que al proyectar se conservan las figuras armónicas de una y otra serie) y que tienen coincidentes los puntos impropios C_1 y C'_1 así como $A_1 \equiv A'_1, B_1 \equiv B'_1$. La cuestión se reduce a probar la coincidencia de los puntos homólogos de estas nuevas series.

Formemos en la serie A_1B_1, \dots una escala graduada $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ de unidad A_1B_1 y de origen A_1 , es decir, hallemos el punto 2 armónicamente separado del A_1 respecto de B_1 y del punto impropio; hallemos luego el punto 3 armónicamente separado del B_1 respecto del 2 y del impropio, etc.; y asimismo formemos la sucesión de puntos 1, 0, $-1, -2, \dots$ cada uno armónicamente separado del antecedente respecto del anterior y del punto impropio. Subdividamos los intervalos obtenidos en 10, 100, ... partes iguales, es decir (desde un punto de vista proyectivo), intercalemos entre cada dos puntos consecutivos nuevas sucesiones de 10, 100, ... intervalos definidas por análogas condiciones de armonicidad entre los puntos de división sucesivos. Podemos, en definitiva, construir teóricamente en la primera serie una regla graduada en décimas, centésimas, milésimas, ... a la que corresponderá como homóloga la misma escala en la segunda serie, puesto que, para su construcción, partimos de los mismos elementos.

Por tanto: A todo punto cuya abscisa sea un número decimal limitado en una serie, corresponde en la otra serie el mismo punto.

Como, además, la correspondencia entre ambas series es ordenada, por serlo la que existía entre $ABC \dots$ y $A'B'C' \dots$ (párrafo anterior) y conservarse el orden en la proyección, a todo punto en el interior de un segmento propio de una de las series (separado del impropio respecto de los extremos) corresponde un punto en el interior del segmento homólogo (separado del impropio doble); por tanto, a todo punto de una serie dado por una abscisa cuyo desarrollo decimal tiene infinitas cifras, es decir, comprendido entre dos sucesiones de puntos (de abscisas decimales por exceso y defecto) corresponderá en la otra serie un punto comprendido entre las dos series de puntos homólogos, que son las mismas, es decir, un punto cuya abscisa decimal es la misma; en una palabra, corresponderá el mismo punto (Tomo I, lecciones 17 y 18).



8. Equivalencia entre las definiciones de proyectividad de Staudt, Chasles y Poncelet.—III *Dos series proyectivas según Staudt lo son según Poncelet* Basta repetir el razonamiento y construcción del § 3, aplicando a las dos series obtenidas en la recta r'' el teorema II del párrafo anterior.

Y como antes vimos ya que toda proyectividad en el sentido de Poncelet lo es de Staudt y que las de Poncelet y Chasles eran equivalentes entre sí, son equivalentes las tres definiciones. La definición de Staudt al manejar sólo cuaternas armónicas, comprobables por simples condiciones de *incidencia* (cuadrivértice), tiene la enorme ventaja de *entrar dentro de la ley de dualidad, que preside así toda la Geometría proyectiva.*

9. Grupo proyectivo.—Aplicando cualquiera de las definiciones resulta:

I. *El producto de dos proyectividades es una proyectividad*

II. *La transformación inversa de una proyectividad es también proyectividad. Por tanto: Todas las proyectividades entre formas de primera categoría forman grupo, llamado grupo proyectivo.*

De las propiedades anteriores resulta:

La relación proyectiva es invariante respecto de todas las proyectividades
De otro modo: *Si dos formas son proyectivas $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$... sus transformadas mediante cualquier proyectividad seguirán siendo proyectivas*

Pues si $ABC \dots, A'B'C' \dots$ se transforman proyectivamente en $abc \dots, a'b'c' \dots$, por ejemplo, se tendrá $abc \dots, \bar{\wedge} ABC \dots \bar{\wedge} A'B'C' \dots, \bar{\wedge} a'b'c' \dots$, de donde (I) $abc, \dots, \bar{\wedge} a'b'c' \dots$

NOTA SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROYECTIVIDAD —El llamado teorema fundamental de la proyectividad, célebre en la historia de la Geometría proyectiva por los errores habidos en su demostración, es en rigor el teorema de Staudt (§ 7) y la dificultad de dicha demostración se presenta precisamente al no querer hacer uso de ninguna noción de medida ni de congruencia. Tal fué la idea esencial de Staudt al crear su *Geometría de la posición*. Una elegante demostración proyectiva de dicho teorema puede verse en el Capítulo V de los *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*, de Rey Pastor. La relativa sencillez de la demostración desarrollada en el § 7 se debe precisamente al empleo de recursos métricos. Otra demostración proyectiva puede verse en Enriques, *Geometría proyectiva*

La Geometría proyectiva se hallaba en germen en la obra de los griegos. De los comentarios de *Pappus* (siglo IV) a los *Porismas* de *Euclides* se desprende que eran conocidos de éste multitud de propiedades que hoy se consideran fundamentales de la Geometría proyectiva, entre ellas la propiedad proyectiva de la razón doble (Teorema 129 de las «Colecciones matemáticas» de *Pappus*).

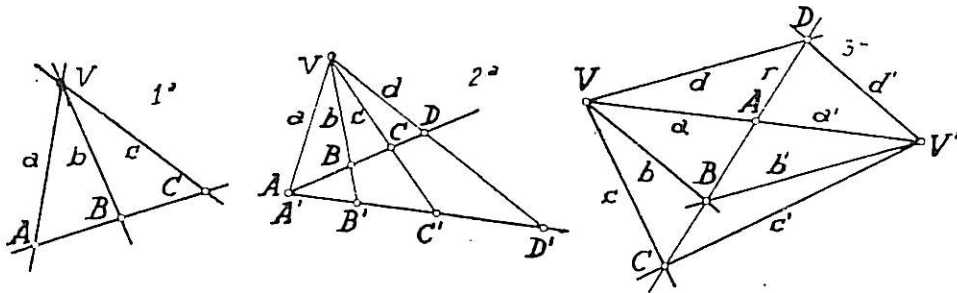
Chasles llamó la atención sobre el carácter fundamental de esta propiedad y sobre ella edificó hace un siglo su «Tratado de Geometría superior», caracterizando así métricamente la transformación perspectiva de Poncelet, y obteniendo transformaciones homográficas más generales que las de éste.

Staudt emancipó, finalmente, la Geometría proyectiva del concepto de medida dándole vida autónoma en su «Geometría de la posición»; pero la demostración que dió del teorema fundamental no era rigurosa, por un imperfecto conocimiento de la continuidad. Era preciso que la escuela posterior de Cantor, Dedekind, profundizara en el estudio del continuo para que pudieran sentarse las bases modernas de una Geometría proyectiva autónoma y rigurosa como se desarrolla en las obras citadas de *Enriques*, *Rey Pastor*, *Severi*.

LECCIÓN 17.—PROYECTIVIDAD E INVOLUCIÓN ENTRE FORMAS DE PRIMERA CATEGORÍA

Con miras preferentes a la aplicación de estas nociones de proyectiva a la resolución de problemas de Geometría plana nos ceñiremos al estudio de la proyectividad entre series de puntos y haces de rectas en el plano.

1. Formas perspectivas.— En una figura plana se dice que una serie y un haz son *perspectivos*, cuando la serie es sección del haz (fig. 1.^a).



Se dice que dos series son *perspectivas*, cuando ambas son secciones de un mismo haz (fig. 2.^a).

Se dice que dos haces son *perspectivos*, cuando ambos son proyecciones de una misma serie (fig. 3.^a).

La correspondencia entre formas perspectivas se llama *perspectividad*. Según la definición de Poncelet, podemos decir: *Toda proyectividad es un producto de perspectivas.*

Dos series proyectivas $ABC \dots, A'B'C' \dots$ situadas en bases distintas tales que el punto $A \equiv A'$ común a ambas bases es homólogo de sí mismo (*doble*), son *perspectivas*.

En efecto (fig. 2.^a), proyectando las dos series desde el punto V de intersección de BB' y CC' se obtienen dos haces proyectivos superpuestos con tres rayos dobles a, b, c y, por tanto, serán dobles todos los demás (teorema § 2, lección anterior).

Las rectas $BB', CC', DD' \dots$, que unen pares de puntos homólogos, concurren, pues, en un punto V que se llama *centro perspectivo* de las series.

Dos haces proyectivos $abc \dots, a'b'c' \dots$ de vértices distintos tales que el rayo $a \equiv a'$ común a ambos haces es homólogo de sí mismo (*doble*), son *perspectivos*.

En efecto (fig. 3.^a), cortando ambos haces por la recta r que une los puntos bb' y cc' se obtienen dos series proyectivas superpuestas con tres puntos dobles A, B, C y, por tanto, serán dobles todos los demás (teorema § 2, lección anterior).

Los puntos $bb', cc', dd' \dots$, de intersección de pares de rayos homólogos, se hallan, pues, en una recta r que se llama *eje perspectivo* de los haces.

2. Eje proyectivo de dos series y centro proyectivo de dos haces.—

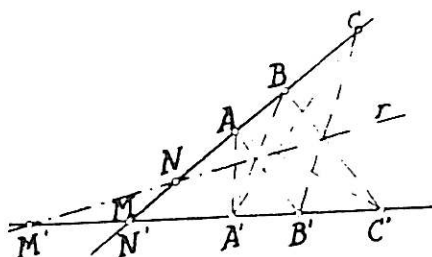
La perspectividad es la correspondencia proyectiva más fácil de construir; por eso interesa reducir toda proyectividad a un producto de perspectividades, como hemos aprendido a hacerlo para las series en el § 3 de la lección anterior. Tomando en aquella construcción V en A' y V' en A resulta el siguiente teorema de la izquierda (y su correlativo de la derecha):

Dadas dos series proyectivas no superpuestas

$$ABCD \wedge A'B'C'D' \dots$$

los haces que las proyectan respectivamente desde dos puntos homólogos A, A' (tomando cada uno en la otra serie) son perspectivos.

El eje r de esta perspectividad es independiente del par de puntos homólogos elegido y se llama eje proyectivo de las series dadas

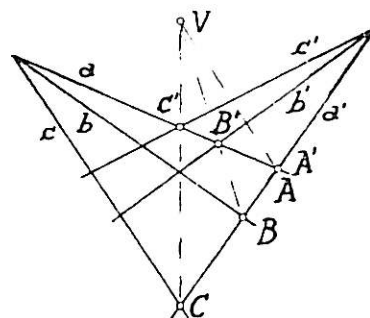


Dados dos haces proyectivos no superpuestos

$$abcd \wedge a'b'c'd' \dots$$

las series obtenidas, cortándolos respectivamente por dos rayos homólogos a y a' (tomado cada uno en el otro haz) son perspectivos.

El centro V de esta perspectividad es independiente del par de rayos homólogos elegido y se llama centro proyectivo de los haces dados



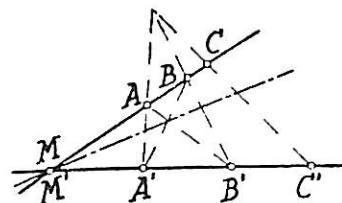
En efecto (teorema izquierda), los haces $A(A'B'C')$ y $A'(ABC)$ son proyectivos y tienen el rayo común AA' homólogo de sí mismo. Por tanto, aplicando el párrafo anterior queda demostrada la primera parte del teorema.

El eje proyectivo r de ambos haces permite la fácil construcción de puntos homólogos. Para hallar el punto homólogo de un C de la primera serie, basta proyectarlo desde A' sobre el eje r y proyectar el punto obtenido desde A sobre la base de la segunda serie. Y recíprocamente para hallar el homólogo de un punto de ésta.

Aplicando esta construcción al punto de intersección de las bases de las series considerado como punto M de la serie ABC , resulta como homólogo el punto M' de intersección de r con la base de la segunda serie y, análogamente, considerado el punto de intersección de ambas bases como punto N' de la segunda serie, resulta como homólogo el punto N de intersección de r con la primera serie.

Si los puntos M' y N son distintos, es decir, si las series no son perspectivas, ellos bastan para determinar el eje, el cual es, por tanto, independiente del par de puntos A y A' elegido, quedando así demostrada la segunda parte del teorema.

Si las series son perspectivas, el eje proyectivo pasa por el punto común a las dos series $M \equiv M'$ que es doble y también por el punto de intersección de AB' y BA' . Tomando como nuevos vértices de proyección B y B' , el eje ha de pasar por los dos mismos puntos, luego coincide con el anterior. El teorema es pues cierto en todo caso.

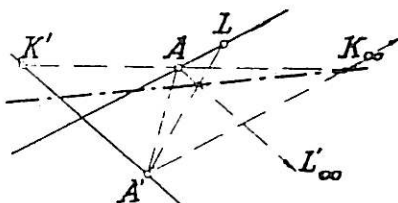


El teorema de la derecha se demuestra correlativamente y aunque la ley de dualidad hace innecesaria la demostración, es conveniente que el lector la efectúe como ejercicio.

3. Teorema de Pascal.—Aplicado el teorema anterior a la proyectividad definida por dos ternas de puntos A, B, C , y A', B', C' arbitrariamente elegidas cada una en una recta, resulta (fig. izq. del § anterior):

Dada una quebrada hexagonal cerrada $AB'CA'BC'A$ cuyos vértices alternados están respectivamente alineados, los pares de lados opuestos AB' y $A'B$, $B'C$ y BC' , CA' y $C'A$ se cortan en tres puntos alineados ().*

4. Puntos límites de dos series proyectivas.—En el caso en que los puntos impropios de dos series proyectivas no son homólogos entre sí, cada uno de ellos tiene un homólogo propio en la otra serie, que se llama *punto límite de la misma*. Llamaremos L al punto límite de la primera serie (homólogo del punto impropio en la segunda) y K' al punto límite de la segunda serie (homólogo del impropio de la primera).



En la figura se indica su construcción, mediante el eje proyectivo.

Si expresamos la igualdad de las razones dobles formadas por estos dos pares de puntos y otros dos pares homólogos, se obtiene

$$(LK_{\infty} AB) = (L'_{\infty} K' A' B'), \quad \text{o sea} \quad \frac{LA}{LB} = \frac{K' B'}{K' A'}$$

de donde

$$\overline{LA} \cdot \overline{K'A'} = \overline{LB} \cdot \overline{K'B'}$$

En dos series proyectivas con puntos límites el producto de distancias de dos puntos homólogos a los puntos límites respectivos es constante.

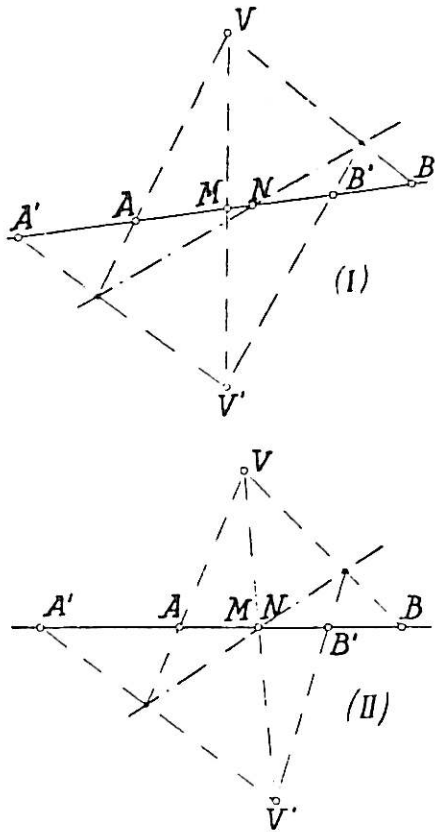
5. Construcciones en formas superpuestas.

Si $ABC \dots$ y $A'B'C'$ son dos series proyectivas superpuestas, proyectándolas desde dos puntos situados fuera de su base, se obtiene dos haces proyectivos no superpuestos, a los cuales se les puede aplicar las construcciones de la derecha del párrafo anterior.

Si $abc \dots$ y $a'b'c'$... son dos haces proyectivos superpuestos, cortándolos por dos rectas que no pasen por su vértice común, obtenemos dos series proyectivas no superpuestas, a las que puede aplicarse las construcciones de la izquierda del párrafo anterior.

(*) Esta propiedad era ya conocida de Pappus (siglo IV) y, probablemente, de Euclides.

En la lección 19 obtendremos construcciones más breves que éstas, reduciendo el problema a series circulares. Por ello no insistimos aquí. En un solo caso es aconsejable la construcción anterior, y es el siguiente:



Sea dado un punto doble M de las series, es decir, homólogo de sí mismo, y proyectemos las dos series desde V y V' alineados con M . Los dos haces obtenidos son *perspectivos* por tener doble el rayo VV' común, lo que simplifica extraordinariamente la construcción de puntos homólogos en las series dadas.

Obsérvese que, dado M , dos pares de puntos homólogos AA' , BB' bastarán para determinar el eje perspectivo (que pasará por las intersecciones de VA y $V'A'$, VB y $V'B'$) y por tanto, la proyectividad, la cual es única en virtud del § 4 de la lección 16.

La intersección de dicho eje con la base de las series dará el otro punto doble N (v. fig. I).

Puede darse el caso en que N coincida con M , es decir, que exista un solo punto doble (figura II), en cuyo caso para hallar el eje y construir por tanto la proyectividad bastará dar este único punto doble y otro par de puntos

homólogos AA' . (La proyectividad obtenida en este caso es también única, como se demuestra en el § 9 de la siguiente lección.)

El lector cuidará de aplicar la ley de dualidad para hallar construcciones correlativas en los haces.

6. Elementos dobles de la proyectividad.—El párrafo anterior nos indica la existencia de proyectividades superpuestas con dos elementos dobles y con uno solo. También existen proyectividades superpuestas sin elementos dobles, por ejemplo, la que hace corresponder a cada rayo de un haz el rayo perpendicular, y todas las proyectividades que de ella resulten por secciones y proyecciones.

Una proyectividad sin puntos dobles se llama *elíptica*. Una proyectividad con dos puntos dobles se llama *hiperbólica*. Una proyectividad con un solo punto doble se llama proyectividad *parabólica* o *prospectividad*. En virtud del teorema fundamental, la existencia de más elementos dobles implicaría lo fueran todos los demás, es decir, la identidad de las dos formas proyectivas.

Todas las anteriores construcciones han podido efectuarse con el simple uso de la regla. La determinación de los puntos dobles de la proyectividad es problema equivalente (como veremos en la próxima lección) a la resolución de una ecuación de segundo grado y, por tanto, no puede resolverse ya con el uso de la regla (v. Tomo I, lec. 36, § 8). Este problema será resuelto analíticamente en la próxima lección y gráficamente en la lección 19.

7. Característica de la proyectividad.—En una proyectividad hiperbólica la razón doble formada por dos puntos homólogos cualesquiera A y A' y los puntos dobles M y N es constante y se llama **CARACTERÍSTICA** de la proyectividad (*).

En efecto, considerado otro par BB' e igualando la razón doble de la cuaterna $ABMN$ con la de su homóloga $A'B'MN$, se tendrá:

$$(ABMN) = (A'B'MN) \quad \text{o sea} \quad \frac{(AMN)}{(BMN)} = \frac{(A'MN)}{(B'MN)}$$

de donde

$$\frac{(AMN)}{(A'MN)} = \frac{(BMN)}{(B'MN)} \quad \text{o sea} \quad (AA'MN) = (BB'MN)$$

que traduce el enunciado.

Recíprocamente: Los pares de puntos AA' , BB' , ... que forman con dos fijos MN razones dobles de valor constante, son homólogos en una proyectividad en la que son dobles M y N .

En efecto, de $(AA'MN) = (BB'MN)$ se desprende, recorriendo en sentido inverso la cadena de transformaciones anteriores, $(ABMN) = (A'B'MN)$ y análogamente para todos los pares.

8. Involución.—Si en una proyectividad entre dos series superpuestas, por ejemplo, $ABC \bar{\cap} A'B'C'$ hallamos el punto homólogo del punto A' considerándolo como perteneciente a la primera figura $A' \equiv P$, obtendremos como homólogo en la segunda un nuevo punto P' distinto, en general, de A . Pero puede ocurrir que P' coincida con A . (Bastaría para que tal hecho ocurriera, definir la proyectividad eligiendo dos ternas homólogas de esta forma $AA'B \bar{\cap} A'AB'$). Diremos entonces que A y A' se corresponden doblemente. Demostremos:

Si en una proyectividad entre dos formas de primera categoría superpuestas, dos elementos homólogos AA' se corresponden doblemente, se corresponden asimismo doblemente los restantes puntos homólogos.

En efecto, la razón doble $AA'XX'$ formada con A , A' y otro par de puntos homólogos cualesquiera X , X' , es igual a la que resulta de permutar A y A' y también X y X' (lec 14, § 6). Luego

$$(AA'XX') = (A'AX'X)$$

lo que demuestra que en la proyectividad definida por las ternas $AA'X \bar{\cap} A'AX'$ (que es la proyectividad de que se trata), el punto homólogo de X' , como perteneciente a la primera forma, es X , y, por tanto, todos los puntos homólogos se corresponden doblemente. El razonamiento es general lo mismo para series que para haces.

Una tal proyectividad se llama **involución** (**).

(*) Algunos autores, como Enriques, la llaman *invariante absoluto* por el hecho de conservar su valor al transformar la proyectividad en otra mediante una transformación proyectiva.

(**) En la lección siguiente demostraremos que tal correspondencia coincide con la que hemos designado con tal nombre o con el de inversión en la recta en el Tomo I lección 25, § 6, o es una simetría.

Si una involución tiene dos puntos dobles M y N , la característica de ella es -1 . En efecto, se debe verificar

$$(MNA A') = (MNA' A) = \frac{1}{(MNA A')} \quad \text{o sea} \quad (MNA A')^2 = 1$$

lo que exige (razonando como en § 4, lec. 15) $(MNA A') = -1$. Por tanto:

En toda involución hiperbólica los puntos dobles separan armónicamente los pares de puntos homólogos.

Recíprocamente: Los pares de puntos AA' , BB' , ... armónicamente separados por dos puntos fijos MN forman una involución cuyos puntos dobles son MN . Pues según el párrafo anterior definirán una proyectividad, y en ella se corresponderán doblemente A y A' por ser, por hipótesis,

$$(AA' MN) = (A' AMN).$$

9. Ejemplos métricos: Semejanzas, congruencias y simetrías. Involución rectangular.—1. SERIES SEMEJANTES Y CONGRUENTES.—Dos series proyectivas en las que son homólogos los puntos impropios LL' , son semejantes. Pues formando cuaterna con estos puntos y otros tres homólogos, resulta

$$(AL_{\infty} BC) = (A'L'_{\infty} B'C') \quad \text{o sea} \quad (ABC) = (A'B'C')$$

es decir, $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$, lo que prueba la proporcionalidad de los pares de segmentos homólogos $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \text{razón de semejanza}$.

Si además de corresponderse los puntos impropios de dos series proyectivas, son iguales dos segmentos homólogos $AB = A'B'$, las series son congruentes. Puesto que son semejantes y la razón de semejanza vale 1.

Recíprocamente: Toda semejanza (y en particular toda congruencia) es una proyectividad. Por conservar las razones simples y, por tanto, las dobles.

Si las series están superpuestas, el punto del infinito es doble y puede ocurrir:

1.º El otro punto doble M es propio. Se habrá de verificar como antes

$$(MAB) = (MA'B') \quad \text{de donde} \quad \frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}$$

y resulta:

Toda proyectividad con un punto doble impropio y otro propio M , es una homotecia de centro M .

2.º No existe más punto doble que el impropio. La proyectividad queda definida como veremos (lec. 18) dando este único punto doble impropio y dos puntos homólogos A y A' , es decir, no hay más que una proyectividad que cumple estas condiciones. Pero la traslación \overline{AA} las cumple; luego

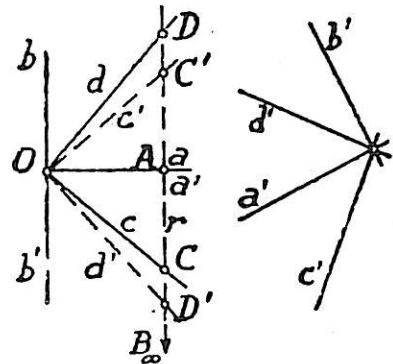
Toda proyectividad cuyo punto doble es impropio es una traslación.

II. SERIES SIMÉTRICAS.—*Dos series en involución cuyos puntos dobles son uno propio O y otro impropio, son simétricas respecto del punto O. Pues de $(OL_{\infty} AA') = -1$ se desprende $OA : OA' = -1$, $OA = -OA'$. Y recíprocamente: Toda simetría es una involución cuyos puntos dobles son el centro y el punto impropio*

III. HACES CONGRUENTES.—*Dos haces proyectivos en los que existen dos pares de rayos perpendiculares ab y cd en uno de los haces, homólogos de otros dos pares $a'b'$, $c'd'$ también perpendiculares en el otro haz, son congruentes.*

Llevemos, en efecto, el segundo haz sobre el primero de modo que coincidan a con a' y b con b' y cortemos los dos haces superpuestos por una recta r perpendicular a a . Deberá tenerse (v fig.)

$$(AB_{\infty} CD) = (A'B_{\infty} C'D'), \quad \text{o sea} \quad \frac{AC}{AD} = \frac{AC'}{AD'}$$



y al mismo tiempo (teorema de la altura de un triángulo rectángulo)

$$AC \cdot AD = AC' \cdot AD' \quad (= \overline{OA}^2)$$

Multiplicando ambas relaciones resulta $\overline{AC}^2 = \overline{AC'}^2$, que se satisface

1.º Para $AC = AC'$, es decir, OC coincide con OC' . Los dos haces superpuestos son idénticos por tener tres pares de rayos homólogos coincidentes.

2.º Para $AC = -AC'$. Los dos haces superpuestos son simétricos por tener uno de ellos tres rayos abc coincidentes con los simétricos de los $a'b'c'$ del otro respecto del eje a .

En ambos casos los haces dados son congruentes.

IV INVOLUCIÓN RECTANGULAR. INVOLUCIÓN CÍCLICA.—El ejemplo más sencillo de involución en un haz es la que existe entre cada rayo y su perpendicular. Se comprende fácilmente que es una congruencia (giro de 90°) y, por tanto, cumple las condiciones de la proyectividad, siendo además involutiva porque si a' es perpendicular a a , es también a perpendicular a a' .

La sección que en una involución rectangular produce la recta impropia, o sea, la involución de direcciones ortogonales, se llama involución cíclica.

En el Tomo I decíamos que una involución sin puntos dobles (elíptica) los tiene imaginarios. Diremos también aquí que la involución cíclica tiene dos puntos impropios imaginarios llamados cíclicos.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si un ángulo gira alrededor de su vértice conservando constante su amplitud, las series que describen las intersecciones respectivas de sus lados con dos rectas fijas son proyectivas. Construcción de los puntos límites y del eje de esta proyectividad.

2. Un punto P variable en una recta fija r se proyecta desde dos puntos fijos A y B sobre otra recta s en los puntos X , Y . Hallar el lugar del punto de intersección de AY con BX , al variar P .

3. Sea ABC un triángulo fijo, y D un punto (de su plano) variable sobre una recta fija r . Probar que los puntos M, N, P en que las cevianas AD, BD, CD cortan a los lados BC, CA, AB describen tres series proyectivas dos a dos. Hallar en dichas proyectividades los homólogos de los puntos en que la recta r corta a los lados. Hallar el eje proyectivo de dichas proyectividades.

4. Supuesto el triángulo ABC del ejercicio anterior isósceles ($AB=AC$) y r paralela a la base BC . demostrar que al superponer las series descritas por N y P mediante un giro de AC hasta coincidir con AB , las series superpuestas que así se obtienen están en involución.

5. Demostrar que en el ejercicio anterior se verifica $\frac{1}{BP} + \frac{1}{CN} = \text{constante}$.

6. Suponiendo siempre fijo el triángulo ABC y el punto D variable sobre la circunferencia circunscrita. demostrar que las series descritas por los puntos M, N, P , pies de las cevianas por D , son proyectivas. Hallar los puntos límites de dichas proyectividades.

7. Si el triángulo ABC del ejercicio anterior es equilátero, demostrar que se verifica $AN \cdot BM = AC^2$.

8. Demuéstrase que al proyectar dos series proyectivas desde un punto de su eje proyectivo se obtienen dos series en involución.

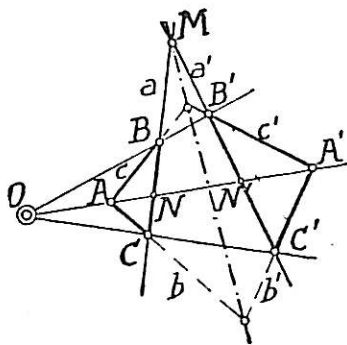
9. Idem. id., que al cortar dos haces proyectivos por una recta que pase por su centro proyectivo se obtienen dos series en involución.

10. Si una involución en la que se corresponden A con A' y B con B' tiene los elementos dobles M y N , la involución en que se corresponden A con B y A' con B' tiene por homólogos M y N .

11. Lo mismo le ocurre a la involución en la que se corresponden A con B' y A' con B .

12. Si desde un punto O variable sobre una recta fija se trazan paralelas a dos direcciones fijas. los puntos respectivos de intersección de dichas paralelas con dos rectas fijas a y b describen dos series semejantes.

13. Recíprocamente. Las paralelas trazadas a dos direcciones fijas, respectivamente, por los pares de puntos homólogos de dos series semejantes se cortan en puntos alineados.



14. Cortemos un haz O por dos rectas a y a' secantes en M , y proyectemos las dos series obtenidas $BNC, B'N'C'$, respectivamente, desde dos puntos A y A' alineados con O . Probar que los haces proyectantes $A(BNC...)$ y $A'(B'N'C'...)$ son perspectivos, y que el eje perspectivo pasa por M .

15. *Triángulos homológicos.*—Deducir como corolario del ejercicio anterior que:

Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son tales que los pares de vértices AA', BB', CC' están en rectas concurrentes en un punto O , los pares de lados opuestos aa', bb' y cc' concurren en puntos de una recta.

16. Demostrar análogamente el recíproco. Ambos triángulos se llaman *homológicos*. Más adelante demostraremos ambas proposiciones por otros caminos.

17. Demostrar análogamente que si los lados de un triángulo variable pasan por tres puntos alineados fijos, y dos de sus vértices se mueven sobre dos rectas fijas, el tercer vértice se mueve asimismo sobre otra recta fija (Pappus, siglo IV: «Comentarios a los Porismas de Euclides»).

18. Enúnciese y demuéstrase el teorema correlativo al del § 3.

19. Caso particular del teorema de Pascal: Si AB' y $A'B$ son paralelas, así como $B'C$ y BC también lo son CA' y $C'A$.

Este teorema fué demostrado en el tomo I, lec. 22, nota II, por proporcionalidad.

20. Compruébese que también puede establecerse como caso particular del teorema de los triángulos homológicos.

LECCIÓN 18.—INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO ANALÍTICO DE LA PROYECTIVIDAD

Con objeto de dar idea de la aplicación de los métodos analíticos al estudio de la correspondencia proyectiva, vamos a dedicar breve espacio a plantear la ecuación de la proyectividad y a deducir de ella las más elementales consecuencias.

1. Ecuación de la proyectividad en las series.—Sean X_1, X_2, X_3, X_4 y X'_1, X'_2, X'_3, X'_4 dos series proyectivas y, tomados tres puntos fijos X_1, X_2, X_3 en la primera y sus homólogos en la segunda X'_1, X'_2, X'_3 , expresemos analíticamente la igualdad $(XX_1X_2X_3) = (X'X'_1X'_2X'_3)$ de las razones dobles formadas con estos puntos y otros dos homólogos X y X' variables en una y otra serie. Para ello adoptaremos un origen de abscisas, una unidad y un sentido en cada serie y, recordando la expresión de la razón doble en función de las abscisas x_1, x_2, x_3, \dots, x , $x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'$ de los puntos (lec. 14, § 7), se obtendrá una ecuación de la forma

$$\frac{x_2 - x}{x_3 - x} C = \frac{x'_2 - x'}{x'_3 - x'} C', \quad \text{o sea} \quad C(x_2 - x)(x'_3 - x') = C'(x_3 - x)(x'_2 - x')$$

en la que $C = X_1X_3 : X_1X_2$, $C' = X'_1X'_3 : X'_1X'_2$. Efectuando operaciones y trasponiendo todos los términos al primer miembro, la ecuación será de la forma

$$axx' + bx + cx' + d = 0, \quad \text{de donde} \quad x' = -\frac{bx + d}{ax + c}, \quad x = -\frac{cx' + d}{ax' + b} \quad [1]$$

es decir, *bilineal*, o sea lineal separadamente en x y x' . Como al variar x varía x' y recíprocamente, los coeficientes de los numeradores no pueden ser proporcionales a los de los denominadores y, por tanto, $ad \neq bc$, lo que puede comprobarse algebraicamente.

Recíprocamente: Toda ecuación de la forma [1], en la que $ad \neq bc$, establece una correspondencia proyectiva entre los puntos que tienen por abscisas x y x' .

En efecto; en la hipótesis establecida se desprende que a cada valor de x corresponde un valor de x' y a cada valor de x' otro de x dados por [1]. Se trata, pues, de una correspondencia *biunívoca*. Es fácil comprobar además que la razón doble de cuatro puntos X_1, X_2, X_3, X_4 de abscisas x_1, x_2, x_3, x_4 , $\frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2}$ se transforma, al aplicarle la sustitución [1], en la razón doble de sus homólogos $\frac{x'_3 - x'_1}{x'_4 - x'_1} : \frac{x'_3 - x'_2}{x'_4 - x'_2}$.

Omitimos el detalle de las simplificaciones que conducen a este resultado, por ser un simple ejercicio algebraico. Se puede simplificar la tarea poniendo la transformación en la forma (efectuando la división):

$$x' = -\frac{bx+d}{ax+c} = -\frac{b}{a} + \frac{f}{ax+c} \quad \left(f = \frac{bc}{a} - d\right)$$

y se puede obtener x' mediante la sucesión de transformaciones

$$1.^a) x' = ax, \quad 2.^a) x'' = x' + c, \quad 3.^a) x^{IV} = \frac{1}{x''}, \quad 4.^a) x^V = f/x^{IV}, \quad 5.^a) x' = x^V - \frac{l}{c}$$

Las primera y cuarta son transformaciones homotéticas con centro en el origen (multiplicación de abscisas por un factor constante), las segunda y quinta son transformaciones por traslación (adición a las abscisas de un sumando constante). Todas ellas conservan, evidentemente, la razón doble y sólo resta probar la propiedad en la tercera, o sea

$$\frac{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_1}} : \frac{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_2}} = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2}$$

lo que se verifica rápidamente.

2. Determinación de los puntos límites.—Si en la expresión de x' en [1] hacemos $x \rightarrow \infty$, obtendremos la abscisa k' del punto K' , homólogo del punto del infinito de la primera serie

$$k' = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{d}{x}}{a + \frac{c}{x}} = -\frac{b}{a} \quad [2]$$

y análogamente, si hacemos $x' \rightarrow \infty$ en la expresión de x obtendremos la abscisa l del punto L

$$l = -\frac{c}{a} \quad [3]$$

Si tomáramos como orígenes en una y otra serie dichos puntos debería resultar $k'=0$, $l=0$ y, por tanto, $b=0$, $c=0$, quedando como ecuación de la proyectividad $axx'+d=0$, lo que demuestra nuevamente la propiedad del § 4 de la lección anterior.

3. Determinación de los puntos dobles de una proyectividad entre series superpuestas.—Si suponemos ahora las series superpuestas y las abscisas de una y otra referidas al mismo origen, unidad y sentido, la coincidencia de dos puntos homólogos supondrá la igualdad de sus abscisas. Haciendo, pues, $x=x'$ en la ecuación de la proyectividad, queda, para determinar las abscisas de los puntos dobles MN , la ecuación de segundo grado

$$cx^2 + (b+c)x + d = 0. \quad [4]$$

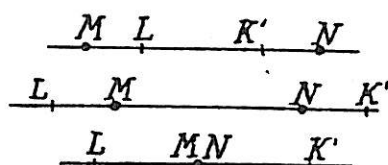
La proyectividad será elíptica, parabólica o hiperbólica, según que el discriminante de esta ecuación $(b+c)^2 - 4ad$ sea negativo, nulo o positivo.

En el caso de la proyectividad parabólica la abscisa del único punto doble es $\xi = -\frac{b+c}{2a} = \sqrt{\frac{d}{a}}$.

4. Simetría común a los puntos límites y los dobles.—El punto medio del segmento determinado por los puntos dobles tendrá por abscisa la semisuma de las abscisas de dichos puntos, es decir, $-(b+c):2a$ (puesto que $-(b+c):a$ es la suma de las raíces de la ecuación [4]), pero ésta es también la semisuma de las abscisas [2] y [3] de los puntos límites. Obtenemos así, fácilmente, esta curiosa propiedad:

Los puntos límites LK' de una proyectividad hiperbólica tienen el mismo centro de simetría que los puntos dobles MN. Los unos se hallan, pues, equidistantes de los otros y no se separan.

Si la proyectividad es parabólica, el mismo razonamiento prueba que el punto doble es el punto medio de los puntos límites.



5. Casos de semejanza y congruencia.—Si se corresponden los elementos impropios, la ecuación [1] debe satisfacerse para $x \rightarrow \infty$, $x' \rightarrow \infty$, y dividiéndola previamente por xx' resulta $a=0$, quedando como ecuación de la proyectividad, que es semejanza (v lec anterior)

$$bx + cx' + d = 0 \tag{5}$$

Comprobemos que recíprocamente Toda ecuación de esta forma representa una semejanza. En efecto, aplicándola a dos pares de puntos homólogos $x_1x'_1$, $x_2x'_2$ y restando, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} bx_1 + cx'_1 + d &= 0 \\ bx_2 + cx'_2 + d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad b(x_1 - x_2) = -c(x'_1 - x'_2)$$

o sea,

$$\frac{x_1 - x_2}{x'_1 - x'_2} = -\frac{c}{b}$$

que expresa que la razón entre dos segmentos homólogos es constante (razón de semejanza).

Si además es $c=b$ (igualdad), queda la ecuación simétrica en x , x'

$$b(x+x') + d = 0, \quad \text{o sea} \quad x' = -x - \frac{d}{b} \tag{6}$$

que, si las series son superpuestas, representa una igualdad con inversión de sentido o *simetría*.

Mientras que si es $c = -b$ queda

$$b(x-x') + d = 0 \quad \text{o sea} \quad x' = x + \frac{d}{b} \quad [7]$$

igualdad directa o *traslación*.

6. Ecuación de la involución.—Sigamos suponiendo dos series superpuestas y expresemos analíticamente la condición para que dos puntos homólogos particulares de una proyectividad de abscisas x_1 y x'_1 , se correspondan doblemente. Ello significa que al permutar x_1 y x'_1 en la igualdad.

$$ax_1x'_1 + bx_1 + cx'_1 + d = 0$$

debe seguir verificándose

$$ax'_1x_1 + bx'_1 + cx_1 + d = 0$$

Restando ambas igualdades resulta

$$b(x_1 - x'_1) = c(x_1 - x'_1) \quad \text{de donde} \quad b = c$$

Es decir, la ecuación de la proyectividad se podrá poner en la forma

$$axx' + b(x+x') + d = 0 \quad [8]$$

ecuación simétrica en x , x' que nos dice que seguirá verificándose al permutar dos puntos homólogos *cualesquiera*, es decir, que se trata de una *involución*.

Obtenemos así, por vía analítica, el teorema del § 8 de la lección anterior y, además, la forma [8] de la ecuación de una involución en la que pueden despejarse como antes (obsérvese la identidad de expresiones, consecuencia de la simetría)

$$x' = -\frac{bx+d}{ax+b}, \quad x = -\frac{bx'+d}{ax'+b} \quad [9]$$

7. Puntos dobles de una involución.—Se obtendrán haciendo, como antes, $x=x'$ y se obtiene la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + 2bx + d = 0 \quad [10]$$

cuyo discriminante $4b^2 - 4ad$ no puede ser nulo, pues si lo fuese se tendría $b^2 = ad$, $\frac{b}{a} = \frac{d}{b}$ y las ecuaciones [9] no definirían ninguna correspondencia por tener las fracciones valores constantes. Obtenemos así el siguiente interesante resultado:

Una involución no es nunca parabólica. O tiene dos puntos dobles (hiperbólica) o no tiene ninguno (elíptica).

8. Centro de la involución.—En una involución los dos puntos límites se confunden en uno solo de abscisa $-b : a$, que es punto medio del segmento limitado por los puntos dobles si existen (por ser $-b : a$ la semisuma de raíces)

ces c e [10]). Llamaremos a este punto *centro de la involución*. Si $a \neq 0$ es un punto propio que tiene la siguiente propiedad:

El producto de distancias de dos puntos homólogos cualesquiera al centro de una involución, es constante.

En efecto, si tomamos este punto como nuevo origen, la ecuación habrá de dar $b : a = 0$ lo que exige $b = 0$. La ecuación de la involución, referida a su centro es, pues, de la forma

$$axx' + c = 0, \quad \text{es decir} \quad xx' = -\frac{c}{a}$$

lo que traduce el enunciado.

La involución de que estamos tratando ($a \neq 0$) coincide, pues, con la inversión en la recta definida en el Tomo I, lección 25, lo que justifica que ya allí llamáramos *involución* a esta correspondencia. Pero si $a = 0$ la involución [8] se convierte en *simetría* [6]; por tanto, la relación de involución que ahora consideramos es más general que aquella, puesto que abarca asimismo como caso particular la simetría.

Para la determinación de los elementos homólogos y del centro de una involución no simétrica podemos, pues, valernos de las construcciones expuestas en el Tomo I.

9. Determinación analítica de proyectividades e involuciones.—Desde el punto de vista analítico, determinar una proyectividad es hallar los coeficientes a, b, c, d de su ecuación.

Aunque son cuatro los coeficientes, en rigor son tres las incógnitas, pues la ecuación es homogénea de primer grado en a, b, c, d y se puede dividir por cualquiera de ellos no nulo, siendo las verdaderas incógnitas las razones así obtenidas. Por tanto, bastarán tres condiciones entre dichos coeficientes para determinar la ecuación. Así, por ejemplo:

Dar tres pares de puntos homólogos es dar tres pares de valores de x y x' que satisfacen a la ecuación

$$\left. \begin{aligned} ax_1x'_1 + bx_1 + cx'_1 + d &= 0 \\ ax_2x'_2 + bx_2 + cx'_2 + d &= 0 \\ ax_3x'_3 + bx_3 + cx'_3 + d &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema nos podría servir para hallar las razones entre los coeficientes Sustituyéndolas en

$$axx' + bx + cx' + d = 0$$

tendríamos la ecuación deseada; pero eso es tanto como eliminar entre las cuatro ecuaciones los coeficientes incógnitos a, b, c, d , lo cual podemos efectuar directamente eliminando por determinantes. Así se obtiene como ecuación de la proyectividad

$$\begin{vmatrix} x & x' & x & x' & 1 \\ x_1 & x'_1 & x_1 & x'_1 & 1 \\ x_2 & x'_2 & x_2 & x'_2 & 1 \\ x_3 & x'_3 & x_3 & x'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(El lector comprobará como ejercicio que esta ecuación coincide con la obtenida en el § 1, expresando directamente la igualdad de razones dobles.)

Análogamente hallará el lector la ecuación de la proyectividad definida por un punto doble $x_1 = x'_1$ y otros dos pares homólogos. O por dos puntos dobles $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ y un par de puntos homólogos.

Dar un punto límite es dar (§ 2) el valor de la razón $\frac{b}{a}$ o de la $\frac{c}{a}$.

Expresar que la proyectividad es *parabólica*, es dar una condición de segundo grado entre sus coeficientes. Dar en este caso la abscisa del punto doble $\xi = -\frac{b+c}{a} = \sqrt{\frac{d}{a}}$ equivale a dar $\frac{d}{a}$ y una relación lineal entre a , b , c . Luego el problema quedará determinado dando otra relación lineal entre los coeficientes, como es, por ejemplo, la que resulta de dar un par de puntos homólogos.

La determinación de involuciones se efectuará análogamente. Como la ecuación de la involución tiene un coeficiente menos, bastarán dos condiciones, por ejemplo: Dos pares de puntos homólogos. Un par de puntos homólogos y un punto doble. Los dos puntos dobles.

En particular, para la ecuación de la involución definida por dos pares de puntos homólogos de abscisas x_1 , x_2 , x'_1 , x'_2 se obtiene

$$\begin{vmatrix} x & x' & x+x' & 1 \\ x_1 & x'_1 & x_1+x'_1 & 1 \\ x_2 & x'_2 & x_2+x'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLOS: 1.º Hallar la ecuación de una proyectividad dados el punto doble de abscisa -1 y un punto límite $l=4$.

La ecuación [4] ha de tener raíz doble -1 , lo que exige (suma y producto)

$$\frac{b+c}{a} = -2, \quad \frac{d}{a} = 1; \quad \text{además} \quad l = -\frac{c}{a} = 4$$

en donde, dando a a el valor 1, se obtiene fácilmente

$$a=1, \quad d=1, \quad c=-4, \quad b=2$$

y la ecuación buscada es

$$xx' + 2x - 4x' + 1 = 0.$$

2.º Hallar la involución en la que son homólogos los puntos $x=3$, $x'=-1$ y es doble el origen.

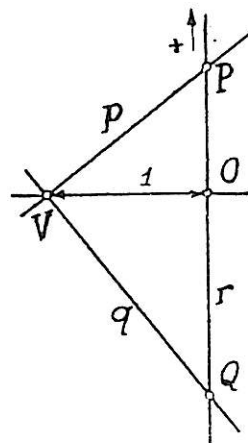
La ecuación [10] ha de tener una raíz nula, lo que exige $c=0$. Además, por corresponderse los valores dados en [8], deberá tenerse

$$-3a + 2b = 0.$$

Dando a a el valor 2, por ejemplo, se tiene $b=3$ y la ecuación deseada es

$$2xx' + 3(x+x') = 0.$$

10. Estudio analítico de la proyectividad en los haces.— Imaginemos cortado cada haz por una cierta recta r a distancia l del vértice y adoptemos en ella un sentido positivo y , como origen, el pie O de la perpendicular bajada del vértice V a r . A cada rayo p del haz corresponde un punto P en la serie, cuya abscisa puede tomarse como *abscisa del rayo p* . Esto equivale a considerar como abscisa de un rayo p la tangente del ángulo que forma con el rayo origen VO .



Una proyectividad entre dos haces se traducirá así en una proyectividad entre las series obtenidas y tendrá una ecuación de la forma

$$axx' + bx + cx' + d = 0 \quad [1]$$

que adoptaremos como ecuación de la proyectividad entre los dos haces.

Si se trata de haces superpuestos, se supondrán los dos cortados por la misma recta r y, por tanto, superpuestas también las series de referencia.

La ecuación [1] permite resolver problemas análogos a los de las series, como el de la determinación de los rayos dobles, que no repetimos por conducir a los mismos resultados algebraicos. Si la proyectividad es involutiva, se tendrá, análogamente, $c=b$, y como ecuación de la involución

$$axx' + b(x + x') + d = 0.$$

La determinación de la proyectividad mediante rayos homólogos, dobles, etcétera, conduce a las mismas conclusiones y cálculos que en las series.

11. Rayos rectangulares.— Dos rayos ortogonales VP y VQ de abscisas x, x' verifican $xx' = -1$, puesto que se ha de tener (v. figura) en valor absoluto $OP \cdot OQ = \overline{OV}^2 = 1$, y los signos de \overline{OP} y \overline{OQ} son opuestos.

Si queremos hallar, pues, en una proyectividad dos rayos homólogos rectangulares, no tenemos más que poner $x' = -\frac{1}{x}$ en la ecuación [1] y tendremos

$$bx - \frac{c}{x} + d - a = 0$$

o bien

$$bx^2 + (d - a)x - c = 0$$

Si la proyectividad es involutiva ($c=b$), resulta

$$bx^2 + (d - a)x - b = 0$$

ecuación de segundo grado que tiene siempre raíces reales distintas por ser el discriminante $(d - a)^2 + 4b^2 > 0$. Luego

Toda involución entre haces superpuestos tiene dos rayos homólogos rectangulares.

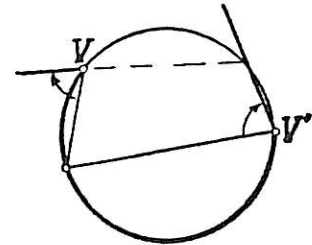
EJERCICIOS

1. ¿Cuál será la ecuación general de una perspectividad entre dos series tomando como origen de abscisas en ambas el punto común?
2. Ecuación de la perspectividad entre dos series respectivamente situadas en los ejes cartesianos Ox y Oy , en la que son homólogos $A(x=1)$, $A'(y=-2)$, $B(x=-3)$, $B'(y=1)$. Hallar el centro perspectivo
3. Hallar el centro perspectivo de las series situadas sobre los ejes cartesianos y cuyas coordenadas x , y están ligadas por la ecuación $xy+3x+2y=0$
4. Dadas las dos ecuaciones $Ax^2+Bx+C=0$ y $A'x^2+B'x+C'=0$, averiguar las condiciones que tienen que cumplir sus coeficientes para que los puntos representados en una recta por las raíces de la primera ecuación estén armónicamente separados por los que representan en la misma recta las raíces de la segunda
5. Dados dos pares de puntos $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$, hallar un par de puntos x y x' armónicamente separados por AB y también por CD . Aplicación numérica. $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-1$, $x_4=4$.
6. Hallar dos puntos homólogos en una involución dada, que disten entre sí una distancia dada. Probar que las dos soluciones obtenidas son simétricas respecto del centro de la involución.
7. ABC es un triángulo equilátero de lado 1, un punto D de su plano describe la paralela media correspondiente al lado BC , por ejemplo. Probar que las cevianas BD y CD cortan a las rectas AC y AB en puntos N y P que describen dos series proyectivas, y hallar la ecuación de dicha proyectividad, tomando como origen en ambas rectas el punto A , y como sentidos positivos AB y AC
8. Desde un punto M fijo del lado BC de un triángulo ABC dado (cualquiera) se trazan distintas transversales que cortan a las rectas AB y AC en los puntos P y N . Hallar la ecuación de la proyectividad entre las series P y N tomando como origen en ambas rectas el punto A , y como sentidos positivos AB y AC (la ecuación se expresará en función de las medidas de AB , AC , BM y MC). Caso particular $AB=5$, $AC=6$, $BM=3$, $MC=4$, M interior a BC .
9. ¿Qué clase de proyectividad resulta en el ejercicio anterior si M es el punto impropio de AB ?
10. Dos lados de un triángulo variable ABC están sobre los lados de un ángulo fijo A ; la suma (o diferencia) de los recíprocos de los lados AB y AC es constante. Probar que la recta de tercer lado pasa por un punto fijo
11. Dos lados de un triángulo variable ABC están sobre los lados de un ángulo fijo A ; la suma (o diferencia) de los lados AB y AC es constante. Probar que los circuncentros de todos los triángulos ABC están alineados.
12. Escribir la ecuación que liga las distancias x , x' de dos focos conjugados en un espejo esférico y dígame qué clase de relación liga dichos focos (v. tomo I, lec. 25, nota).
13. Hallar la ecuación de la proyectividad entre dos series superpuestas sabiendo que tiene los puntos dobles de abscisas -1 y 4 en la que son homólogos los de abscisas 1 y -3 . Hallar los puntos límites de dicha proyectividad y los homólogos del origen considerado como de una y otra serie.
14. Hallar la ecuación de una proyectividad entre dos series superpuestas en la que al punto de abscisa 5 , considerado como de una y otra serie, le corresponde los puntos de abscisas 1 y $11/3$. (Nótese la singularidad de una de las soluciones.)
15. Hallar la ecuación de la semejanza entre dos series superpuestas en la que son homólogos los puntos $A(-2)$, $A'(3)$, $B(1)$, y $B'(-9)$. Hallar el centro y la razón de semejanza. Hallar dos puntos homólogos armónicamente separados por los puntos -4 y $+4$.
16. Hallar la ecuación de una involución cuyo centro es el punto de abscisa 1 y en la que son conjugados los puntos cuyas abscisas son las raíces de la ecuación $x^2-5x-5=0$. Hallar dos puntos conjugados en esta involución simétricos respecto del origen de abscisas.
17. Hallar la ecuación de la involución en un haz, en la que son homólogos los rayos de abscisas 2 y -3 , así como 1 y -3 . Hallar los rayos dobles. Idem los rectangulares. Idem dos rayos homólogos que formen entre sí un ángulo de 45 grados.

LECCIÓN 19.—PROYECTIVIDAD E INVOLUCIÓN EN LAS SERIES Y HACES CIRCULARES

1. Generación proyectiva de la circunferencia como lugar de puntos.

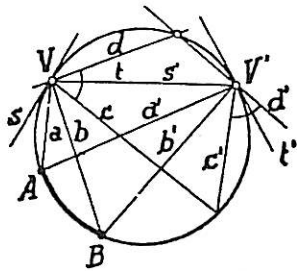
Vimos en el Tomo I, lección 9, § 9, que el lugar geométrico de los puntos de intersección de los pares de rayos homólogos de dos haces *directamente congruentes*, no superpuestos ni paralelos, es un arco de circunferencia (arco capaz) cuyos extremos son los vértices de dichos haces. El concepto restringido de «rayo» como semirrecta, eliminaba del lugar el otro arco (v. figura). Repitiendo el razonamiento allí desarrollado, con el concepto proyectivo de «rayo» como recta completa, podemos ya afirmar:



El lugar geométrico de los puntos de intersección de los pares de rayos homólogos de dos haces directamente congruentes (no paralelos) es una circunferencia que pasa por los vértices de dichos haces. Y recíprocamente:

Los haces que se obtienen proyectando todos los puntos de una circunferencia desde dos de ellos cualesquiera V y V' son directamente congruentes.

Esta propiedad resulta asimismo de la igualdad de dos ángulos homólogos cualesquiera, por ser inscritos que abarcan el mismo arco (como ab y $a'b'$) a no ser uno de ellos adyacente del suplementario del otro (como cd y $c'd'$) (v. figura).



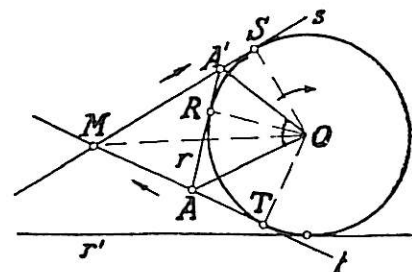
Teniendo en cuenta la igualdad del ángulo inscrito AVV' con el semiinscritor $AV't'$ formado por la cuerda AV' y la tangente t' resulta:

El homólogo del rayo VV' como perteneciente al haz V es la tangente a la circunferencia en V' y, análogamente, el homólogo del rayo VV' como perteneciente al segundo haz es la tangente en V.

2. Generación proyectiva de la circunferencia como envolvente de tangentes.—*Las series obtenidas haciendo corresponder los pares de puntos de intersección de dos tangentes fijas cualesquiera con cada una de las demás son proyectivas.*

Sean s y t las dos tangentes fijas cuyos puntos de contacto sean S y T . Sea r otra tangente cualquiera de punto de contacto R . Sean, finalmente, A y A' las intersecciones de r con t y s .

Por propiedades bien conocidas de los puntos de contacto de las tangentes a una circunferencia desde un punto (Tomo I, lección 14, § 10), se tiene $\sphericalangle AOT = \sphericalangle AOR$, de donde $\sphericalangle AOR = \frac{1}{2} \sphericalangle ROT$ y, análogamente, $\sphericalangle A'OR = \frac{1}{2} \sphericalangle ROS$. Sumando, resulta $\sphericalangle AOA' = \frac{1}{2} \sphericalangle TOS = \sphericalangle MOS$ (const.). (En



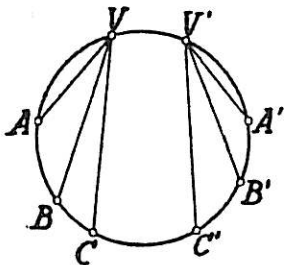
otras posiciones, como la r' en lugar de sumar precisa restar, pero el resultado es el mismo.)

De aquí resulta que el haz engendrado por OA es congruente con el engendrado por OA' . De otro modo Las series engendradas por A y por A' son secciones de dos haces congruentes y por tanto, proyectivas entre sí, como queríamos demostrar

Como al rayo OM del haz OA le corresponde el OS del haz OA' ($\sphericalangle AOA' = \sphericalangle MOS$ según antes) resulta

En la proyectividad de las referidas series, al punto de intersección M de las tangentes, considerado como perteneciente a cada una de ellas, le corresponde el punto de contacto de la otra

3. Series y haces circulares proyectivos.—Un conjunto de puntos de una circunferencia o de tangentes a la misma, se llama también, respectivamente, *serie* o *haz*.



Diremos que dos series de puntos de una circunferencia son proyectivas, cuando lo son los haces $V(ABC)$ y $V'(A'B'C')$ que las proyectan desde dos puntos cualesquiera V y V' de la misma (o desde uno mismo V)

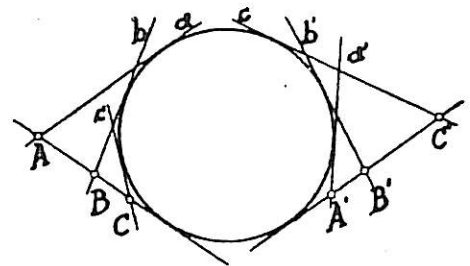
La propiedad del párrafo 1 nos dice que este criterio es independiente de los puntos V y V' elegidos. La definición se puede generalizar fácilmente a series circulares situadas en circunferencias distintas, pero no hemos de hacer uso, en este curso de tal generalización

Para definir dos series circulares proyectivas basta, pues, dar tres pares de puntos homólogos A, B, C A', B', C' en la circunferencia, ya que proyectándolos desde cualquier punto o puntos tendremos así definida la proyectividad entre los haces proyectantes

Análogamente,

Diremos que dos haces de tangentes a una circunferencia son proyectivos cuando lo sean las secciones producidas en ellos por dos tangentes cualesquiera (o por una misma) definición independiente de las tangentes elegidas, en virtud del párrafo 2

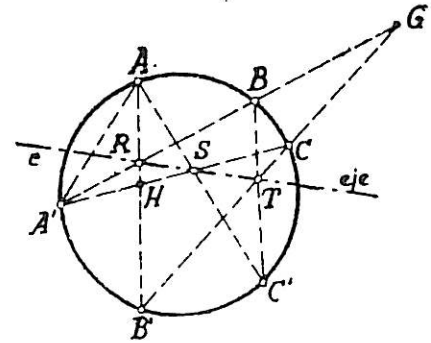
Para definir dos haces proyectivos basta pues dar tres pares de tangentes homólogas abc y $a'b'c'$



4 Eje de dos series circulares proyectivas.—Dadas dos series circulares proyectivas ABC $A'B'C'$ en una misma circunferencia, los haces que las proyectan desde dos puntos homólogos A y A' (tomado cada uno en la otra serie) son perspectivos

El eje e de esta perspectividad es independiente del par de puntos homólogos A, A' elegidos, y se llama EJE PROYECTIVO de las series dadas

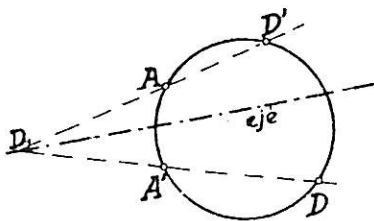
En efecto, los haces proyectivos $A(A'B'C'...)$ y $A'(ABC...)$ tienen el rayo común AA' doble y, por tanto, son perspectivas, es decir, los pares de rectas homólogas AB' y $A'B$; AC' y $A'C$... se cortan en puntos $R, S, ...$, del eje perspectivo r , con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.



Para demostrar la segunda, bastará probar que al tomar como vértices de los nuevos haces B y B' , el nuevo eje perspectivo, que pasa asimismo por R (intersección de BA' y $B'A$) y además por T (intersección de BC' y $B'C$) pasa también por S (intersección de AC' y $A'C$). En una palabra, basta probar que los tres puntos R, S, T están alineados. Para ello proyectemos desde A y B los cuatro puntos $A'B'C'C$ sobre las rectas CA' y CB' , respectivamente. Resulta así $A'HSC \bar{\wedge} GB'TC$ y como estas cuaternas proyectivas tienen el punto común C , son perspectivas, es decir, las tres rectas que unen sus pares de puntos homólogos $A'G \equiv A'B$, $HB' \equiv AB'$, ST concurren en un punto que es el R ; por tanto, la recta ST pasa por R , quedando así probada la segunda parte del teorema. También puede enunciarse de este otro modo:

Dadas, en una misma circunferencia, dos series proyectivas $ABC... \bar{\wedge} A'B'C'...$ los pares de rectas AB' y $A'B$, AC' y $A'C$, BC' y $B'C$, ... (que resultan de unir pares de puntos no homólogos $AB'...$ y sus homólogos $B'A...$) se cortan en una recta fija llamada eje perspectivo de las dos series.

5. Construcción de puntos homólogos y de los puntos dobles.—La figura anterior indica como, conocidos tres pares de puntos homólogos $ABC, A'B'C'$ se puede construir el eje. Recíprocamente: Conocido este eje y un par de puntos homólogos AA' podemos hallar fácilmente nuevos puntos homólogos.



Por ejemplo, para hallar el homólogo de D' lo proyectaremos desde A sobre el eje en D_1 y uniremos D_1 con A' ; la nueva intersección de D_1A' con la circunferencia dará el punto D homólogo de D' .

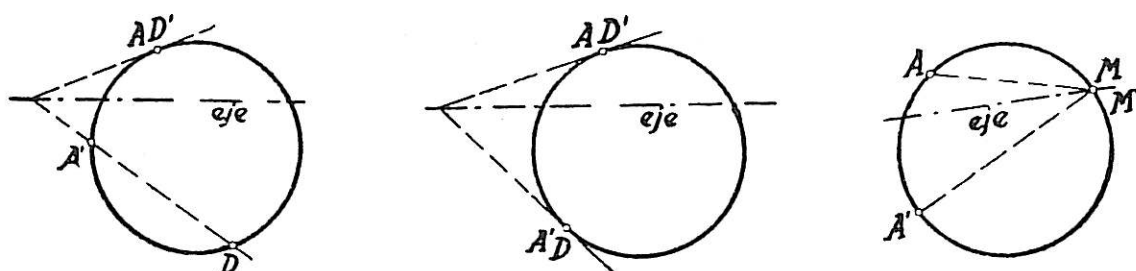
La construcción es aplicable cuando D' se confunde con A (es decir, para hallar el homólogo de A considerado como de la primera figura) sustituyendo la recta AD' por la tangente en A . De donde

I. *La tangente en un punto $A \equiv D'$ de la circunferencia y la recta que une sus dos puntos homólogos A', D , considerándolo como de una y otra serie, se cortan en el eje perspectivo.*

II. *Si A y A' se corresponden doblemente (es decir, si también D se confunde con A'), las tangentes en A y A' concurren en el eje perspectivo.*

III. *Si $M \equiv M'$ es un punto doble u homólogo de sí mismo de la proyección, está situado en el eje Y recíprocamente: Todo punto común al eje*

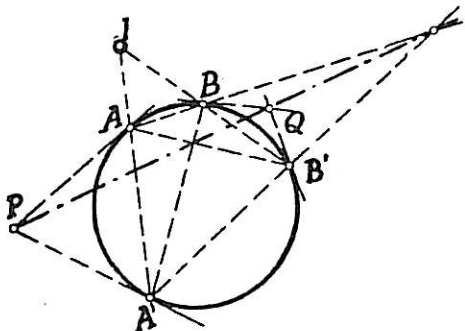
y a la circunferencia es punto doble Basta aplicar la construcción para comprobarlo.



Si el eje es secante, la proyectividad tiene dos puntos dobles y se llama *hiperbólica*. Si el eje es tangente, tiene un solo punto doble y se llama *parabólica*. Si es exterior, carece de puntos dobles y se llama *elíptica*.

El problema de la determinación de los puntos dobles que no pudimos resolver en las series rectilíneas (por ser problema de segundo grado) se nos resuelve pues, fácilmente en las series circulares.

6. Involución entre series circulares.—Si dos puntos A y A' homólogos en una proyectividad circular se corresponden doblemente, se corresponderán asimismo doblemente todos los demás pares BB' , CC' , puesto que lo mismo ocurrirá en la proyectividad entre los haces proyectantes desde un punto cualquiera de la circunferencia. La proyectividad se llama entonces *involución*, y no puede ser parabólica (por igual razón).



La doble correspondencia de los puntos nos dice que el eje de una involución no sólo contiene la intersección de AB' y $A'B$ sino también la de AB y $A'B'$, etc. así como la intersección de las tangen-

tes en A y A' en B y B' . (propiedad II del párrafo anterior).

De estos hechos sacamos las siguientes consecuencias

Las rectas que unen los pares de puntos homólogos AA' , BB' de una involución circular se cortan en el polo del eje proyectivo, punto fijo I llamado CENTRO DE LA INVOLUCIÓN CIRCULAR (punto indebidamente llamado *de Fregier*).

En efecto, los puntos P (de intersección de las tangentes en A y A') y Q (intersección de las tangentes en B y B'), son los polos de las rectas AA' y BB' . Luego el punto de intersección de estas rectas es el polo de la recta PQ (Polaridad recíproca, v Tomo I, lección 27, § 3.)

Los puntos de contacto de las tangentes a la circunferencia, trazadas desde el centro de una involución hiperbólica sobre ella son, pues, los puntos dobles, por ser los de intersección con el eje (polar)

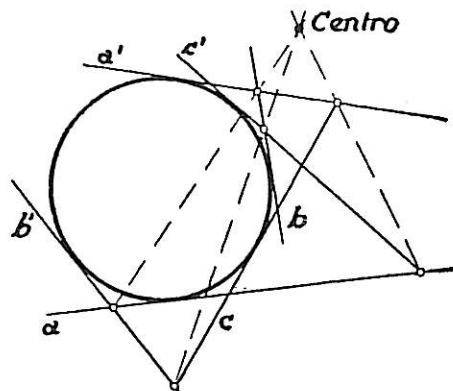
Una involución circular queda, pues, determinada:

Por dos pares de puntos homólogos AA' , BB' (definiendo la proyectividad $AA'B \dots A'AB'$ que será involutiva por corresponderse doblemente A y A').

Por el centro (que permite hallar cuantos pares homólogos se deseen).
 Por el eje (que permite hallar el centro).

7. Centro de dos haces circulares proyectivos.—Análogamente a la propiedad del § 4, establecida para las series circulares proyectivas, existe otra para los haces, que se demuestra correlativamente, o transformando por polaridad respecto de la circunferencia el teorema anterior:

Dados dos haces proyectivos $abc \dots \wedge a'b'c' \dots$ de tangentes a una misma circunferencia, los pares de puntos ab' y $a'b$; ac' y $a'c$; bc' y $c'b$ (intersecciones de pares de rayos no homólogos ab' y sus homólogos $a'b$) están alineados con un punto fijo llamado centro proyectivo de los haces.



Este centro permite construir rayos homólogos, conocidos un par de ellos.

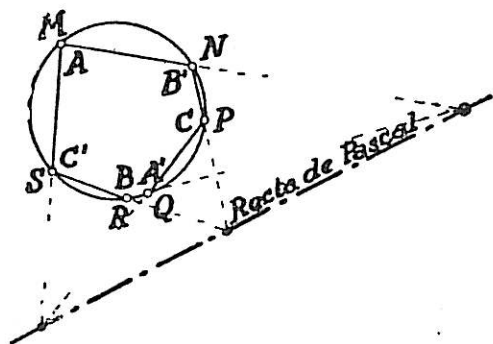
El punto de intersección de los dos rayos $a'd$ homólogos de un mismo $a \equiv d'$ considerado como de uno y otro haz, está alineado con el centro proyectivo y el punto de contacto de éste. (Corr. de § 5, I.)

Las tangentes trazadas desde el centro proyectivo a la circunferencia, son los rayos dobles de la proyectividad. (Corr. de § 5, III.)

Si el centro está en la circunferencia, no habrá más que un rayo doble y si el centro es interior, carecerá de rayos dobles.

Si los rayos se corresponden doblemente, se deduce, análogamente al párrafo anterior, la existencia de un eje de la involución (polar del centro proyectivo) donde se cortan los pares de tangentes homólogas. Son las tangentes en la involución de puntos de contacto de la figura del párrafo anterior.

8. Teoremas de Pascal y de Brianchon en la circunferencia.—El teorema de existencia del eje proyectivo, § 4, puede enunciarse de otro modo, diverso en la forma, pero equivalente en el fondo:

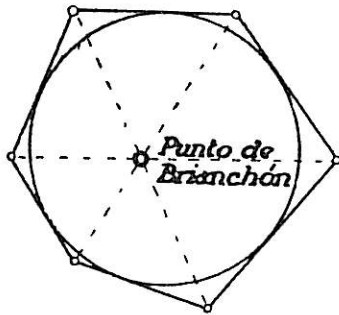


TEOREMA DE PASCAL.—Los puntos de intersección de los pares de lados opuestos MN y RQ , NP y SR , PQ y MS , de una quebrada hexagonal $MNPQRS$ inscrita en una circunferencia, están en línea recta (Recta de Pascal). En efecto, basta dar a sus vértices la nomenclatura siguiente:

MNP	QRS
ABC	$A'B'C'$

y aplicar el teorema del eje proyectivo a la proyectividad definida por las ternas $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$.

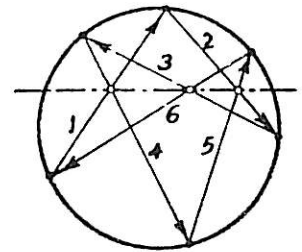
Análogamente, de la existencia del centro proyectivo, § 7, resulta :



TEOREMA DE BRIANCHON.—Las rectas que unen los vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una circunferencia, concurren en un punto (punto de Brianchon).

La demostración de este teorema resulta, por otra parte, innecesaria, pues se obtiene al transformar la figura anterior en la polaridad respecto de la circunferencia (v Tomo I, lec 27, § 4).

NOTAS.—I Es obvio advertir que no es condición precisa que la quebrada a que se refiere el teorema de Pascal (o el hexágono de Brianchon) sea convexa. Los lados opuestos son simplemente los que se hallan separados por otros dos en la ordenación cíclica de los mismos (1 y 4, 2 y 5, 3 y 6).



II En virtud de lo dicho en § 5, I, los teoremas siguen siendo aplicables cuando dos vértices del hexágono de Pascal (o dos lados del hexágono de Brianchon) se confunden en uno, en cuyo caso el lado que los unía se convierte en la tangente (el vértice en que se cortaban se convierte en el punto de contacto).

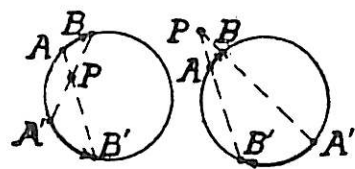
NOTAS Y EJERCICIOS

Proyectividades acordes y discordes.—Puesto que la correspondencia proyectiva es ordenada, si un punto recorre una serie en un sentido fijo el punto homólogo en otra serie proyectiva de aquélla la recorrerá asimismo en un sentido fijo; y lo mismo podemos decir de dos haces proyectivos, de una serie y un haz, o de dos series circulares proyectivas.

Si las series o los haces proyectivos son superpuestos, y los sentidos de recorrido de dos elementos homólogos coinciden, la correspondencia se llama acorde, y en caso contrario discordes.

Proyectando dos series superpuestas desde un mismo vértice obtendremos dos haces superpuestos, y cortando éstos por una circunferencia que pase por su vértice resultarán dos series circulares superpuestas, que serán acordes o discordes si lo eran aquéllas.

Ahora bien, en dos series circulares discordes (acordes) es fácil ver la existencia de puntos del eje proyectivo interiores (exteriores) a la circunferencia (P de de la figura) En el primer caso, el eje proyectivo corta forzosa-mente a la circunferencia, y, por tanto, la proyectividad tiene puntos dobles. En el segundo caso el eje proyectivo puede ser secante, tangente o exterior. Podemos, pues, enunciar:



Toda proyectividad discordes es hiperbólica

Una proyectividad acorde puede ser elíptica, parabólica o hiperbólica

El contrarrecíproco del primer enunciado permite enunciar Una proyectividad parabólica o elíptica es acorde.

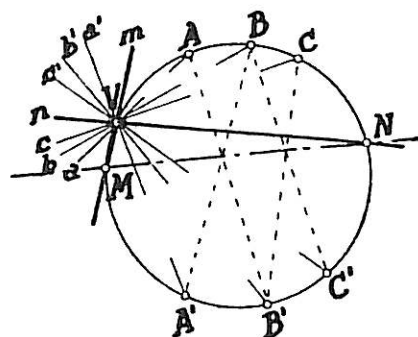
1. Obtener el mismo resultado por derivación de la relación $x' = -\frac{bx + d}{ax + c}$ comprobando que la derivada es positiva o negativa, según que $ad - bc$ sea positivo o negativo, y que en este segundo caso los puntos dobles son reales (v lec 18, § 3).
2. Estudiar el caso límite del teorema de Pascal cuando un par de vértices consecutivos del exágono se confunden en uno
3. Idem cuando se confunden dos o tres pares de vértices. Comprobar que en este último caso se obtiene el enunciado del ejercicio núm 5, lec 15

LECCIÓN 20.—APLICACIONES DE LA PROYECTIVIDAD ENTRE FORMAS DE PRIMERA CATEGORÍA

1. Determinación de puntos dobles en las proyectividades entre formas de primera categoría.—La sencillez con que se ha resuelto la determinación de puntos dobles en una proyectividad circular indica la oportunidad de su aplicación a la proyectividad entre series y haces ordinarios en el plano. Recuérdese que la determinación de los puntos dobles es un problema de segundo grado y por ello no pudimos resolverlo en la lección 17 haciendo sólo uso de la regla.

Ejemplo 1.º *Determinar los rayos dobles de una proyectividad (o de una involución) entre dos haces superpuestos $abc \dots$ $a'b'c' \dots$*

Cortados ambos haces por una circunferencia que pase por su vértice común V , tenemos determinadas en dicha circunferencia dos series circulares proyectivas. Las intersecciones de su eje proyectivo con la circunferencia determinará los puntos dobles M y N ; y éstos, a su vez proyectados desde V , darán los rayos dobles m y n de la proyectividad entre los haces dados.



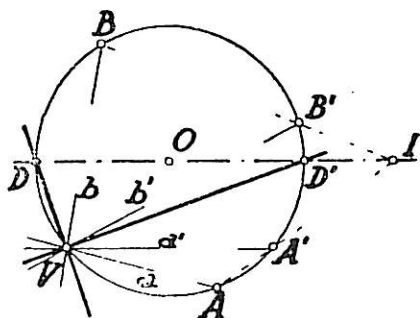
Ejemplo 2.º *Determinar los puntos dobles de una proyectividad (o de una involución) entre dos series superpuestas.*—Se podría resolver correlativamente al anterior, mediante el centro proyectivo de dos haces tangentes trazadas desde los puntos a una circunferencia tangente a la base común, pero (por ser, en general, más precisos los trazados basados en determinación de intersecciones que los que se obtienen trazando tangentes) se prefiere proyectar las series desde un punto y reducirlo al problema anterior

2. Elementos homólogos comunes a dos proyectividades o a dos involuciones.—Para hallar elementos homólogos XX' comunes a dos proyectividades o dos involuciones dadas, no tenemos más que elegir tres elementos ABC y hallar sus homólogos $A'B'C'$, $A''B''C''$ en ambas proyectividades. A todo elemento doble X' de la proyectividad resultante $A'B'C' \dots \bar{A}A''B''C'' \dots$ corresponde, por tanto, un mismo elemento X en $ABC \dots$; es decir X y X' son elementos que se corresponden en las dos proyectividades dadas. Y recíprocamente, si X y X' se corresponden en ambas proyectividades, X' es doble en la proyectividad $A'B'C' \dots \bar{A}A''B''C'' \dots$

El problema queda así reducido a los del párrafo anterior.

Aplicaciones de este problema.—Hallar puntos (rayos) de una proyectividad, involutiva o no, entre formas superpuestas que sean: 1.º, simétricos respecto de dos puntos (rayos); 2.º, homólogos en una traslación (giro).

3. Rayos rectangulares en proyectividades e involuciones entre haces superpuestos.—Hallar rayos homólogos rectangulares en una proyectividad (o en una involución) entre haces superpuestos, es lo mismo que hallar los rayos comunes a dicha proyectividad (involución) y a la involución rectangular del mismo vértice (v. problema anterior).



En particular, para hallar los rayos rectangulares en una involución $ab \bar{\wedge} a'b' \dots$ cortaremos éstos por una circunferencia que pase por su vértice V , hallaremos el centro I de la involución resultante $AB \bar{\wedge} A'B' \dots$ y lo uniremos con el centro O de la circunferencia. Los dos puntos diametrales D y D' alineados con I nos darán, proyectados desde V , los rayos homólogos rectangulares pedidos, VD y VD'

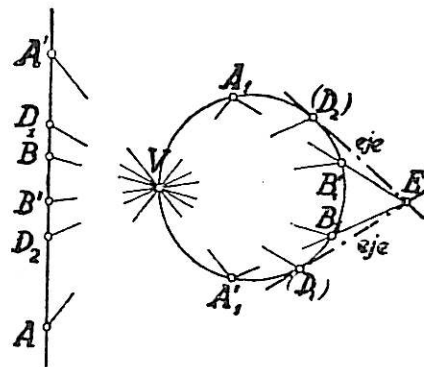
Si I coincide con O , todos los pares de puntos de la involución cumplen esta condición. Se trata de la propia involución rectangular. Excluido este caso, en toda involución existe siempre un par de rayos rectangulares, lo que concuerda con el resultado analítico obtenido en la lección precedente

4. Construcción de prospectividades.—Tratemos ahora de construir una prospectividad entre dos series superpuestas definida por dos pares de puntos homólogos AA' y BB' , es decir, hallar en ella pares de puntos homólogos y el punto doble. Adviértase, ante todo, que la condición de ser prospectividad establece una relación de segundo grado entre los coeficientes de la ecuación (v. lec. 18, § 3); por ello este problema tampoco puede ser resuelto sólo con la regla. En cambio, la proyectividad circular $A_1B_1 \dots \bar{\wedge} A'_1B'_1 \dots$ que resulta de proyectar las series dadas sobre una circunferencia desde un punto V de ella, nos proporciona una solución sencilla.

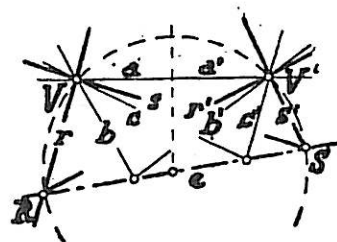
El eje proyectivo de las series circulares debe pasar por el punto E de intersección de $A_1B'_1$ y A'_1B_1 y además debe ser tangente a la circunferencia. El punto de contacto será el punto doble único de la proyectividad.

Si E es exterior a la circunferencia, el problema tiene dos soluciones, y ninguna si es interior

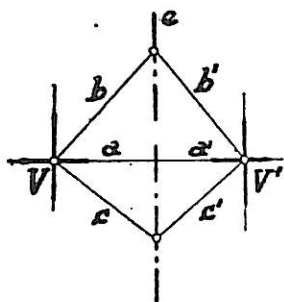
Si E pertenece a la circunferencia, coincidirá con uno de los puntos dados (dobles), y es preferible, en tal caso, aplicar la construcción expuesta en el § 5 de la lección 17



5. Rayos ortogonales de un haz, homólogos de otros ortogonales en otro haz proyectivo.—Dados dos haces proyectivos, tratemos de hallar dos rayos rectangulares de uno de ellos cuyos homólogos en el otro sean también rectangulares entre sí. Nótese que el problema difiere del del § 3, por cuanto la perpendicularidad afecta a dos rayos de un mismo haz entre sí, y a sus homólogos entre sí. Nada se dice acerca de la posición relativa de los haces que pueden ser de vértices distintos V y V' y conviene que así sea para facilitar la construcción.



Colocados los haces (mediante un movimiento conveniente de uno de ellos, si es preciso) en posición perspectiva, es decir, de modo que se superpongan en la recta VV' dos rayos homólogos aa' , por ejemplo, y hallado el eje perspectivo e ; la circunferencia de centro en e que pasa por V y V' corta a e en dos puntos RS en los que concurren los rayos rectangulares pedidos VR y VS (perpendiculares entre sí) y sus homólogos $V'R$ y $V'S$ (también perpendiculares).



Si el eje e resultara ser perpendicular a VV' , sin ser mediatriz, la construcción anterior cae en defecto, pero entonces las soluciones son los rayos aa' y sus perpendiculares en cada haz. Si e es mediatriz de VV' , ambos haces son congruentes. Se ve, pues, que existe siempre una solución al problema, y el § 9, III, de la lección 17, nos dice además que esta solución es *única*, a menos que sean los haces congruentes, en cuyo caso a cualquier par rectangular de un haz le corresponde un homólogo rectangular en el otro haz.

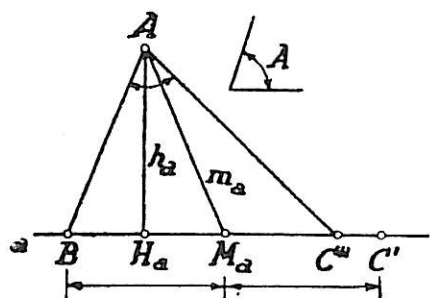
6. Aplicación de la proyectividad entre formas de primera categoría a problemas métricos de Geometría plana.—La proyectividad entre formas de primera categoría nos proporciona un nuevo y fecundo recurso para resolver multitud de problemas métricos, aplicando el método de *falsa posición* que consiste, en líneas generales, en lo siguiente:

Supongamos un punto X clave de la figura que se desea construir, obligado a estar situado sobre una cierta recta r (o circunferencia) en virtud de ciertas condiciones del enunciado. Tomémosle sobre ella arbitrariamente, es decir, en *falsa posición*. Obsérvese si esta falsa posición ocasiona un *desdoblamiento* en algún punto Y de la figura ligado a X por *doble condición*, y analícese si, al variar X sobre r , los puntos desdoblados $Y'Y''$ resultan ligados entre sí por una *proyectividad*. Si así es, los puntos dobles de esta proyectividad darán las soluciones del problema.

Análoga aplicación del método, para rectas clave obligadas a pasar por un punto o a ser tangentes a una circunferencia.

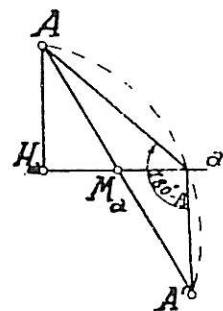
Empecemos por un ejemplo propuesto en el Tomo I (Ejercicio 20 de la lección 34).

Ejemplo 1.º Construir un triángulo, conociendo un ángulo A , la altura h_a y la mediatriz m_a concurrentes en su vértice.



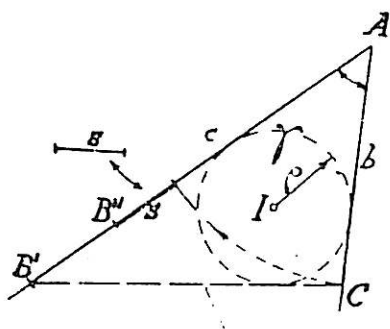
La altura h_a y la mediatriz m_a determinan el triángulo rectángulo AH_aM_a , y fijan la recta a que contiene el lado opuesto. En ella debe estar el vértice B ; eligiéndolo arbitrariamente (falsa posición), debe corresponderle como tercer vértice del triángulo C su simétrico C' respecto de M_a ; y asimismo, la condición de que el ángulo valga A , hace corresponder a B un punto C'' tal, que $\sphericalangle BAC'' = \sphericalangle A$, existiendo una proyectividad entre la serie descrita al variar B y la que resulta para C'' , ya que el haz engendrado por BA es congruente del engendrado por AC'' . Los puntos dobles de la proyectividad resultante entre C' y C'' dan el tercer vértice C del triángulo, determinando éste.

Claro es que se puede obtener una solución métrica más breve construyendo el simétrico A' de A respecto de M_a y hallando las intersecciones de a con los arcos capaces de $180^\circ - A$ construídos sobre AA' ; pero es preciso, para que tal solución se ocurra, pensar en el paralelogramo que resulta de aplicar al triángulo pedido la simetría respecto de M_a .



Ejemplo 2.º Construir un triángulo, dados un ángulo A , la diferencia $c - b = s$ de los lados que lo forman y el radio ρ del círculo inscrito.

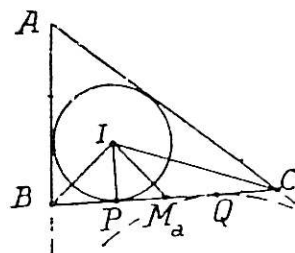
Colocada una circunferencia γ de radio ρ tangente a los dos lados del ángulo A , elijamos un vértice C arbitrario (falsa posición) en uno de los lados. Trazando por C otra tangente a γ , debe corresponder a C un vértice B' en el otro lado, tal que al variar C sobre el lado AC , la serie C es proyectiva con la que engendra B' (lec. anterior, § 2). Pero teniendo además en cuenta que debe ser $c = b + s$, podemos construir un nuevo punto B'' tal que $AB'' = AC + s$. La serie B'' será asimismo proyectiva (congruente) con la serie C . Los puntos dobles de la proyectividad resultante entre B' y B'' darán las soluciones posibles para el vértice B , determinando el triángulo.



Se puede resolver métricamente este problema aplicando el problema anterior al triángulo BIC si se observa que:

- 1.º El ángulo BIC vale $180^\circ - \frac{1}{2}(C+B) = 90^\circ + \frac{1}{2}A$.
- 2.º El segmento PM_a comprendido entre el punto P de contacto del círculo inscrito con el lado BC y el punto medio M_a vale $\frac{1}{2}(b-c)$. En efecto, si Q es el punto de contacto de la circunferencia exinscrita tangente al mismo lado, se tiene (Tomo I, lec. 24, § 7) $PQ = b - c$. $CP = BQ$ y, por tanto, $M_aP = M_aQ = \frac{1}{2}(b - c)$. Del triángulo BIC se conoce, pues, el ángulo en I y el triángulo formado por la mediana y la altura concurrentes en I .

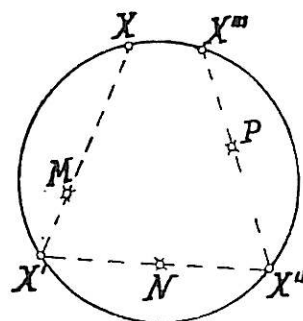
Con ello quizás se consiga mayor brevedad de construcción, pero a costa de cuánto artificio de razonamiento.



7. El problema de Castillón.—El ejemplo más saliente de la economía conceptual que el método proyectivo imprime a muchos problemas métricos lo constituye el famoso problema de *Castillon*:

Inscribir en una circunferencia un triángulo cuyos lados pasen ordenadamente por tres puntos dados MNP.

La solución métrica de este problema, propuesta en 1742 por el matemático suizo *Cramer* al italiano *Salvemini* (apodado *Castiglione* por ser el nombre del pueblo toscano en que nació), fué dada por éste después de largos años de tentativas (*) en 1776, mereciendo publicarse en las actas de la «Academia de Berlín». El problema fué también resuelto por geómetras posteriores, entre ellos *Lagrange*, *Malfatti*, *Giordano de Ottajano* (elegante solución dada a los dieciséis años de edad); pero en el siglo XVIII no se podía sospechar aún cuán trivial resulta este problema tratado por los métodos de la Geometría proyectiva, que iniciaba *Poncelet* a comienzos del siglo XIX. Véase la solución:



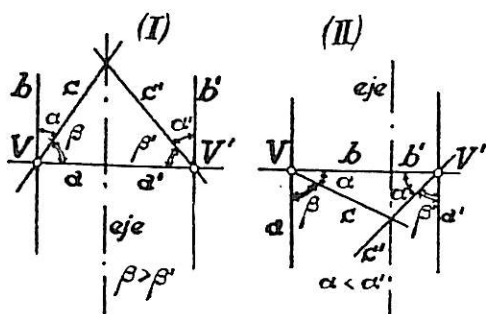
Proyectando un punto X arbitrario de la circunferencia desde M sobre la misma según un nuevo punto X' , la relación entre X y X' es proyectiva (involución de centro M). Proyectando análogamente X' desde N sobre X'' , y X'' desde P sobre X''' , los puntos dobles de la proyectividad resultante entre X y X''' darán los puntos X con los que se cierra el triángulo.

Como se comprende, la solución se generaliza fácilmente al caso en que se den n puntos $MNP \dots S$ y se pida un n -gono cuyos lados pasen ordenadamente por ellos (**).

8. Aplicación a un problema del espacio.—1. Colocar dos haces proyectivos de manera que uno de ellos sea proyección ortogonal del otro.

Supondremos que los haces no son iguales, pues si lo fueran la solución sería trivial, ya que bastaría colocar uno de ellos en un plano paralelo al que contiene el otro.

Para resolver el problema hallemos dos rayos rectangulares ab en uno de los haces cuyos homólogos $a'b'$ sean también perpendiculares (§ 3) y fijados los vértices V y V' , coloquemos los haces en forma perspectiva de modo que coincidan a con a' (figura I), o b con b' (fig. II). Obsérvese que el eje perspectivo no puede ser mediatriz de VV' por haber supuesto no iguales los haces. Es fácil ver que si en la primera posición el eje (paralelo a b y b') está más próximo a V , en la segunda estará más próximo a V' . En el primer caso podemos colocar el haz $a'b'c'$ de modo que se proyecte ortogonalmente sobre el abc girándole alrededor del eje, hasta que V' se sitúe en la perpendicular al plano por V . En el segundo



modo que se proyecte ortogonalmente sobre el abc girándole alrededor del eje, hasta que V' se sitúe en la perpendicular al plano por V . En el segundo

(*) Anteriormente sólo se conocía la solución de Pappus (siglo IV) para el caso en que MNP se hallan alineados.

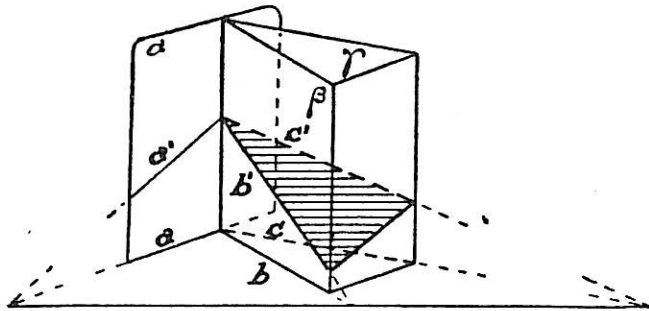
(**) De este problema dimos una solución por inversión al final de la lección 35 del Tomo I.

caso será el haz V el que podrá colocarse de forma que se proyecte ortogonalmente según el V' .

En resumen: *Dados dos haces proyectivos, podemos siempre conseguir colocar uno de ellos prefijado, de modo que se proyecte ortogonalmente según el otro.*

La resolución de este problema nos permite dar una solución muy sencilla al siguiente:

II. *Cortar un prisma triangular dado, por un plano de modo que la sección sea semejante a un triángulo dado.*



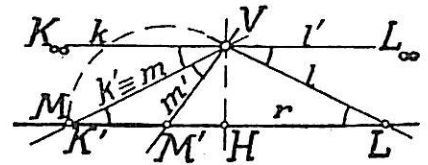
Trazado por una arista del prisma el plano paralelo a la cara opuesta, el problema se reduce a cortar el haz de los tres planos $\alpha\beta\gamma$ por otro, de modo que la sección sea una terna de rayos $a'b'c'$ de ángulos conocidos (los del triángulo dado); o lo que es lo mismo, colocar este haz en forma

que se proyecte ortogonalmente según la sección recta del haz de planos.

9. **Generación de una proyectividad elíptica mediante dos haces directamente iguales.**—Supongamos en una recta r una proyectividad acorde no involutiva de puntos límites K', L , y sea M' el punto homólogo del K' considerado como de la primera serie. Tracemos la mediatriz de $K'L$ y la circunferencia de centro M' y radio $M'K'$. Si esta circunferencia corta a la referida mediatriz en V , los haces que proyectan las dos series desde V son directamente iguales.

En efecto (fig.), la igualdad de los ángulos formados por los pares de rayos proyectantes homólogos kk', mm', ll' indica que la terna kml es directamente congruente con su homóloga $k'm'l'$ (por ser acorde la proyectividad); luego, en virtud del teorema fundamental, la proyectividad $kml \dots \bar{\wedge} k'm'l' \dots$ coincide con la referida congruencia.

Por otra parte, si tomamos el punto K' como origen de abscisas en la serie, deberá ser $b=0$ en la ecuación de la proyectividad (lec 18, § 1), es decir, quedará $axx'+cx'+d=0$, la abscisa de L será $-c/a$, la del punto medio H de $K'L$ será $-c/2a$; finalmente, la abscisa de M' homólogo del origen ($x'=0$) será $x'=-d/c$. La condición para que la circunferencia corte a la mediatriz es $K'M' > K'H : 2$, o sea $d/c > c/4a$, equivalente a $c^2 - 4ad < 0$, que es la de ausencia de raíces reales en la ecuación $ax^2 + cx + d = 0$ que da los puntos dobles. Obtenemos así el siguiente interesante resultado:



Los puntos homólogos en una proyectividad elíptica sobre una recta pueden obtenerse por intersección de los lados de un ángulo de amplitud constante girando alrededor de su vértice La demostración ha dado la construcción de dicho vértice, construcción que tiene dos soluciones simétricas, y sólo ellas, puesto que de la igualdad de los ángulos de la figura se deduce recíprocamente que V debe estar en la mediatriz de $K'L$ y verificar $VM' = M'K'$

La demostración no es válida cuando la proyectividad es involutiva. En este caso la ausencia de elementos dobles implica la separación de dos pares de elementos homólogos cualesquiera (lec. 16. § 6). Sean éstos AA' y BB' , y sea V una de las intersecciones de las circunferencias de diámetros AA' y BB' . La involución que proyecta desde V la dada, es la involución rectangular; por tanto:

El teorema anterior sigue siendo válido cuando se trata de una involución, en cuyo caso la amplitud del ángulo es de 90 grados.

También en este caso hay dos vértices V y V' simétricos respecto de la recta, que cumplen la condición del enunciado, y sólo dos, pues todos los pares de puntos homólogos AA', BB', CC', \dots dan circunferencias de un mismo haz de eje VV' (Tomo I, lec. 25).

EJERCICIOS (Referentes a todo el Capítulo)

1. Si H es el punto medio del segmento que limitan los puntos dobles M, N y los límites L y K' de una proyectividad, y llamamos H' al homólogo de H considerado como de la primera figura, demostrar que $(MNH'K') = -1$.
2. Demostrar que la proyectividad es hiperbólica o elíptica según que H' y K' estén o no al mismo lado de H .
3. Del ejercicio 1.º se desprende $\overline{HM}^2 = \overline{HH'} \cdot \overline{HK'}$. Dedúzcase de ello una construcción gráfica de los puntos dobles.
4. Hallar analíticamente dos rayos rectangulares de un haz homólogos de otros dos también rectangulares en otro haz proyectivo.
5. Las posiciones simultáneas de dos puntos móviles en movimiento rectilíneo y uniforme con velocidades distintas constituyen dos series semejantes y, por tanto, proyectivas. ¿Son también proyectivos los haces que se obtienen haciendo corresponder las posiciones de dos rectas móviles girando uniformemente alrededor de sendos puntos fijos con velocidades angulares distintas?
6. Hallar la ecuación de la proyectividad cuyos puntos límites son $L(-2), K'(3)$ y en la que son homólogos $A(-1)$ y $A'(5)$. Hallar los puntos dobles, y dos puntos homólogos que disten entre sí 4 unidades.
7. Resolver el ejercicio anterior gráficamente, proyectando sobre una circunferencia.
8. Resolver gráficamente los ejercicios análogos de la lección 18.
9. Trazar por un punto dado P una recta que corte a dos series proyectivas dadas en dos puntos homólogos.
10. Colocar sobre una recta dada un segmento de longitud dada de modo que sea visto desde un punto dado P bajo un ángulo dado.
11. Hallar sobre una recta un segmento que sea visto desde dos puntos dados bajo ángulos dados.
12. Dadas en un plano dos rectas a y b y dos puntos P y Q , hallar un segmento de extremos en a y b , de modo que sea visto desde P y Q según ángulos dados.
13. Trazar por un punto P un ángulo que intercepte sobre dos rectas dadas, coplanarias con P , dos segmentos dados.
14. A, A' y B, B' son dos pares de puntos dados, posiciones simultáneas de dos móviles con movimiento rectilíneo y uniforme. Hallar las posiciones de dichos puntos de tal suerte que la visual de uno a otro tenga una dirección dada.
15. Hallar un triángulo cuyos lados pasen por tres puntos dados y cuyos vértices estén en tres rectas dadas.
16. Dadas dos rectas r y r' y sobre ellas dos puntos P y P' y dos sentidos, trazar por un punto dado A , no situado en ellas, una recta que corte a r y r' en dos puntos XX' tales que $PX + P'X' = \text{valor dado}$.
17. Idem íd. tal que $PX \cdot P'X'$ sea un valor dado.
18. Idem íd. tal que $PX : P'X'$ sea un valor dado. (Los tres problemas son de Apolonio.)
19. Hallar en una recta un punto que forme la misma razón doble con dos ternas dadas.
20. Caso particular del problema anterior es el siguiente, también de Apolonio: Dados en una recta dos pares de puntos $AB, A'B'$, hallar un punto H tal que $HA : HB = k(HA' : HB')$, siendo k un valor dado.
21. Trazar por un punto P una recta que forme con otras dos a, b , coplanarias con P , un triángulo de área dada. (Este problema, lo mismo que el número 18, fué resuelto en el primer tomo mediante recursos métricos; v. lec. 35, § 3.)
22. Dividir un triángulo ABC , mediante una recta que pase por un punto P de su plano, en dos áreas que estén en una razón dada.
23. Trazar por un punto del plano de una circunferencia, una recta que corte a dicha circunferencia en dos puntos homólogos en una proyectividad circular definida sobre ella. Número de soluciones. Caso particular cuando la proyectividad es involutiva.
24. Se desea colocar sobre una circunferencia un arco de valor dado de modo que se proyecte desde un determinado punto de dicha circunferencia, sobre una recta dada según un segmento de longitud dada.

Capítulo VI.—PROYECTIVIDAD ENTRE FIGURAS DE SEGUNDA Y TERCERA CATEGORÍA

LECCIÓN 21.—HOMOGRAFÍA Y HOMOLOGÍA ENTRE FIGURAS PLANAS

1. Figuras planas homográficas.—Diremos que dos figuras planas son homográficas cuando se corresponden punto a punto y recta a recta, de tal modo que a todo punto y recta incidentes en una de las figuras correspondan un punto y una recta también incidentes en la otra.

Demostremos :

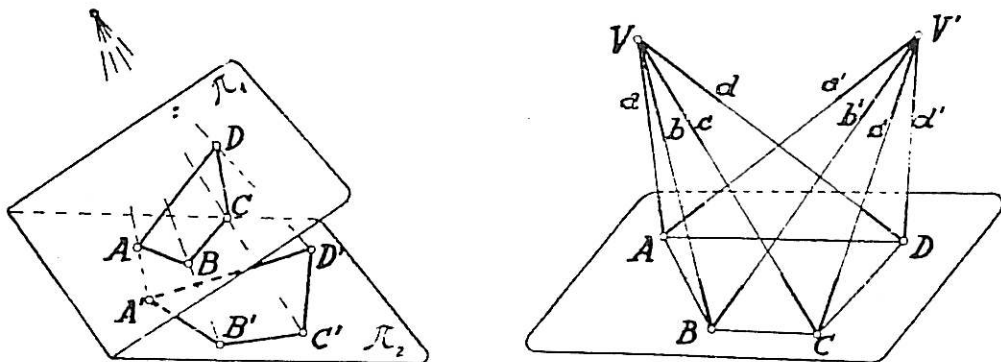
En dos figuras planas homográficas a una serie de puntos (haz de rectas) de una de las figuras corresponde otra serie (haz) proyectiva con ella en la otra.

En efecto, a puntos alineados (rectas concurrentes) en una figura corresponde, en virtud de la definición, puntos alineados (rectas concurrentes) de la otra. Definida, mediante un cuadrivértice, una cuaterna armónica en una de las figuras, quedará definida en la otra el cuadrivértice homólogo y, por tanto, una cuaterna armónica homóloga. Al existir correspondencia en las figuras armónicas podemos afirmar (Staudt) que las series (haces) homólogas son proyectivas. Y como consecuencia de este teorema resulta :

En dos figuras planas homográficas se conservan las razones dobles.

Análoga definición y propiedades podemos establecer entre formas radiadas, sustituyendo el concepto de «punto» por «plano».

El ejemplo más sencillo de formas planas homográficas lo constituyen dos secciones planas de una misma radiación y se llaman *perspectivas*. Los puntos



(rectas) homólogos son los de intersección de una misma recta (plano) de la radiación por los dos planos.

El ejemplo más sencillo de formas radiadas homográficas lo constituyen dos radiaciones proyectantes de una misma forma plana, y se llaman asimismo

perspectivas. Los rayos (planos) homólogos son los proyectantes de un mismo punto (recta) de la forma plana proyectada.

Pronto demostraremos que dos figuras homográficas cualesquiera pueden obtenerse como producto de perspectividades, es decir, de proyecciones y secciones.

2. Grupo de las homografías.—De la definición se desprende :

La transformación inversa de una homografía es homografía.

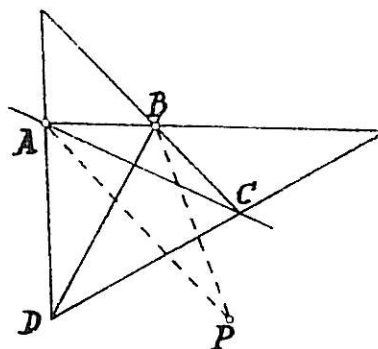
El producto de dos homografías es otra homografía.

La identidad es una homografía.

Por tanto: *Todas las homografías entre formas planas forman grupo.* Y lo mismo las homografías entre formas radiadas.

3. Teorema fundamental en la homografía.—Una homografía entre dos formas planas superpuestas en las que son *dobles* cuatro puntos $ABCD$ no alineados tres a tres, es la *identidad*.

En efecto: Por cada uno de los puntos $ABCD$ pasan tres rectas dobles (las que le unen a los demás); luego los haces de vértices A, B, C, D son dobles. Dado otro punto P cualquiera del plano, proyectémosle desde dos de los puntos $ABCD$ no alineados con él (por hipótesis, sólo dos a lo sumo de ellos pueden estar alineados con P). Sean AP y BP los rayos proyectantes; estos rayos son dobles por pertenecer a los haces de vértices A y B ; luego también es doble P .



4. La homología y sus propiedades.—Dos formas planas perspectivas, es decir, secciones de una misma radiación, se llaman también *homológicas*, y en ellas se verifica :

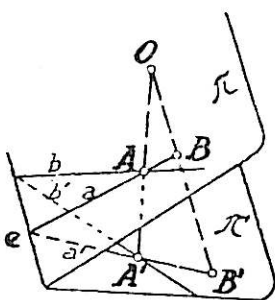
1.º Los puntos homólogos están alineados con un punto fijo O (vértice de la radiación cortada) llamado *centro de la homología*.

2.º Las rectas homólogas se cortan en puntos de una recta e (intersección de los dos planos de las secciones) llamado *eje de la homología*.

Es fácil ver que cualquiera de las dos condiciones es suficiente para caracterizar la homología :

Si dos formas planas situadas en planos distintos se corresponden punto a punto de modo que los pares de puntos homólogos estén alineados con un punto fijo O y consideramos como recta homóloga de la determinada por dos puntos cualesquiera AB de la primera figura la determinada por los puntos homólogos $A'B'$, ambas figuras son homológicas, pues son secciones de una misma radiación de vértice O .

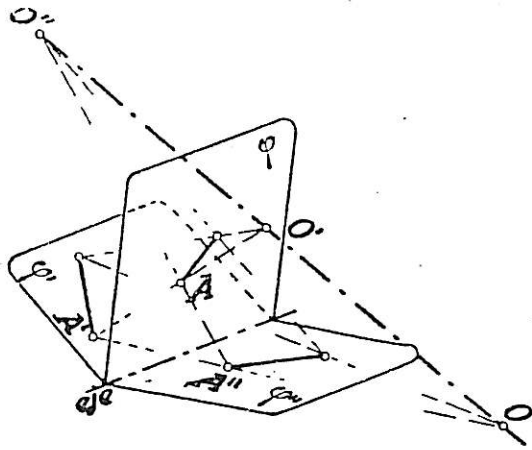
Si dos formas planas situadas en planos distintos π y π' se corresponden recta a recta de modo que los pares de rectas homólogas se corten en puntos de la recta de intersección de π y π' , y consideramos como punto homólogo



del de intersección de dos rectas cualesquiera ab de una figura el determinado por la intersección de sus homólogos $a'b'$, las dos figuras son homológicas. Pues al ser coplanarias dos rectas homólogas cualesquiera, lo son también las rectas AA' , BB' que unen los pares de puntos homólogos situados en ellas, de donde se desprende que todas las rectas AA' , BB' , ... que unen pares de puntos homólogos se cortan dos a dos. Y como todas no son coplanarias, pasan forzosamente por un mismo punto O (lec. 13, § 4).

Este segundo teorema puede también enunciarse más brevemente así: *Dos formas planas homográficas situadas en planos distintos que tienen doble la serie común, son homológicas.* Pues al ser dobles todos los puntos de esta serie, en ellos deben concurrir las rectas homólogas.

5. **Teorema de las tres homologías.**—*Dos figuras ϕ' y ϕ'' no coplanarias, homológicas de una tercera ϕ respecto de un mismo eje e y de homología y de dos centros distintos O' y O'' son homológicas entre sí respecto del mismo eje e y de un centro O alineado con O' y O'' .*

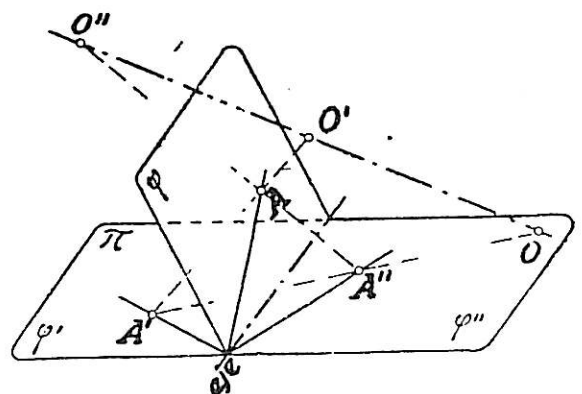


$AA'A''$ determinado por un punto cualquiera A de ϕ y sus dos homólogos $A'A''$ contiene O' y O'' (situados respectivamente en AA' y AA''), la recta $A'A''$ de este plano corta la $O'O''$. En resumen: Todas las rectas que unen pares de puntos homólogos de ϕ' y ϕ'' se cortan entre sí y con $O'O''$. Luego concurren en un punto O (centro de la homología $\phi'\phi''$) situado en $O'O''$.

6. **Homología entre formas planas superpuestas.**—Si ϕ' y ϕ'' están en un mismo plano π , podemos repetir el último razonamiento: El plano $AA'A''$ contiene $A'A''$ y $O'O''$. Luego: *Las rectas $A'A''$ que unen pares de puntos homólogos de ϕ' y ϕ'' pasan ahora por el punto fijo O de intersección de $O'O''$ con π .* Por otra parte, las rectas homólogas de ϕ , ϕ' , ϕ'' concurren en puntos del eje e .

Obtenemos así una correspondencia entre dos formas planas superpuestas, ϕ' y ϕ'' , que sigue llamándose *homología* porque verifica las mismas condiciones 1.^a y 2.^a (§ 4) de la homología entre formas no coplanarias, demostrándose, análogamente, que basta que se cumpla una condición para que se cumpla la otra.

Así, por ejemplo: Si dos formas ϕ'



y φ'' son tales que los pares de rectas homólogas se cortan en puntos de una recta e (eje) y hacemos corresponder el punto de intersección de dos rectas con el de sus homólogas, las formas son homológicas. Pues proyectando una de las figuras φ' desde O' sobre un plano que pase por e , obtenemos una figura φ que será homológica con φ'' por tener con ella la serie e doble. Luego φ' y φ'' son homológicas entre sí, por el teorema anterior. Y, correlativamente: Si se corresponden φ' y φ'' de modo que los pares de puntos homólogos están alineados con un centro O , los pares de rectas homólogas (determinados por puntos homólogos) se cortan en puntos de una recta eje.

En resumen. Dos figuras homológicas o coplanarias son dos figuras homográficas que tiene dobles todas las rectas de un haz O y todos los puntos de una serie e (eje) y uno de estos hechos implica el otro.

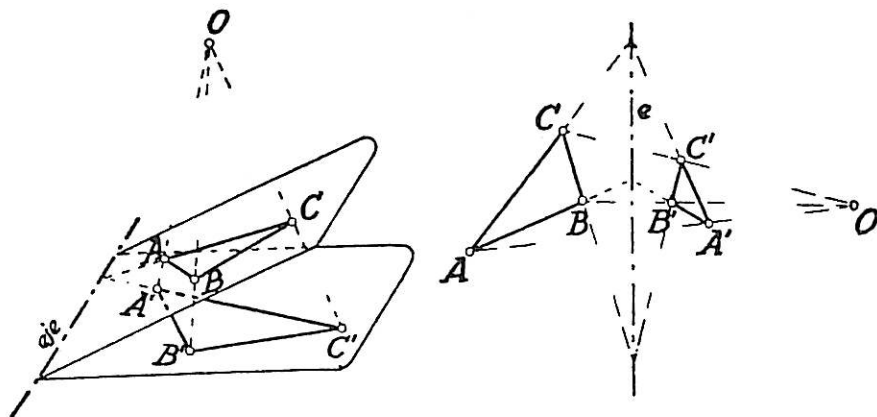
El teorema de las tres homologías enunciado en el párrafo anterior, subsiste para homologías entre figuras coplanarias.

En efecto si φ' es homológica de φ , y φ lo es de φ'' con el mismo eje e y centros O'' y O' , la homografía resultante entre φ' y φ'' tendrá la serie e doble, luego es homología de eje e , y como la recta $O'O''$ es doble por serlo en ambas transformaciones, contiene el centro O , es decir los tres centros O , O' , O'' están alineados.

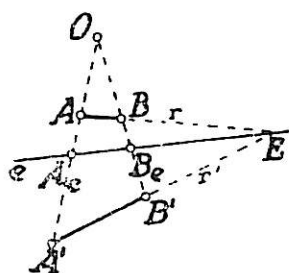
En una homología entre formas planas superpuestas nada se opone a que el centro O esté sobre el eje; bastará imaginar en la figura anterior los centros O' y O'' situados en una recta secante al eje e . Los razonamientos no sufren, con ello, alteración alguna y las condiciones que caracterizan la homología siguen siendo las mismas.

7. Teorema de Desargues o de los triángulos homológicos.—Si en lugar de considerar dos figuras en general, consideramos dos triángulos homológicos, los teoremas anteriores se convierten en:

Dos triángulos cuyos pares de lados homólogos se corten en puntos de una



recta, tienen los pares de vértices homólogos alineados con un punto, es decir, son homológicos. Y recíprocamente (correlativo). Basta repetir los razonamientos de los §§ 5 y 6.



8. Determinación de una homología.—Una homología queda determinada dando:

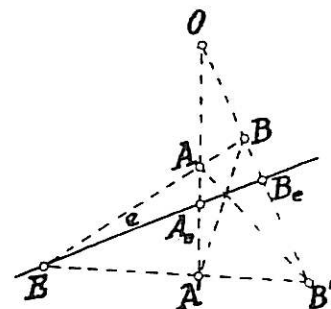
- 1.º El centro, el eje y un par de puntos homólogos A, A' , pues uniendo A y A' con puntos del eje, se obtienen cuantas rectas rr' homólogas se desee, y sobre ellas, cuantos puntos homólogos $BB' \dots$ hagan falta, alineándolos con O .
- 2.º El centro, el eje y un par de rectas homólogas.
- 3.º Dos triángulos homológicos, es decir, cuyos vértices homólogos estén alineados con un punto O (o cuyos lados homólogos se corten en puntos de una recta). Una de las condiciones implica la otra, quedando así determinados el centro y el eje de la homología.

9. Característica de una homología. Homologías involutivas.—En dos formas planas homológicas superpuestas, cuyo centro sea exterior al eje, la razón doble de la cuaterna $AA'OA_e$ formada por dos puntos cualesquiera AA' homólogos, el centro O y el punto de intersección A_e de la recta que los une con el eje, es constante y se llama característica de la homología.

En efecto; por concurrir las rectas AB y $A'B'$ que unen pares de puntos homólogos en un punto E del eje, las cuaternas $AA'OA_e$ y $BB'OB_e$ son perspectivas de donde $(AA'OA_e) = (BB'OB_e)$; y análogamente $(A_1A'_1OA_e)$ siendo $A_1A'_1$ otro par homólogo cualquiera en el rayo OA_e .

Si esta razón doble vale -1 , todos los pares de puntos homólogos están armónicamente separados por el centro y el eje, y la homología se llama involutiva por corresponderse doblemente todos los pares de elementos homólogos.

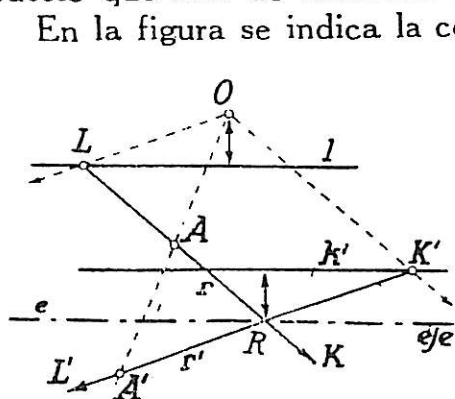
En efecto, permutando A y A' es en tal caso

$$(AA'OA_e) = (A'A_1OA_e) \quad (= -1)$$


En el eje son concurrentes, entonces, no sólo AB y $A'B'$, sino también AB' y BA' . En virtud del teorema basta que se correspondan dos puntos AA' doblemente para que se correspondan doblemente los demás.

10. Rectas límites de una homología.—Se llaman rectas límites k', l de una homología entre formas planas, las rectas homólogas de la recta impropia del plano, considerada como de una y otra figura.

De esta definición se desprende: Las rectas límites son paralelas al eje puesto que han de concurrir en él con la recta impropia.



En la figura se indica la construcción de estas rectas límites en una homología entre formas planas superpuestas, dada por el eje e , el centro O y un par de puntos homólogos A y A' .

Unido el punto R del eje con A y A' se obtienen dos rectas homólogas r y r' . El punto impropio K de r tiene por homólogo K' , intersección de r' con la paralela por O a r . Análogamente se obtiene el punto L homólogo del impropio L' de r' . Las paralelas al

eje por L y K' son, respectivamente, las rectas límites l y k' pedidas.

Puesto que $OLRK'$ es un paralelogramo, resulta $OL=RK'$ de donde:

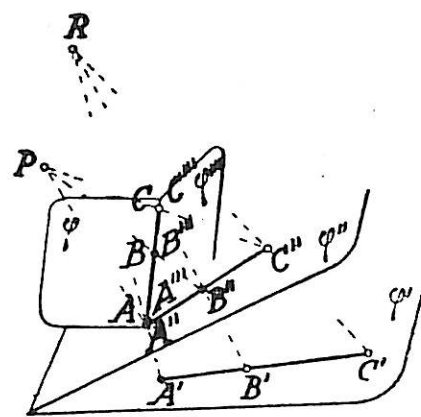
El centro dista de una recta límite l lo mismo que dista el eje de la otra k' .

El conocimiento de una recta límite equivale al de dos rectas homólogas. Una homología queda, pues, definida, dando el centro, el eje y una recta límite.

11. Reducción de una homografía a producto de proyecciones y secciones.—Dos figuras homográficas planas φ y φ' pueden obtenerse una de otra mediante una sucesión de proyecciones y secciones. De otro modo: Toda homografía es un producto de perspectivas.

Para demostrarlo supondremos φ y φ' no coplanarias (si lo fueran proyectaríamos una de ellas sobre otro plano).

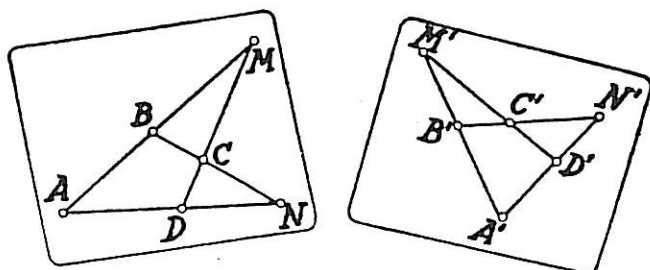
Consideremos, ahora, dos series homólogas $ABC... \bar{\wedge} A'B'C'...$ Desde un punto R de la recta AA' proyectemos la figura φ' , a que pertenece la serie $A'B'C'...$, sobre un plano que pase por A (distinto del de φ). Obtendremos así una nueva figura φ'' homológica de φ' y por tanto homográfica de φ . La serie $A''B''C''...$ (proyección de $A'B'C'...$) será perspectiva con la $ABC...$ por tener ambas dos puntos homólogos coincidentes $A''\equiv A$. Sea P su centro perspectivo. Proyectando φ'' desde P sobre un plano que pase por $ABC...$ (distinto del de φ) obtendremos φ''' homográfica de φ con $A''' \equiv A, B''' \equiv B, C''' \equiv C$ y, por tanto φ y φ''' tendrán doble la serie $ABC...$, es decir, serán homológicas con un cierto centro O (no representado en la figura), quedando así relacionadas φ y φ' por una sucesión de tres proyecciones y secciones, es decir, un producto de tres homologías de centros R, P y O .



(Si $A''B''C''$ coincidiese con ABC quedarían relacionadas homológicamente φ y φ' , ahorrándose una operación.)

12. Determinación de una homografía.—Toda homografía queda determinada dando dos cuadrivértices homólogos $ABCD$ y $A'B'C'D'$.

Basta imaginar el razonamiento anterior aplicando a las series proyectivas definidas por dos ternas homólogas $ABM \bar{\wedge} A'B'M'$, cada una de las cuales está formada por dos



vértices A, B y el punto diagonal M alineado con ellos. La homología final entre φ y φ''' tendrá por eje $ABM \equiv A''B''M''$ y los triángulos homológicos DCN y $D'''C'''N'''$ determinarán el centro.

Quedan así enlazadas las figuras φ y φ' a que pertenecen, respectivamente, $ABCD$ y $A'B'C'D'$ por una sucesión de proyecciones y secciones, es decir, esta-

blecida entre ellas una relación homográfica, la cual es única, porque si hubiera otra φ_1 homográfica de φ con los mismos elementos $A'B'C'D'$ serían φ' y φ_1 homográficas entre sí con estos cuatro puntos dobles, lo que implica la identidad de φ' y φ_1 (Teorema fundamental, § 3).

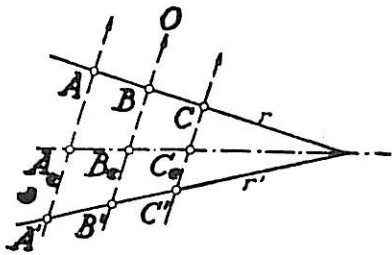
13. Producto de homologías involutivas.—El producto de dos homologías involutivas de ejes y centros respectivos O_1e_1, O_2e_2 tales que O_1 esté en e_2 y O_2 en e_1 es otra homología involutiva cuyo centro es la intersección e_1e_2 y cuyo eje es la recta O_1O_2 .

En efecto, a todo punto A de la recta O_1O_2 le corresponde el mismo punto A' (separado armónico respecto de O_1O_2) en ambas homologías. Luego A' es doble en el producto, lo mismo que A . Todos los puntos de la recta O_1O_2 son, pues, dobles. Y también lo es el punto e_1e_2 .

LECCIÓN 22.—HOMOLOGÍAS Y HOMOGRAFÍAS PARTICULARES APLICACIONES

1. La homología afín.—Una homología de eje propio y centro impropio se llama *homología afín*. La dirección del centro impropio se llama *dirección de afinidad*.

Una homología afín queda, pues, definida dando el eje y un par de puntos homólogos, puesto que éstos determinan la dirección del centro.



Las construcciones son análogas a las de la homología, de la que es caso particular, excepto la construcción de rectas límites, que no existen aquí por ser doble la recta impropia.

Cuando la dirección de afinidad no coincide con la del eje, la característica o razón doble $(AA'O A_e)$ determinada por un par de puntos

homólogos cualesquiera AA' , el centro y el eje, se reduce a la razón simple $\frac{A_e A'}{A_e A}$ de distancias del eje a cada par de puntos homólogos, tomadas en la dirección de afinidad. Esta constante se llama *razón de afinidad*.

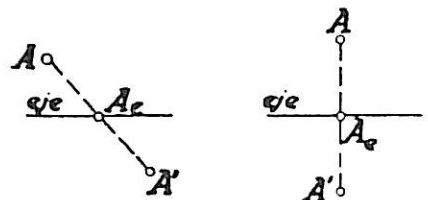
Las series homólogas situadas en las rectas dobles son, pues, semejantes. También lo son las series homólogas situadas en dos rectas homólogas cualesquiera $ABC \dots A'B'C'$ por ser secciones de un haz paralelo (Thales). La razón de semejanza varía, sin embargo, al pasar de una recta a otra. Podemos, pues, decir:

En la homología afín es invariante la razón entre dos segmentos alineados cualesquiera, es decir, es invariante la razón simple de toda terna alineada.

Esta propiedad es general a todas las homografías en las que es doble la recta impropia, puesto que la correspondencia de los puntos impropios de dos series homólogas implica que sean semejantes. Tales homografías se llaman *afinidades*. Entre ellas las más interesantes son las *homologías afines* que acabamos de estudiar y que se suelen llamar (abreviada pero impropriamente) con el nombre genérico de *afinidades*.

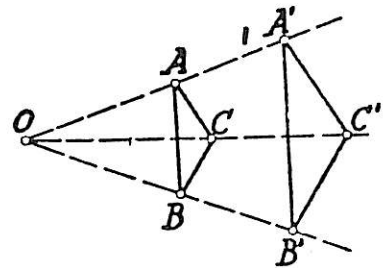
2. La simetría respecto de un eje.—Si la homología afín es involutiva la característica $\frac{A_e A'}{A_e A} = -1$, $A_e A' = -A_e A$; los

pares de puntos homólogos equidistan del eje y se obtiene una simetría ortogonal u oblicua respecto del eje, según que sea o no perpendicular al eje la dirección de afinidad.



3. La homotecia.—Si la homología tiene centro propio y eje impropio, cada par de puntos homólogos AA' verificará la relación (característica)

$$AA' \cdot OA_{\infty} = \frac{OA}{OA'} = \text{const.}$$



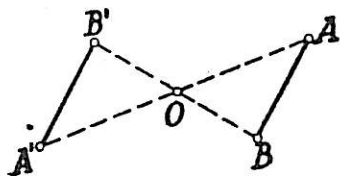
Es decir, se obtiene una *homotecia de centro O*, relación ya estudiada en el tomo I, lección 20.

Los teoremas allí establecidos sobre triángulos homotéticos no son más que un caso particular de los del § 7 de la lección anterior.

Como ya vimos en el tomo I, la razón de dos segmentos cualesquiera de una figura es igual a la de sus homólogos en la figura homotética.

En toda homotecia es invariante la razón de dos segmentos CUALESQUIERA, lo que la distingue métricamente de la afinidad.

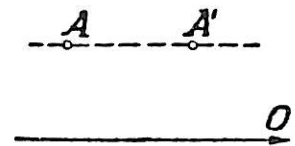
4. La simetría central.—Si la homotecia es involutiva, es decir, si



$$\frac{OA}{OA'} = -1,$$

resulta $OA = -OA'$ y los pares de puntos homólogos AA' , BB' , ... equidistan del centro, resultando la simetría central de centro O , estudiada en el tomo I, lección 5.^a

5. La traslación.—Si una homología tiene eje impropio y centro impropio, en cada recta doble que pasa por el centro, es decir en cada paralela a la dirección de éste, existirá una proyectividad entre puntos homólogos que tendrá como único punto doble dicho centro impropio. Se trata, pues, (lección 17, § 9), de una *traslación* cuyas guías (rectas dobles) son paralelas a la dirección del centro.



La traslación en el plano es, pues, un caso particular de la homología con centro situado sobre el eje, y fué estudiada con detalle en el tomo I, Lección 7.^a

6. Congruencias, giros y semejanzas.—Un giro en el plano (y en general una congruencia) que no sea traslación ni simetría, no es caso particular de la homología por no existir en él serie doble ni haz doble alguno. No hay en él más que un punto doble real que es el *centro del giro*.

Otro tanto podemos decir de una semejanza que no sea homotecia. (Véase Tomo I, Lecc. 20.)

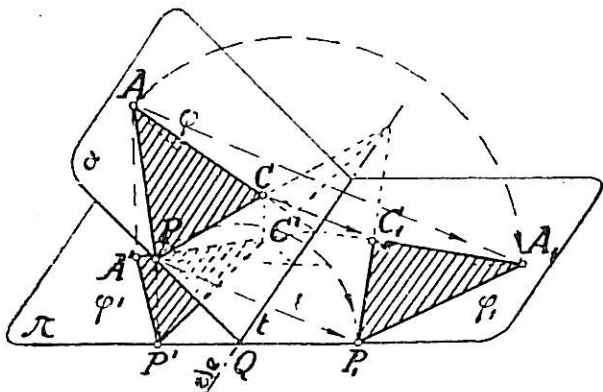
Unas y otras son, sin embargo, casos particulares de la homografía, por cuanto transforman puntos en puntos, rectas en rectas y en ellas se conserva la relación de incidencia, cumpliendo así las condiciones que definen la homografía (Lección anterior, § 1).

7. Geometría métrica y Geometría proyectiva.—En resumen: *Todas las transformaciones geométricas planas estudiadas en el tomo I (excepto la inversión) son casos particulares de la transformación homográfica.*

La Geometría métrica plana, es decir la Geometría que estudia las propiedades invariantes en estas transformaciones, aparece así como un capítulo de la Geometría proyectiva plana.

8. Abatimiento de una figura plana dada por su proyección ortogonal. La solución de los problemas métricos en los distintos sistemas de representación, de los que daremos una ligera idea en el capítulo siguiente, se apoyan en una operación fundamental: *el abatimiento de una figura plana sobre el plano del dibujo.* Vamos a estudiar, pues, esta operación de una vez para todas.

Sea π el plano del dibujo y α un plano secante, del que conocemos su traza t sobre π y un punto P definido por su proyección ortogonal P' y la cota o distancia PP' .



Supongamos trazada en α una figura φ de la que conocemos su proyección ortogonal φ' sobre el plano del dibujo π . Queremos conocer la verdadera forma y dimensiones de φ .

Para ello *abatiremos* α sobre π : significa: giraremos α alrededor de su traza t hasta que se superponga al plano π . Se puede abatir girando en dos sentidos. Se suele elegir el sentido

que mejor convenga a la claridad de las construcciones y a las dimensiones del dibujo.

La figura φ se convierte en φ_1 de modo que cada par de puntos homólogos A (original) y A_1 (abatido) están en una recta perpendicular al plano bisector del diedro descrito en el abatimiento. Como la dirección de esta perpendicular es fija, podemos afirmar:

Entre la figura original φ y su abatimiento φ_1 existe una homología afín de eje t y de dirección normal al eje. Además:

Entre la figura original φ y su proyección ortogonal φ' existe asimismo una homología afín de eje t y de dirección normal al eje.

Aplicando el teorema de las tres homologías, podemos sacar como consecuencia:

Entre la proyección ortogonal φ' (conocida) de la figura y su abatimiento φ_1 (incógnita del problema) existe una homología afín de eje t y dirección perpendicular a él. (Puesto que el centro, por estar alineado con los centros impropios de las homologías componentes, será también impropio y estará contenido en la orientación perpendicular a t que determinan las dos direcciones antes mencionadas.)

De lo dicho resulta que *para resolver el problema bastará dar dos puntos homólogos en esta afinidad*

Entre φ' y φ_1 existe una homología de eje t cuyo centro es el punto O_1 situado en una paralela por O a la dirección de afinidad, es decir, en una perpendicular al eje t , y por tanto a la línea de fuga l' y a una distancia QO_1 de ella igual a QO hipotenusa del triángulo rectángulo $OO'Q$ del que se conocen los catetos $O'O$ y $O'Q$.

Con lo dicho podemos hallar el centro de homología O_1 .

Una vez conocido el centro y el eje de la homología entre φ' y φ_1 y la recta límite l' , tenemos todos los elementos necesarios para construir φ_1 conocida φ' es decir, para hallar la verdadera forma de una figura plana φ conocida una proyección cónica de la misma sobre su plano π .

Pero también nos permitirá dicha homología determinar φ' conocida φ_1 , es decir, construir la perspectiva de una figura plana conocida, o *prever el efecto visual* de una forma ideada en proyecto. Por ello estas operaciones son de frecuente aplicación en la técnica (fotogrametría, arquitectura, etc.).

Ejemplo.—En la figura de la hoja adjunta se ha hecho aplicación de lo anterior para deducir de una fotografía del monasterio de El Escorial las proporciones del rectángulo fundamental de la planta.

Para ello hemos supuesto la fotografía como una proyección central desde un centro O situado en una perpendicular por el centro O' de la placa. En la fotografía se obtienen fácilmente dos puntos de fuga $L'F'$ correspondientes a las dos direcciones horizontales ortogonales de las fachadas. Estos puntos de fuga de la proyección (homólogos de los impropios en la realidad) deben proyectarse desde el centro O_1 de homología según dos direcciones ortogonales. Por tanto, el centro O_1 de homología está en la circunferencia de diámetro $L'F'$ y en la perpendicular a ésta recta (límite) l' por O' (centro de la fotografía).

La traza t se ha elegido arbitrariamente, paralela a l' a no gran distancia de l' con objeto de obtener un abatimiento dentro de los límites del dibujo. Esta recta corta al contorno de la planta en los puntos A, B , que serán, por tanto, dobles en la homología. Con la traza como eje de homología, el punto O_1 como centro y l' como recta límite se hallan inmediatamente los abatimientos $M_1N_1P_1$ de los puntos MNP vértices del rectángulo buscado.

Obtenemos así un rectángulo semejante al verdadero (*).

Para hallar las dimensiones efectivas necesitamos conocer *una sola medida* de un segmento cualquiera del edificio.

Leemos, por ejemplo, que la altura de la cornisa es de 17 metros. Este segmento lo tenemos en AC sobre el plano del cuadro o del dibujo (elegido indirectamente al fijar la traza) y bastará medirlo para tener la razón de semejanza $k = \overline{AC} : 17$ m. En el dibujo original (del que la figura del libro es reducción) hemos medido $AC = 14,5$ mm., de donde

$$k = 14,5 : 17000 \cong 1 : 1170$$

De esta razón se desprenden valores aproximados de las dimensiones

$$\text{Longitud fachada principal} \cong \overline{M_1P_1} \cdot 1170 = 175 \text{ mm} \cdot 1170 = 205 \text{ m.}$$

$$\text{» » norte} \cong \overline{M_1N_1} \cdot 1170 = 143 \text{ mm} \cdot 1170 = 167 \text{ m.}$$

Las dimensiones verdaderas son 207 m. y 161 m. La gran oblicuidad con que se cortan las rectas que dan N_1 es causa de considerable error.

(*) Se comprende que la verdadera traza del plano horizontal del suelo del Monasterio sobre el de la placa cae fuera de los límites del dibujo, de modo que se imagina sustituida la placa por un plano del cuadro paralelo pasando por t y hechas todas las construcciones a tamaño reducido, como si se tratara de una reproducción del edificio en miniatura

LECCIÓN 23.—EL GRUPO PROYECTIVO. GEOMETRÍA PROYECTIVA
Y GEOMETRÍA MÉTRICA

Vistas, en lo que precede, algunas de las aplicaciones elementales más importantes de la Geometría proyectiva, nos limitaremos, en esta lección de complemento, a dar una ligera idea de las restantes transformaciones de la Geometría proyectiva plana y del espacio, hasta completar el grupo proyectivo, con objeto de tener una visión sintética de la Geometría proyectiva y de su conexión con la Geometría métrica.

1. La correlación entre formas de segunda categoría.—Diremos que entre dos figuras planas φ y φ' existe una *correlación* cuando se ha establecido entre ellas una correspondencia de modo tal que:

- I. A todo punto (recta) de φ corresponda una recta (un punto) de φ' .
- II. Si un punto y una recta de φ son incidentes, sus homólogos en φ' son también incidentes.

De esta definición se desprende, como para la homografía, que:

Una serie de puntos en una figura tiene como homóloga en la otra un haz proyectivo con ella, y viceversa.

El producto de dos correlaciones es una homografía.

Una correlación queda definida dando un cuadrivértice de una figura y su cuadrilátero homólogo en la otra.

Análogamente se define la correlación entre formas radiadas, cuya propiedad enunciará el lector como ejercicio.

2. Sistemas polares en formas de segunda categoría.—Las correlaciones más interesantes son aquéllas, entre formas superpuestas, en las que los elementos homólogos se corresponden doblemente. Es decir, por ejemplo, dos formas planas superpuestas en las que a todo punto del plano corresponda la misma recta homóloga, tanto si se supone perteneciente a la primera figura como a la segunda. Tales correlaciones involutivas se llaman *polaridades* y las dos figuras homólogas se dice que constituyen un *sistema polar*.

En una radiación, la relación de polaridad más sencilla es la que existe entre todas las rectas y sus planos perpendiculares. Cortando este sistema polar radiado, por un plano cualquiera, se obtiene un sistema polar plano. El sistema polar que resulta de cortar por el plano impropio se llama *polaridad absoluta* o *sistema polar absoluto*.

Otra relación de polaridad conocida del lector es la que existe entre los puntos de un plano y sus polares respecto de una circunferencia del mismo. En la última parte de este libro estudiaremos nuevos sistemas polares interesantes.

3. Homografía entre formas de tercera categoría.—Para establecer correspondencias en el espacio, hemos de suponer sus puntos agrupados en dos sistemas, cada uno de los cuales puede llenar todo el espacio, y en este sentido hablaremos de correspondencia entre dos espacios, entendiendo por tal la correspondencia existente entre dos agrupaciones distintas de sus puntos.

Diremos que entre dos espacios o dos figuras espaciales φ y φ' existe una *homografía*, cuando se correspondan punto a punto, recta a recta y plano a plano, de tal modo que a dos elementos incidentes de una figura correspondan elementos incidentes en la otra.

De esta definición se desprende fácilmente :

La identidad es un caso particular de la homografía ().*

Dos formas planas homólogas en una homografía del espacio, son homográficas entre sí.

Para definir una homografía en el espacio, basta dar cinco puntos (cuatro a cuatro no coplanarios) de una figura y sus homólogos en la otra.

El producto de dos homografías es una homografía. La transformación inversa de una homografía es también homografía. Por tanto: *Las homografías del espacio forman grupo.*

4. Correlación y polaridad en el espacio.—Análogamente :

Diremos que dos figuras del espacio son *correlativas* cuando existe entre ellas una correspondencia punto a plano, recta a recta y plano a punto, de tal modo que a dos elementos incidentes de la primera figura correspondan dos elementos incidentes de la segunda.

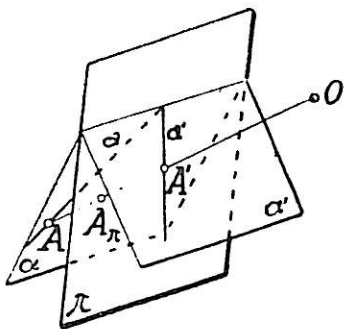
De donde: *El producto de dos correlaciones es una homografía.*

Las correlaciones más interesantes son aquellas en las que los elementos se corresponden doblemente, y se llaman *polaridades*.

Un ejemplo de polaridad entre figuras del espacio, conocido del lector, es la que define una esfera (lección 52, tomo I).

5. La homología en el espacio.—Caso particular de la homografía entre formas de tercera categoría es la *homología*, u homografía que tiene:

1.º Una forma plana doble en un plano π llamado *plano de homología*. 2.º Una forma radiada doble con vértice en un punto O llamado *centro de homología (**).*



De modo análogo a lo que ocurre en la homología en el plano: *Uno de estos dos hechos implica el otro.*

Los pares de puntos homólogos están, pues, alineados con el centro de homología. Los pares de rectas homólogas son coplanarias con el centro. Los planos homólogos y las rectas homólogas se cortan en el plano de homología.

(*) La demostración de existencia y la construcción de homografías no idénticas puede verse en los tratados especiales de Geometría proyectiva.

(**) Omitimos, análogamente, la demostración de la existencia efectiva de tal transformación general, de la que veremos inmediatamente los casos particulares más interesantes, para no prolongar demasiado esta lección.

Para definir una homología en el espacio, basta dar el plano π de homología, el centro O y un par de puntos homólogos alineados con él.

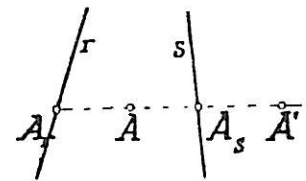
Como caso particular, el centro puede estar situado sobre el plano de homología, en cuyo caso las series homólogas situadas en las rectas dobles que pasan por el centro son prospectivas. Si tal hecho no ocurre, se demuestra, como en el plano, que:

La razón doble de la cuaterna $AA'O A_\pi$ formada por un par de puntos homólogos cualesquiera AA' , el centro O y el punto A_π de intersección de AA' con el plano de homología es constante y se llama *característica* de la homología. En todo plano doble ω que pasa por el centro O existe una homología entre los elementos correspondientes, cuyo centro es O y cuyo eje es la intersección de ω con π . Todas estas homologías planas tienen por característica la de la homología espacial de la que son subordinadas.

Si la característica vale -1 la homología es *involutiva*; los puntos, rectas y planos homólogos se corresponden doblemente y los pares de puntos homólogos están armónicamente separados por el *centro* y el *plano* de homología.

6. La homografía biaxial.—Se llama homografía biaxial la que tiene dos series dobles *cruzadas* r, s llamadas *ejes* de la homografía. (Si fueran concurrentes, sería doble toda la figura plana del plano que las contuviera, es decir, se trataría de una homología.)

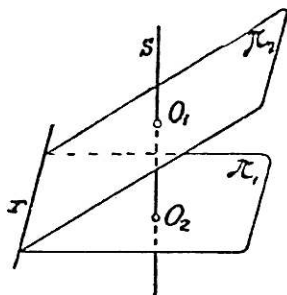
Por tanto, los haces de planos, de arista en cada serie, son también *dobles* (por proyectar cada uno de ellos un punto doble de la otra serie).



Sean A y A' dos puntos homólogos. El plano Ar es doble, luego contiene A' . De otro modo AA' corta a r , y análogamente a s .

Los pares de puntos homólogos A y A' están, pues, en rectas que cortan a los ejes, demostrándose, como en la homología, que la razón doble $(AA'A_r A_s)$ de la cuaterna formada por estos puntos y los A_r, A_s , de intersección de la recta que los une con los ejes, es constante y se llama *característica* de la homografía biaxial.

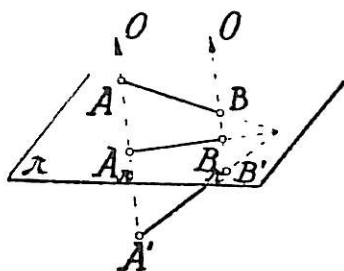
Si esta característica vale -1 , obtenemos una homografía biaxial *involutiva* en la que los puntos y, por tanto, todos los pares de elementos homólogos se corresponden doblemente.



Para obtener una homografía biaxial involutiva, basta multiplicar dos homologías involutivas, de tal suerte que el centro de cada una de ellas esté en el plano de la otra. Los ejes de la homología resultante son: la intersección de los dos planos de homología y la recta de unión de los centros. La demostración es sencilla y puede desarrollarla

el lector como ejercicio, repitiendo el razonamiento desarrollado en el plano para el producto de dos homologías involutivas planas con el centro de cada una de ellas en el eje de la otra (v. lección 21, § 13).

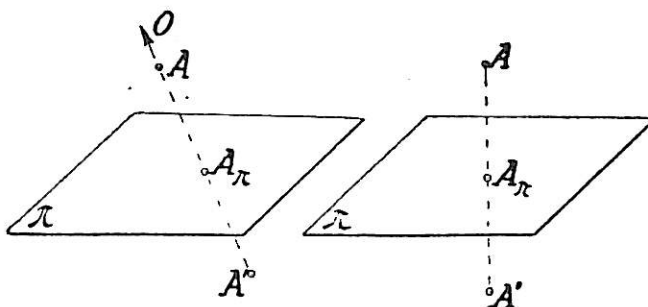
7. Las transformaciones métricas como casos particulares de la homografía.—LA HOMOLOGÍA AFÍN.—Toda homología de plano propio y centro impropio se llama *homología afín*. La dirección del centro se llama *dirección de afinidad*. Se demuestra, como en el plano, que en tal homología la razón entre dos segmentos *alineados* cualesquiera es un invariante. Y, en general, lo es en todas las homografías en las que el plano impropio se corresponde consigo mismo. Tales homografías se llaman *afinidades*.



LA SIMETRÍA RESPECTO DE UN PLANO.—Una homología afín involutiva, es decir, de característica

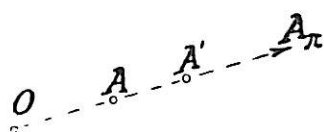
$$(AA' O_\infty A_\pi) = A A_\pi : AA_\pi = -1$$

es la llamada *simetría respecto de un plano* ($A'A_\pi = -AA_\pi$) y coincide con la *simetría especular* cuando la dirección de afinidad es normal al plano (tomo I, lección 40. § 3).



LA HOMOTECIA.—Toda homología respecto de un centro O propio y plano impropio π se llama *homotecia*.

Dados dos puntos homólogos cualesquiera A, A', si A_π es el punto impropio de AA' (intersección con el plano impropio π) la característica será:



$$(AA'OA_\pi) = OA : OA' = \text{const.}^\circ$$

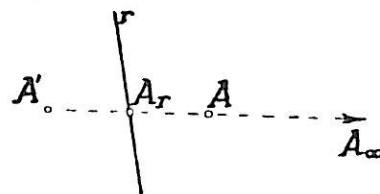
y la transformación coincide con la *homotecia* estudiada en el tomo I, lección 49.

LA SIMETRÍA RESPECTO DE UN EJE.—Una homografía biáxica involutiva con un eje impropio s, es *simetría axial* con respecto al eje propio r. Si AA' son dos puntos homólogos cualesquiera, A_r es la intersección de AA' con r, y A_{s_∞} la intersección con el eje impropio, deberá verificarse

$$(AA'A_r A_{s_\infty}) = AA_r : A'A_r = -1.$$

de donde

$$AA_r = -A'A_r$$



Si la orientación del eje impropio es normal al eje propio, se obtiene la *simetría axial* estudiada en el tomo I, lección 40.

Aplicando el teorema antes enunciado (acerca del producto de dos homografías involutivas) a dos simetrías especulares de planos de simetría ortogonales, se obtiene como producto una simetría axial.

(Uno de los teoremas demostrados en tomo I, lección 40, § 6; los demás pueden deducirse proyectivamente de modo análogo.)

LA TRASLACIÓN.—Una homología con plano y centro impropios es una *traslación*. Se demuestra como en la lección anterior para la traslación plana. Las guías son las paralelas a la dirección del centro.

GIROS. CONGRUENCIAS. SEMEJANZAS.—Un giro ya no es una homología ni una homografía biáxica. Es una homografía *con una sola serie doble* (eje del giro).

Un movimiento *helicoidal* es una homografía con una recta doble y en ella el punto impropio doble. Una semejanza, en general, es una homografía con el plano impropio doble y en la que son iguales dos radiaciones cualesquiera homólogas, lo que la distingue de las afinidades, de las que es caso particular.

En toda semejanza es *invariante la razón de dos segmentos cualesquiera*. Si esta razón vale 1, se obtiene la congruencia.

8. Geometría métrica y Geometría proyectiva.—Al término de este breve estudio de las transformaciones proyectivas más elementales y de mayor interés, procede recapitular los resultados obtenidos para sacar consecuencias metodológicas.

La rápida incursión que hemos efectuado por el campo de la Geometría proyectiva ha tenido para nosotros una doble finalidad:

1.º Aportar nuevos recursos para la resolución de los problemas de Geometría métrica.

2.º Contemplar la Geometría métrica desde un punto de vista más elevado.

Para ello hemos empezado por ampliar el espacio métrico euclídeo (conjunto de puntos, rectas y planos que satisfacen los axiomas del tomo I) con nuevos elementos llamados impropios, creando un *espacio proyectivo* cuyas propiedades de incidencia verifican las leyes de dualidad.

Todas las transformaciones estudiadas entre elementos de este espacio, homografías, correlaciones, ... son transformaciones biunívocas (elemento a elemento), conservan las susodichas relaciones de incidencia, y se llaman *transformaciones proyectivas*.

Como la transformación inversa de una proyectiva es también proyectiva y el producto de dos de ellas sigue siendo una transformación proyectiva, todas las transformaciones proyectivas forman grupo.

La Geometría proyectiva, en su más amplia acepción, estudia las propiedades invariantes respecto de todas estas transformaciones.

Como simples casos particulares de ellas, aparecen ahora las transformaciones métricas estudiadas en el tomo I (excepto la inversión), de modo que, en definitiva, la *Geometría métrica*, que estudia las propiedades invariantes de las figuras respecto de estas transformaciones, aparece como un simple capítulo de la *Geometría proyectiva* (*).

(*) Lo que hizo exclamar a Cayley en su tiempo: «Projective Geometry is all Geometry.» Hoy tal frase resulta ya un anacronismo, por cuanto las proyectividades no son a su vez más que transformaciones muy particulares dentro de grupos más amplios (transformaciones racionales, de contacto, continuas...) y las propiedades de las figuras invariantes en ellos constituyen nuevas «Geometrías», que dejan minúscula la «all Geometry» de Cayley.

9. El método métrico y el método proyectivo.—De aquí se desprenden dos caminos para el estudio de la Geometría. El camino métrico y el camino proyectivo.

I. *El camino proyectivo.*—Va de lo general a lo particular. Consiste: 1.º En crear directamente el espacio proyectivo postulando axiomáticamente las relaciones proyectivas de incidencia y ordenación. 2.º Partiendo de estos axiomas, desarrollar la Geometría proyectiva al margen de toda noción de medida. 3.º Considerar en este espacio ciertos elementos y relaciones de significación privilegiada (elementos impropios, polaridad absoluta) y definir las transformaciones métricas como transformaciones proyectivas que dejan invariantes estos elementos y relaciones.

II. *El camino métrico.*—Va de lo particular a lo general. Consiste en crear primero el espacio métrico y luego el proyectivo mediante la adjunción de elementos impropios y la enunciación de las nuevas propiedades de incidencia, tal como lo hemos hecho hasta aquí.

Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas e inconvenientes. Para el estudio exclusivo o preponderante de la Geometría proyectiva el camino más breve es la creación *directa* del espacio proyectivo. Para el estudio preferente de la Geometría métrica el método segundo es más indicado, ajustándose además mejor a la evolución histórica de los conocimientos. Por ello es el que hemos seguido en este libro.

10. Método de la figura reducida.—Por otra parte, el camino métrico proporciona un recurso expedito para la demostración de ciertas propiedades proyectivas de las figuras, cuando tales propiedades sean sencillas de demostrar en casos particulares métricos.

La idea general del método (aplicable a toda clase de transformaciones) es la siguiente:

Si se trata de demostrar que la figura Φ tiene una cierta propiedad, que se sabe es de carácter invariante en ciertas transformaciones, analicemos si alguna de estas transformaciones permite reducir Φ a otra figura más sencilla φ en la cual esta propiedad sea más fácil de establecer. Demostrada la propiedad para la *figura reducida* φ , quedará probada (por su carácter invariante) para toda figura Φ .

Como se ve, la idea general es, en el fondo, la misma que aplicamos en el tomo I para la resolución de problemas consistentes en hallar figuras que cumplieran determinadas condiciones invariantes en ciertas transformaciones. Bastaba resolver el problema en la figura reducida. La inversión nos proporcionó interesantes recursos en este sentido para resolver problemas de tangencia (v. tomo I, lección 35, § 4.)

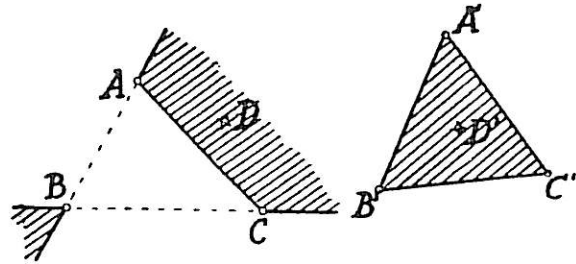
Por lo que a la proyectividad se refiere, hemos hecho ya aplicación del método para demostrar el teorema fundamental de Staudt (reduciéndolo al caso de series semejantes).

En el estudio proyectivo de las cónicas, que desarrollaremos en las lecciones siguientes, haremos amplia aplicación de dicho método, tomando la circunferencia como figura reducida de ellas.

Ejemplo.—Supongamos suprimidos de toda la exposición anterior los teoremas de Menelao y de Ceva, y demostrada directamente la propiedad de cuadrivértice, como se indica en el § 4 de la lección 15. Toda la teoría de la proyectividad subsistiría sin quebranto alguno. Si ahora quisiéramos demostrar el teorema de Ceva, no tendríamos más que observar:

1.º Que es evidente para un triángulo equilátero y su centro (por ejemplo).

2.º Que todo triángulo ABC (proyectivo) y un punto D de su plano no situado en sus lados, puede transformarse homográficamente en un triángulo equilátero $A'B'C'$ y su centro D' (bastando definir la homografía mediante los cuadrivértices homólogos $ABCD$ y $A'B'C'D'$). Es decir, que existe un conjunto de proyecciones y secciones (lección 21, § 11) que transforman $ABCD$ en $A'B'C'D'$.



3.º Que el teorema de Ceva tiene carácter invariante en tales proyecciones y secciones en virtud de la propiedad establecida en la lección 14, § 9.

En consecuencia, el teorema de Ceva es válido para todo triángulo y un punto D de su plano (no situado en sus lados).

Análogamente podemos demostrar el teorema de Menelao, transformando el triángulo y la transversal en un triángulo cualquiera y la recta impropia.

NOTAS AL CAPITULO VI

I. **Geometría afín.**—Todas las afinidades, es decir, todas las homografías en las que el plano impropio es homólogo de sí mismo forman un grupo, llamado *grupo afín*; y todas las propiedades de las figuras geométricas que son invariantes respecto de dichas afinidades constituyen la llamada *Geometría afín*. Entre las transformaciones del grupo afín figuran las homologías afines estudiadas en lección 22, § 1, y también las homotecias, movimientos y simetrías, estudiadas en el Tomo I.

Así como la razón doble es el invariante métrico característico de las transformaciones proyectivas, el invariante métrico elemental en el grupo afín es la *razón simple* de tres puntos alineados; igualando la razón doble $(ABCD_\infty)$ formada por tres puntos alineados ABC y el del infinito D_∞ de su recta, con la razón doble $A'B'C'D'_\infty$ formada por los puntos homólogos, se obtiene, en efecto, $AC : BC = A'C' : B'C'$.

Entre las propiedades más salientes de la Geometría afín figuran las relativas a los centros de gravedad. Sabido es que el c. d. g. de un triángulo se obtiene por intersección de sus medianas. El c. d. g. de un cuadrilátero puede obtenerse descomponiéndolo en triángulos de dos modos distintos y hallando la intersección de las rectas que unen los c. d. g. de los triángulos parciales. (V. Tomo I, lec. 29, ejerc. 25.) El c. d. g. de un pentágono puede hallarse análogamente descomponiéndolo de dos modos en cuadrilátero y triángulo, etc.

He aquí, pues, un punto en cuya determinación sólo juegan condiciones de incidencia y la bisección de lados (razón simple -1). Podemos, pues, afirmar:

El centro de gravedad de un polígono plano se transforma mediante una afinidad en el centro de gravedad del polígono homólogo. Lo mismo se demuestra para los poliedros.

En particular: *El c. d. g. de la proyección de un polígono plano sobre otro plano es la proyección del centro de gravedad del polígono.*

II. **Reducción de una afinidad entre figuras planas al producto de una proyección ortogonal por una semejanza.**—Puesto que toda homología entre figuras planas queda determinada dando dos cuadriláteros homólogos, una afinidad quedará definida dando dos triángulos propios homólogos. Pero sabemos (lecc. 20 § 8, II) que uno de ellos puede obtenerse como proyección ortogonal del otro o de uno semejante a él; por tanto:

Toda afinidad puede obtenerse como producto de una proyección ortogonal por una semejanza.

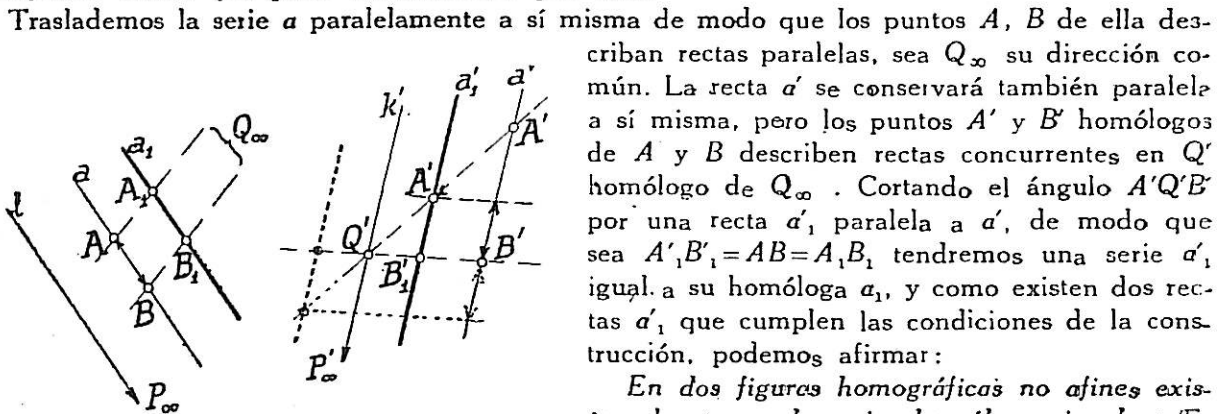
Lo mismo en una que en otra transformación existe proporcionalidad entre las áreas de las figuras homólogas; por consiguiente:

Las áreas de las figuras homólogas en una afinidad son proporcionales.

III. **Series semejantes en figuras homográficas no afines.**—Hemos visto que en dos figuras afines dos series homólogas cualesquiera son semejantes. ¿Existen series semejantes homólogas en figuras homográficas no afines? Sean φ y φ' dos figuras homográficas no afines. A la recta impropia de φ corresponde la recta k' (límite) en φ' , y a la recta impropia de φ' corresponde la recta l (límite) en φ . Al punto P_∞ común a la recta impropia y a l corresponde el punto P'_∞ común a k' y a la recta impropia, o sea el punto impropio de k' , de aquí resulta:

A toda recta paralela a la recta límite l corresponde una recta a' paralela a k' . Las series situadas en a y a' son semejantes; puesto que en ellas son homólogos los puntos impropios P_∞ y P'_∞ .

Recíprocamente, este es el único par de puntos impropios homólogos y, por tanto, dos series semejantes tienen que pasar forzosamente por ellos.



Traslademos la serie a paralelamente a sí misma de modo que los puntos A, B de ella describan rectas paralelas, sea Q_∞ su dirección común. La recta a' se conservará también paralela a sí misma, pero los puntos A' y B' homólogos de A y B describen rectas concurrentes en Q'_∞ homólogo de Q_∞ . Cortando el ángulo $A'Q'B'$ por una recta a'_1 paralela a a' , de modo que sea $A'_1B'_1 = AB = A_1B_1$ tendremos una serie a'_1 igual a su homóloga a_1 , y como existen dos rectas a'_1 que cumplen las condiciones de la construcción, podemos afirmar:

En dos figuras homográficas no afines existen dos pares de series homólogas iguales. (Es

fácil ver que son independientes de los puntos Q_∞, Q'_∞ elegidos.)

IV. **Reducción de una homografía no afín al producto de una homología por un movimiento.**—El resultado anterior nos permite obtener la siguiente imagen geométrica de la homografía no afín:

Toda homografía no afín en figuras planas puede obtenerse como producto de una homología por un momento.

En efecto, bastará superponer dos de las series homólogas iguales obtenidas en el párrafo anterior, mediante un movimiento de una de las figuras φ' . Se convertirá así en φ_1 , que tendrá con la otra figura φ una serie doble (las dos series iguales que se han superpuesto). Por tanto (§ 6) entre φ_1 y φ existe una homología y la relación entre φ' y φ es el producto del movimiento que convierte φ' en φ_1 , y de la homología que transforma φ_1 en φ .

EJERCICIOS (Referentes a todo el Capítulo)

Efectuar construcciones en una homología definida por el centro, el eje y además:

1. Dos puntos homólogos.
2. Dos rectas homólogas.
3. Una de las rectas límites (l o k').
4. Hallar el centro y el eje de una homología dados dos pares de puntos homólogos AA', BB' y un par de rectas homólogas a, a' que pasan respectivamente por A y A' .
5. Enunciar y resolver el problema correlativo, en el plano, del anterior.
6. Hallar el centro y el eje de una homología dadas las dos rectas límites y un par de rectas homólogas.
7. Hallar el centro y el eje de una homología dadas las rectas límites y un par de puntos homólogos A, A' . (Considérese la proyectividad que existe entre los puntos homólogos de la recta AA' .)
8. Hallar el centro y el eje de una homología dadas las dos rectas límites una recta doble y la condición de que el centro esté sobre el eje.
9. Hallar el centro y el eje de una homología dadas una recta límite, dos rectas homólogas y en ellas dos puntos homólogos.
10. Hallar el centro de una homología dado el eje, una recta límite y un par de puntos homólogos.
11. Hallar el eje de una homología dado el centro y las dos rectas límites.

Capítulo VII.—IDEAS GENERALES SOBRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACION Y SUS APLICACIONES

LECCIÓN 24.—SISTEMA DIÉDRICO ORTOGONAL. PLANOS ACOTADOS

1. Los sistemas de representación.—La técnica necesita a cada paso representar con precisión cuerpos del espacio en el papel de dibujo, no sólo para describir los ya creados, sino para traducir en nuevas creaciones los cuerpos imaginados (proyectos). El problema geométrico general que se presenta es, pues, el de describir en un espacio de dos dimensiones (papel de dibujo) el espacio de tres.

Se comprende que tal representación se puede ajustar a múltiples convenios.

Si se persigue una descripción puramente estética, cualitativa, se tenderá a representar los cuerpos tratando de reproducir su efecto visual. Esta descripción es la de las primitivas intuiciones pictóricas del hombre y sólo se empezó a concretar en leyes precisas durante el Renacimiento con Leonardo. El conocimiento actual de la Geometría proyectiva permite el dominio absoluto de este sistema de representación llamado *perspectiva*, *proyección cónica* o *central*. Este sistema no conserva ni siquiera las razones simples de distancias, por lo que en él las medidas cuantitativas son engorrosas.

Si se persiguen descripciones cuantitativas, se tenderá a sistemas de representación en los que se conserven las proporciones con objeto de efectuar con comodidad y rapidez las medidas de los sólidos descritos. Sustituiremos, por tanto, la proyección visual central cónica, por sistemas de proyección paralela.

Elegidos los planos de proyección paralelos a las dimensiones principales del sólido (planos de simetría ortogonal, planos de interés preponderante como fachadas, etc.), estas medidas serán *invariantes* en la proyección. De ahí el interés técnico preponderante de los sistemas *diédrico* y de *planos acotados* que fueron sistematizados por Monge a principios del siglo XIX, época de irrefragable progreso técnico actual.

Si se elige el plano del dibujo no paralelo a las direcciones principales del sólido, en la proyección se conservan sólo las razones de las medidas en cada dirección, variando la escala de una a otra. Se pierde así la comodidad en las lecturas, obteniéndose, en compensación, perspectivas de conjunto (perspectivas *axonométricas*) aproximadas a las reales, como si procedieran de observadores infinitamente alejados. Si las dimensiones del sólido son pequeñas en comparación con la distancia a que se las observa, la perspectiva axonométrica es próxima a la real, difiriendo mucho de ella en caso contrario. Por ello se emplea la perspectiva axonométrica al croquizar órganos de máquinas, y no se usa, en cambio, para representar grandes masas arquitectónicas.

Vamos a dar una ligerísima idea de los fundamentos de estos métodos en lo que concierne a sus finalidades primordiales.

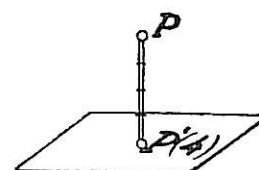
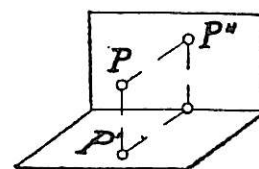
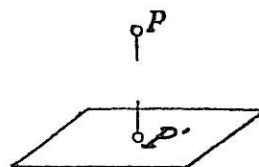
2. Sistemas diédrico y acotado.—Lo primero que se ocurre para representar en el papel la posición de un punto P en el espacio, es proyectarlo ortogonalmente sobre el plano del dibujo; es decir, señalar el pie P' de la perpendicular bajada desde el punto al plano; pero todos los puntos de aquella

perpendicular tienen la misma proyección. Para fijar la posición del punto hemos de dar además algún otro elemento, que puede ser:

1.º La proyección ortogonal sobre otro plano que, para mayor sencillez, se toma perpendicular al anterior.

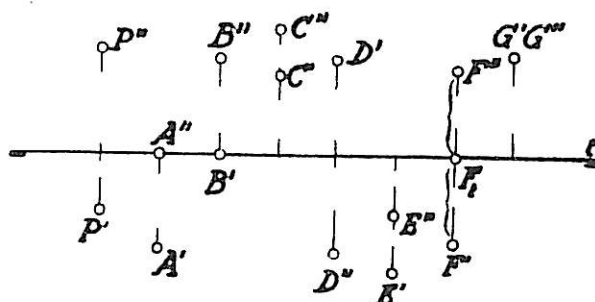
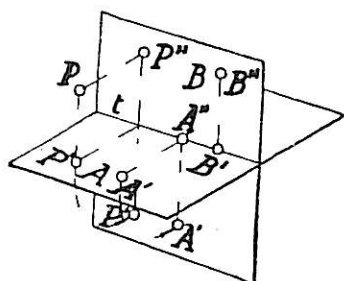
2.º La distancia, llamada *cota*, del punto al plano del dibujo.

El primer método constituye el sistema de *Monge* o *diédrico ortogonal*, el más usado en la construcción; y el segundo método da lugar al sistema llamado de *planos acotados* utilizado en Topografía, es decir, en la representación de terrenos (y también de cartas marinas).



3. Representación del punto en el sistema de Monge.

Se imaginan los dos planos sobre los que se proyectan los puntos, uno *horizontal* y otro *vertical*, pero las dos proyecciones se presentan luego en el dibujo en un mismo plano, girando uno de los planos de proyección alrededor de la intersección de ambos, llamada *línea de tierra*, hasta coincidir con el otro.



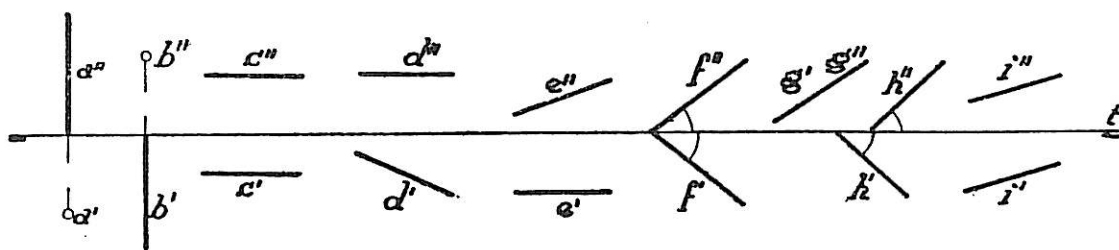
Se observa que las dos proyecciones P' , P'' de un punto P tienen que aparecer, después del giro, sobre una perpendicular a la línea de tierra t , puesto que las rectas proyectantes PP' , PP'' determinan el plano perpendicular a t por P ; y recíprocamente, todo par de puntos $P'P''$ que cumplan esta condición son proyecciones de un punto P en el espacio.

En la figura se indican las proyecciones de diversos puntos del espacio, designando invariablemente con un acento las proyecciones sobre el plano horizontal y con dos sobre el vertical.

La posición de cada proyección respecto de la línea de tierra indicará la que tiene el punto respecto del otro plano de proyección. Así, teniendo en cuenta la forma como se supone efectuado el abatimiento (fig. 1.ª) se comprueba que: 1.º El punto P está delante del plano vertical y encima del horizontal (primer cuadrante). 2.º El punto A está en el plano horizontal. 3.º El punto B está en el plano vertical. 4.º El punto C está detrás del vertical y encima del horizontal (segundo cuadrante). 5.º El punto D está detrás del vertical y debajo del horizontal (tercer cuadrante). 6.º El punto E está delante del vertical y debajo del horizontal (cuarto cuadrante). 7.º El punto F ($F'F_1 = F_1F''$) está en el plano bisector del primer cuadrante (primer bisector). 8.º El punto G está en el bisector del segundo cuadrante (segundo bisector).

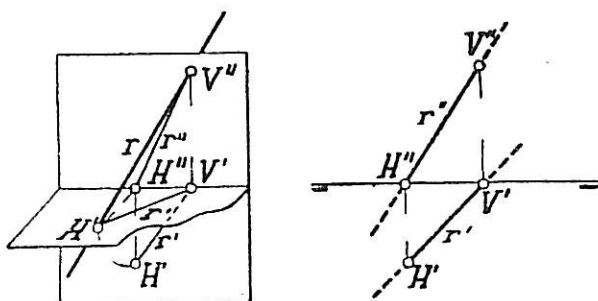
4. **Representación de la recta.**—Una recta r se determina, análogamente, por sus dos proyecciones ortogonales $r'r''$ sobre los planos de proyección. Una de ellas puede reducirse a un punto si la recta es ortogonal a uno de dichos planos. Si r es perpendicular a la línea de tierra sin serlo a ningún plano de proyección (recta de perfil), las dos proyecciones aparecen confundidas en una perpendicular a la línea de tierra y como ambas definen el mismo plano proyectante, la recta no queda así determinada. Es preciso dar dos puntos de ella para determinarla.

Las figuras indican distintas posiciones de una recta: a perpendicular al



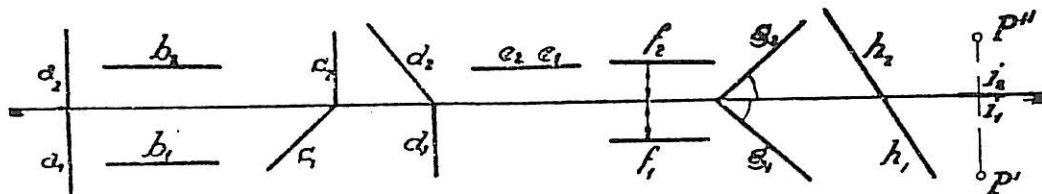
plano horizontal, b ídem al vertical, c paralela a la línea de tierra, d paralela

al plano horizontal, e ídem al vertical, f situada en el primer bisector, g situada en el segundo bisector, h paralela al primer bisector, i paralela al segundo bisector, ... caracteres todos ellos que el lector puede comprobar fácilmente.



Llámanse *trazas* de una recta a sus intersecciones con los planos de proyección. Para hallar la traza horizontal H , por ejemplo, basta observar que su proyección vertical H'' debe estar sobre la línea de tierra, y es, por tanto, la intersección de r'' con t . Análogamente hallaremos la traza vertical V .

5. **Representación del plano.**—Todo plano que no pasa por la línea de tierra queda determinado y puede representarse dibujando simplemente sus dos *trazas* o intersecciones con los planos proyectantes, que se indicarán con el subíndice 1 para las trazas sobre el plano horizontal y con el 2 sobre el vertical.



Así, la figura indica las trazas: a_2a_1 de un plano perpendicular a la línea de tierra (de perfil); b_2b_1 de un plano paralelo a la línea de tierra; c_1c_2 perpendicular al plano horizontal; d_1d_2 perpendicular al vertical; e_1e_2 paralelo al primer bisector; f_2f_1 paralelo al segundo bisector; g_1g_2 perpendicular al primer bisector; h_1h_2 ídem al segundo bisector.

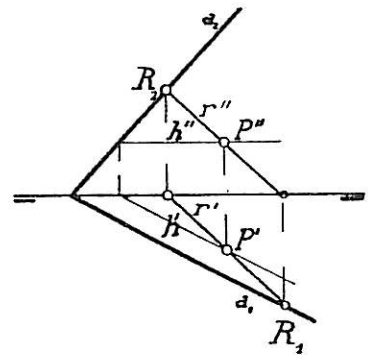
Un plano que pase por la línea de tierra tiene en ella *confundidas* sus trazas $i_1 i_2$ y, por tanto, para determinar el plano bastará dar un punto P de él, exterior a la línea de tierra.

ADVERTENCIA.—Como nuestro propósito no es desarrollar aquí los comienzos de un curso de Geometría descriptiva, sino simplemente dar idea de unos cuantos recursos de su lenguaje gráfico espacial sin desviar este curso de su cauce natural, omitiremos deliberadamente las posiciones singulares, cuyo estudio detenido alargaría excesivamente este capítulo.

6. Condiciones y problemas de incidencia.—Un punto P está sobre una recta r si sus proyecciones $P'P''$ están sobre las proyecciones homónimas $r'r''$ de dicha recta.

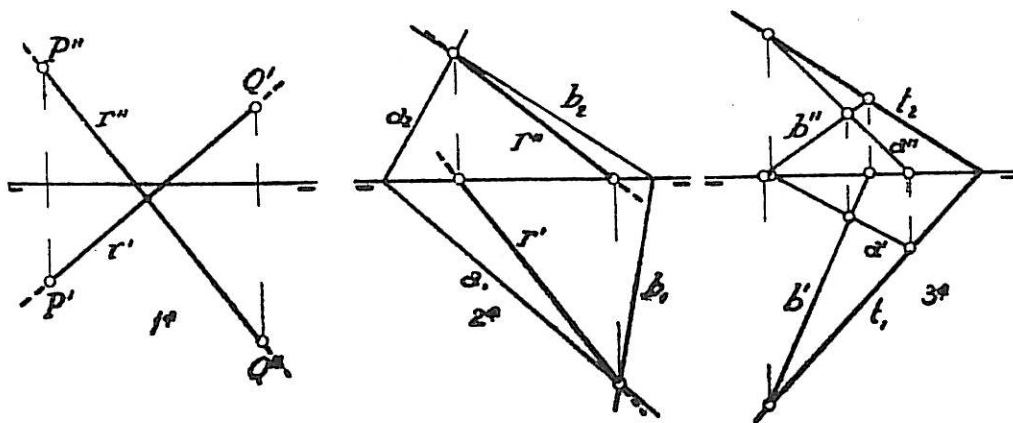
Una recta r está sobre un plano α si sus trazas $R_1 R_2$ (propias o impropias, supuestas distintas) están sobre las trazas homónimas $a_1 a_2$ del plano. Si r es coplanaria con la línea de tierra R_1 y R_2 coinciden y es preciso comprobar si la recta tiene otro punto con el plano.

Un punto P está sobre un plano α si está sobre una recta r del plano. Para comprobarlo se puede trazar por el punto P una paralela h a la traza horizontal del plano, cuya proyección horizontal h' será paralela a dicha traza a_1 , y cuya proyección vertical h'' será paralela a la línea de tierra. La traza vertical de esta recta debe estar en a_2 .



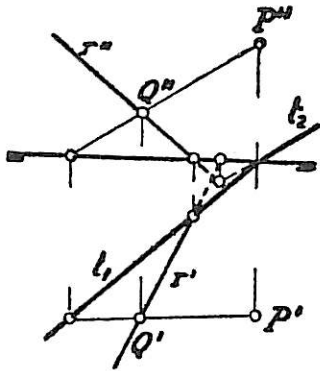
La construcción falla si el plano es paralelo a la línea de tierra, en cuyo caso se une P con un punto de una de las trazas del plano, averiguando si la segunda traza de la recta obtenida está sobre la otra traza del plano.

Problema 1.º *Recta que pasa por dos puntos.*—Sus proyecciones son las que unen las proyecciones homónimas de dichos puntos (fig. 1).



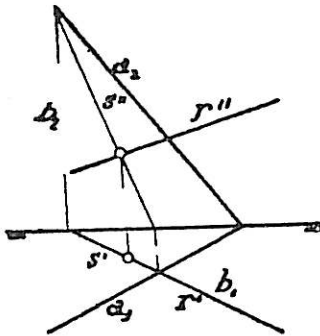
Problema 2.º *Hallar la intersección de dos planos $(a_1 a_2)$ $(b_1 b_2)$ no incidentes ni paralelos a la línea de tierra.*—Las intersecciones de las trazas homónimas $(a_1 b_1)$ $(a_2 b_2)$ dan inmediatamente las de la recta buscada (fig. 2). Si dos de estas

trazas $(a_1 b_1)$ son paralelas entre sí, la intersección es paralela al plano que las contiene y pasa por el punto en que se cortan las otras trazas $a_2 b_2$. Si también estas trazas son paralelas entre sí los planos en cuestión son paralelos.



Problema 3.º *Plano determinado por dos rectas secantes ab.*—Se reconocerá si lo son, comprobando si los puntos en que se cortan las proyecciones homónimas están en una misma perpendicular a la línea de tierra. Las trazas homónimas de dichas rectas determinarán las trazas $t_1 t_2$ del plano buscado (fig. 3).

Problema 4.º *Plano determinado por una recta r y un punto P.*—Se reduce el problema anterior uniendo el punto P con otro Q arbitrariamente elegido en la recta, y hallando las trazas de r y de la recta PQ.



Problema 5.º *Intersección de una recta r y un plano $(a_1 a_2)$.*—Buscaremos la intersección s ($s'' s'$) del plano dado con otro que pase por la recta, por ejemplo, el $b_1 b_2$ proyectante vertical de ella. La intersección de s con la recta dada r es el punto pedido.

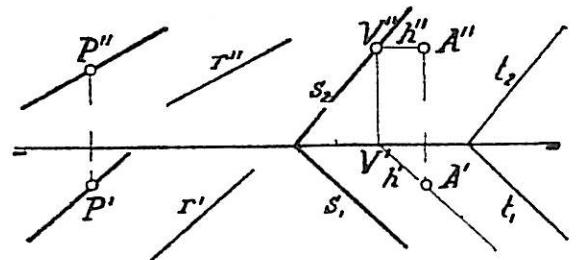
Problema 6.º *Plano determinado por tres puntos.*—Se reduce al problema 3.º uniendo los puntos de dos en dos.

Problema 7.º *Punto de intersección de tres planos.*—Se reduce a los problemas 2.º y 5.º, hallando primero la intersección de dos de los planos y finalmente la intersección de esta recta con el tercero.

7. Condiciones y problemas de paralelismo.—Dos rectas paralelas entre sí (no perpendiculares a un plano de proyección) tienen sus proyecciones homónimas paralelas (o coincidentes). Esta condición es suficiente, excepto para las rectas de perfil. Dos planos paralelos tienen paralelas sus trazas. Esta condición es suficiente excepto para planos paralelos a la línea de tierra.

Problema 1.º *Trazar por un punto P la paralela a una recta r no perpendicular a la línea de tierra.*—Basta trazar por $P'P''$ las proyecciones paralelas a las de r.

Problema 2.º *Trazar por un punto A el plano paralelo a otro dado $t_1 t_2$ no paralelo a la línea de tierra.*—Basta trazar por A una recta h paralela a la traza horizontal del plano. Por la traza vertical V'' de esta recta pasará la traza vertical s_2 del plano buscado paralela a t_2

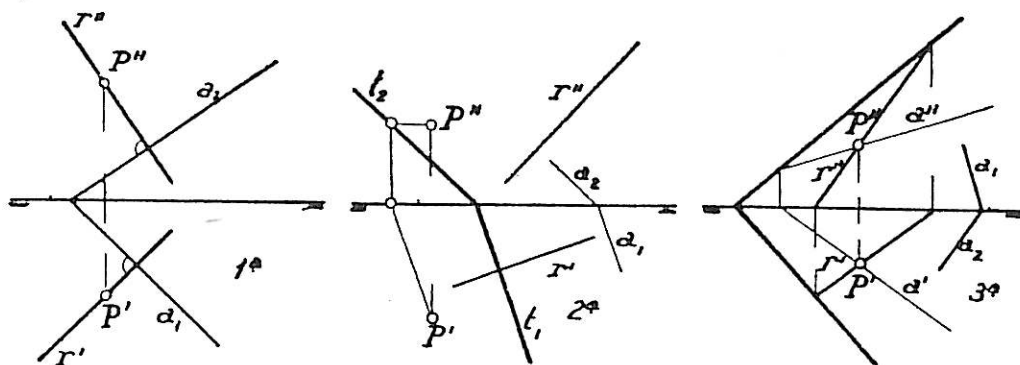


y, por el punto donde s_2 corta a la línea de tierra, trazaremos s_1 paralela a t_1 .

Problema 3.º Trazar por un punto P un plano paralelo a dos rectas dadas ab .—Basta trazar por el punto las dos paralelas a ellas y hallar las trazas del plano que determinan.

8. **Condiciones y problemas de perpendicularidad.**—Del teorema demostrado en el § 2 de la lección 42 del Tomo I se desprende: Una recta perpendicular a un plano tiene sus proyecciones perpendiculares a las trazas homónimas de este plano. Aplicando esta propiedad, dado un plano α (o una recta a) podemos trazar inmediatamente una recta α (un plano α) perpendicular. Todo problema de perpendicularidad relativo al plano α se convierte en problema de paralelismo relativo a la recta α y viceversa, siéndole aplicable lo dicho en el párrafo anterior.

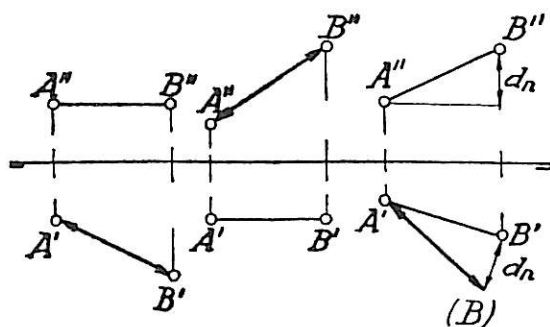
Problema 1.º Trazar por un punto P la recta r perpendicular a un plano α , no paralelo a la línea de tierra.—Basta trazar por P las proyecciones de la recta, respectivamente perpendiculares a las trazas del plano dado ($a_1 a_2$) (figura 1.ª).



Problema 2.º Trazar por un punto P el plano τ perpendicular a una recta dada r , no perpendicular a la línea de tierra.—Puesto que son conocidas las direcciones de las trazas, se reduce al problema 2.º del párrafo anterior (figura 2.ª).

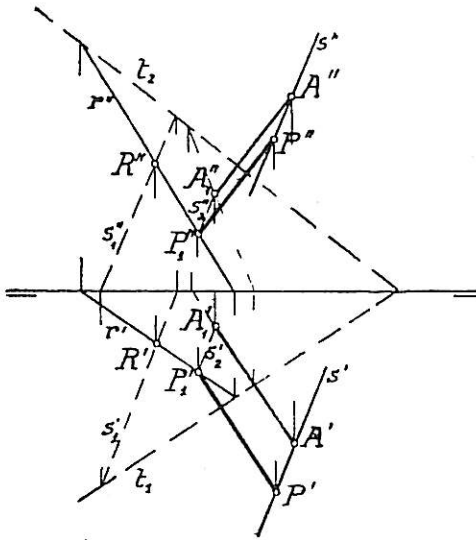
Problema 3.º Trazar por una recta r el plano perpendicular a un plano dado α .—Basta trazar por un punto P de r la recta a perpendicular a α y hallar las trazas del plano ra (fig. 3.ª).

9. **Distancias.**—Problema: Hallar la distancia entre dos puntos A y B . Si A y B están en una paralela al plano horizontal (vertical), la distancia que les separa es la misma que existe entre sus dos proyecciones horizontales (verticales). Si no es así, se construye un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos sea la distancia entre sus proyecciones horizontales $A'B'$ y el otro cateto la diferencia de nivel d_n entre los dos puntos. La hipotenusa $A'(B)$ es la distancia pedida.



La determinación de la distancia entre punto y recta, punto y plano, rectas

y planos paralelos, rectas cruzadas, son problemas que se reducen a la determinación de las distancias entre dos puntos (datos, pies de perpendiculares, ...) y, por tanto, a la combinación del problema anterior con problemas de perpendicularidad, paralelismo e incidencia.



pie P_1 de la perpendicular

común PP_1 buscada.

Ejemplo: *Hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan r y s .* — Siguiendo la pauta indicada en el Tomo I, lección 42, § 6, por un punto R de r se traza la paralela s_1 a s . Halladas las trazas $t_2 t_1$ del plano rs_1 , se traza por un punto A de s la perpendicular a dicho plano y se determina el pie A_1 de ella sobre el mismo. Aplicando a la distancia AA_1 la construcción precedente se tendría, *en magnitud*, la distancia pedida. Para hallarla *en posición*, basta trazar por A_1 la paralela s_2 a s , esta recta (proyección ortogonal de s sobre el plano rs_1) corta a r en el

10. Ángulos.—Problema: *Hallar el ángulo de dos rectas ab.*—Si las rectas son coplanarias, abatiremos el plano que las contiene, sobre el plano horizontal, por ejemplo (figura), teniendo en cuenta lo dicho en el § 8 de la lección 22 y mediremos en el abatimiento el ángulo en cuestión. Si no fueran coplanarias, bastará trazar por un punto P paralelas a ellas y hallar el ángulo de éstas.

La determinación del ángulo de dos planos o de recta y plano son problemas que se reducen al anterior, combinados con problemas de perpendicularidad e incidencia.

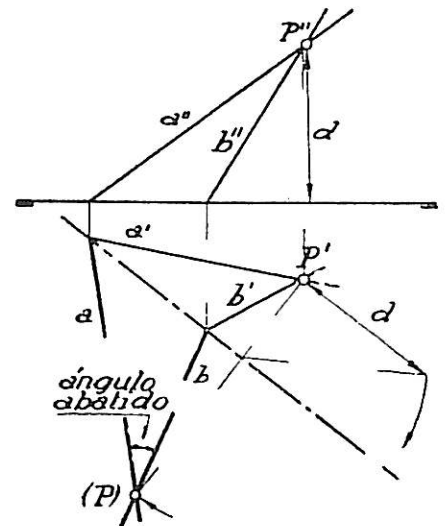
11. Construcciones métricas. — Con los problemas fundamentales rápidamente esbozados en los párrafos anteriores y la operación de abatimiento tratada en la lección 22, se tiene la base teórica necesaria para resolver problemas y construcciones métricas del espacio.

Sólo a título de ejemplo, resolvamos en la figura el siguiente

Problema: *Construir un octaedro con dos vértices opuestos en dos puntos dados A y B , y la condición de tener horizontal una de las aristas perpendiculares a AB .*

He aquí las operaciones efectuadas:

1.º Se ha hallado la distancia $AB = A'(B)$. Su mitad es el radio r del octaedro.

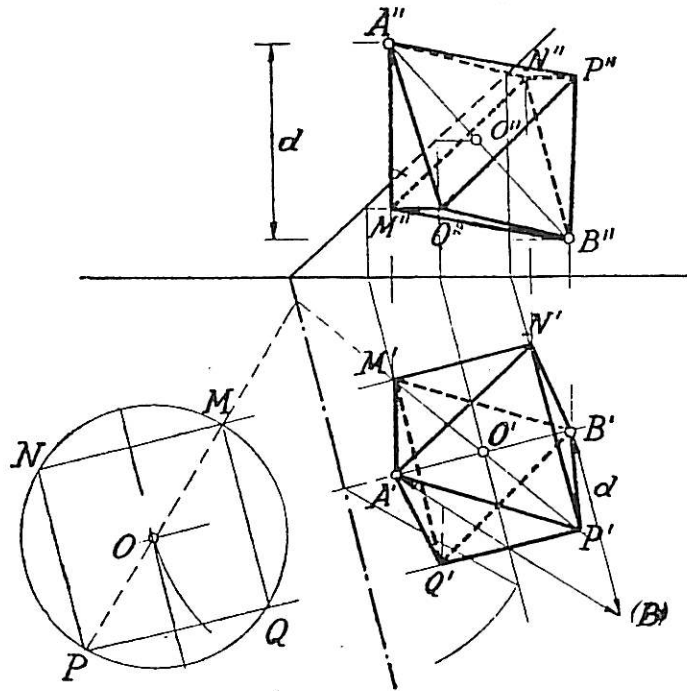


2.º Se ha trazado el plano perpendicular a AB en su punto medio O , centro del octaedro.

3.º Se ha abatido dicho plano sobre el horizontal construyendo en el abatimiento un cuadrado $MNPQ$ de radio r , con un lado paralelo a la traza horizontal del plano.

4.º Se ha hallado la proyección horizontal $M'N'P'Q'$ de este cuadrado mediante la relación de homología afín con el abatimiento $MNPQ$, y luego la proyección vertical $M''N''P''Q''$ (por simple determinación de las horizontales MQ y NP del plano (*).

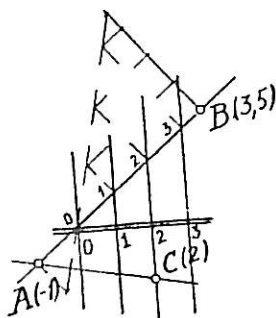
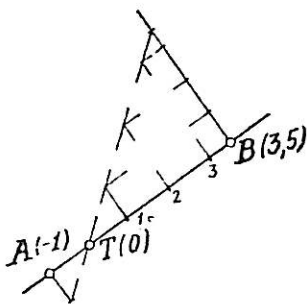
5.º Se han unido los vértices de dicho cuadrado con A y B teniendo en cuenta las aristas vistas y ocultas en cada proyección, representándose las primeras mediante trazo seguido y las segundas mediante trazo corto interrumpido.



12. El sistema de planos acotados.—Cuanto se ha dicho para dos proyecciones ortogonales, vale para una de ellas, la horizontal, sustituyendo la proyección vertical de cada punto por el número, cota o distancia del mismo al plano de proyección con el signo $+$ o $-$ según que esté situado por encima o por debajo del mismo, obteniéndose así el sistema de planos acotados.

Así, por ejemplo, una recta se representará (v. figura) por las proyecciones de dos de sus puntos A B , por ejemplo. Una sencilla interpolación proporcional, o el abatimiento del plano proyectante, permitirá hallar el punto T de cota cero o traza de la recta sobre el plano, así como los puntos de cotas enteras $0, 1, 2, \dots$ de la misma.

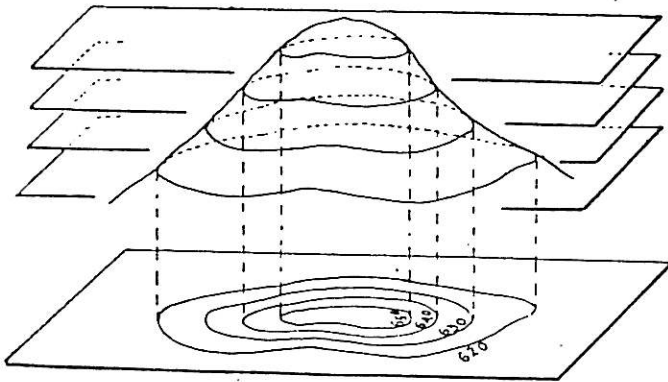
Aplicando tal representación a un plano inclinado, las líneas de nivel constituyen un conjunto de rectas paralelas equidistantes. La de cota cero es la traza del plano. Toda recta perpendicular a ella, y, por tanto, también a las demás, es recta de máxima pendiente del plano. La representación de ella (doblemente rayada en la figura) basta para representar el plano.



(*) Para hallar una de las proyecciones de una figura plana conocida la otra se puede también utilizar la homología afín que existe entre ambas y cuyo eje es la recta de intersección de este plano con el segundo bisector.

En la figura se ha hallado el plano que pasa por tres puntos $A (-1)$, $B (3,5)$, $C (2)$. Graduando AB y uniendo el punto de cota 2 con C se tiene la dirección de las horizontales, lo que permite trazar las de nivel y graduar una línea de máxima pendiente del plano.

Pero el sistema de planos acotados, que así se obtiene, carece de interés práctico para la representación de sólidos geométricos en general. Sólo le tiene en la representación de terrenos en la que se comprende que no es práctico el sistema diédrico, por ser una de las dimensiones, la altura, insignificante respecto de las otras dos. En este caso se representa solamente la proyección horizontal y se marcan las cotas de los puntos más importantes del terreno.



Estas cotas aisladas no dan idea del relieve, y por ello para representar terrenos accidentados se proyectan las llamadas *curvas de nivel*, que son las intersecciones producidas en el terreno por planos horizontales. La altura de cada plano será la cota común de todos los puntos de cada curva, cota que se consigna junto a su proyección.

Es esencial, para que la sensación de relieve sea la debida, que estos planos sean equidistantes. La distancia entre cada dos, es decir, la diferencia de cotas entre dos curvas de nivel consecutivas se elige en cada caso según la escala de terreno y según que éste sea llano o montañoso. Así, por ejemplo, para planos a escala desde 1 : 1000 hasta 1 : 5000 pueden dibujarse desde cada metro hasta cada cinco metros. Para escalas menores se dibujan las curvas de nivel de 10 en 10 metros e incluso de 20 en 20.

13. Lecturas y construcciones en planos topográficos.—Las curvas de nivel permiten efectuar multitud de lecturas e interpretaciones sumamente interesantes, como vamos a ver en algún ejemplo.

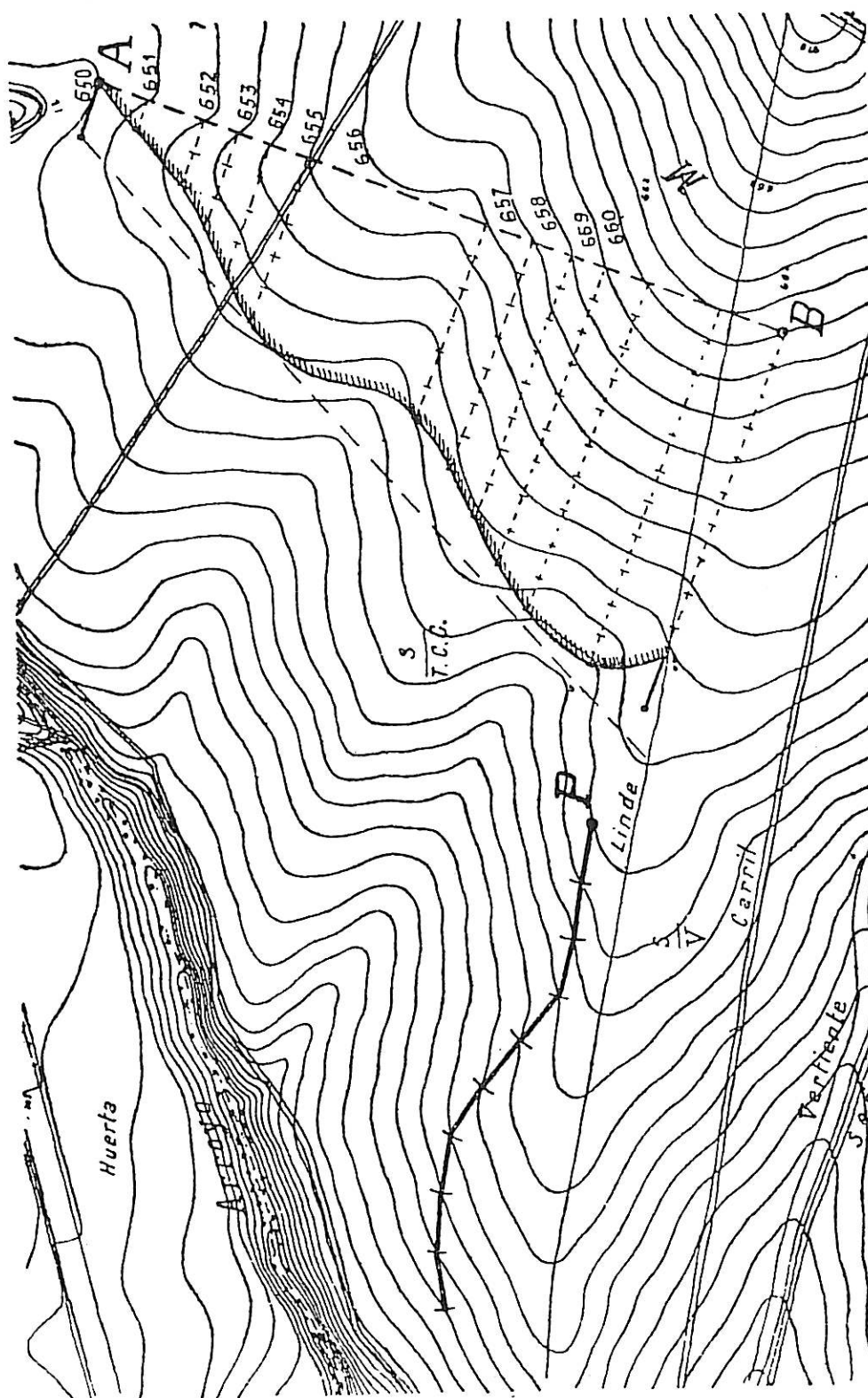
En la página siguiente se reproduce un fragmento de plano topográfico a escala 1 : 2500, con curvas de nivel de metro en metro.

En esta porción se ven claramente los entrantes y salientes del terreno. En los salientes las curvas de nivel de cota baja vuelven su concavidad hacia las de cota superior, y lo contrario ocurre en los entrantes. El lector señalará fácilmente las *dos laderas o vertientes* de cada saliente y la línea que los separa o *línea divisoria de las aguas*.

Cuando las líneas de nivel se encierran unas dentro de otras, siendo las encerradas de mayor cota, representan evidentemente un terreno en forma de cerro, colina o montaña, según su importancia; en general, una cumbre de terreno.

En lo que se refiere a lecturas *cuantitativas*, podemos apreciar primero la pendiente del terreno entre dos puntos dividiendo el desnivel entre los mismos

por su distancia horizontal. Por ejemplo, hallada la distancia entre P y el punto más próximo de la curva de nivel inmediata, que es próximamente de unos $3 \text{ mm} \cdot 2500 = 7,5 \text{ m}$, podemos decir que la máxima pendiente del terreno en P es de $1 \text{ mm} : 7,5 \text{ m} \cong 13,4 \%$.



Recíprocamente, para trazar en el terreno un camino de pendiente prefijada, hallaremos el recorrido horizontal que corresponde al desnivel existente

entre dos curvas consecutivas y llevaremos el segmento que lo representa a la escala del plano entre cada dos curvas. Por ejemplo, para una pendiente del 6 por 100, a un metro de desnivel corresponden 16,6 m de recorrido horizontal, que a escala 1 : 2500 se representan en el plano por un segmento de 6,6 mm ; y no tenemos más que llevar sucesivamente dicho segmento entre cada dos curvas.

También se ha indicado en dicho plano la solución de la siguiente cuestión. ¿Puede una persona situada en *A* ver a otra situada en *B*? Para resolverla se ha supuesto cortado el terreno por un plano vertical que pasa por *A* y *B*. Las cotas de los distintos puntos de la curva de intersección se leen en las distintas intersecciones del segmento *AB* con las curvas de nivel, lo que permite representar a una cierta escala esta sección y abatirla sobre un plano horizontal, como se indica en el dibujo.

Como al tomar las alturas a la misma escala 1 : 2500 en que está el plano, las ondulaciones del terreno serían apenas perceptibles, lo que se suele hacer es tomar una escala diez veces mayor, es decir, llevar estas alturas diez veces mayores de lo que vendrían en rigor representadas en el plano. Así, cada metro viene representado en la sección abatida por un segmento de $1 : 250 = 0,004$, o sea 4 mm. La altura de las personas, supuesta 1,70 m, se ha representado por segmentos a dicha escala. Como es fácil ver, la visual dirigida desde *A* y rasante al terreno, no alcanza a *B*.

Esta curva sección se llama *perfil*, y su obtención es muy interesante en los problemas de trazado de carreteras, vías férreas, etc.

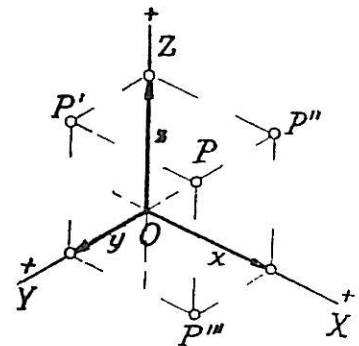
EJERCICIOS

1. Representar un cubo y un tetraedro regular apoyados por una cara en el plano horizontal.
2. Idem apoyados por un vértice de modo que el eje de simetría ternaria que pase por él sea vertical.
3. Representar un octaedro regular apoyado por una cara en el plano horizontal.
4. Idem el dodecaedro.
5. Idem el icosaedro apoyado por un vértice de modo que el eje de simetría quinario que pase por él sea vertical.
6. Trazar en sistema diédrico por un punto dado *P* la recta horizontal *s* perpendicular a otra dada *r* y representar el tetraedro regular que tiene dos aristas opuestas en *r* y *s*. (Después de hallar en posición la mínima distancia *RS* entre *r* y *s*, dedúzcase la arista en construcción aparte y llévase la semiarista a un lado y otro de los pies *R* y *S*.)
7. Representar una pirámide hexagonal regular que tenga el vértice en un punto dado, la base en un plano dado con un vértice a distancia dada del plano vertical y de modo que la arista básica sea igual a la altura.
8. Representar un cubo con una arista en un segmento dado en el plano horizontal y una cara en un plano que tenga una inclinación dada con dicho plano.
9. Representación del octaedro regular conjugado del cubo anterior y cuyas caras pasan por sus vértices.
10. Representada una pirámide apoyada en el plano horizontal y tomados tres puntos *ABC* en tres de sus aristas laterales, construir por simples consideraciones de homología las proyecciones de la sección producida en la pirámide por el plano *ABC*.
11. Demostrar que las dos proyecciones horizontal y vertical de una figura plana son homológicas afines respecto de la recta en que se proyecta la intersección de su plano con el segundo bisector.
12. Desarrollar el perfil vertical de un camino trazado en el plano topográfico anterior.

LECCIÓN 25.—PERSPECTIVAS AXONOMÉTRICAS. PERSPECTIVA CABALLERA

1. Los sistemas axonométricos.—El sistema diédrico, por la duplicidad de sus planos de proyección, por el giro que se supone aplicado a uno de ellos y por la posición excepcional de perfil con que se presentan ciertas caras de los cuerpos representados cuando, para comodidad de las lecturas, se colocan sus direcciones principales paralelas a los planos de proyección, exige en ocasiones un cierto esfuerzo para llegar a *ver* la forma de los cuerpos representados. Se consigue un mejor efecto visual de ellos (a expensas de la comodidad de medidas) proyectándolos sobre planos oblicuamente colocados respecto de sus direcciones principales. La llamada proyección axonométrica que así resulta, tiene el siguiente fundamento:

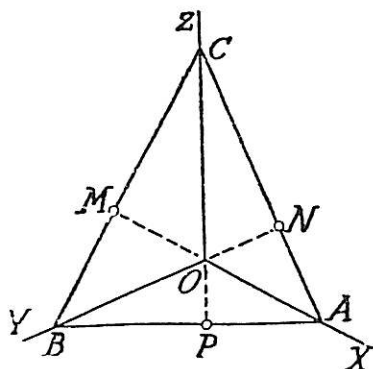
De manera análoga a como se determina la posición de un punto en coordenadas cartesianas rectangulares planas, un punto P del espacio puede determinarse por sus tres distancias PP' , PP'' , PP''' a las caras de un triedro trirrectangular de referencia, o lo que es lo mismo, proyectando ortogonalmente P sobre tres ejes rectangulares OX , OY , OZ , y dando las distancias x , y , z , del origen O a las tres proyecciones con los signos que les correspondan según los sentidos elegidos como positivos en dichos ejes.



En lugar de dar los tres números, dibujemos la figura proyectándola, con los referidos ejes, sobre un plano elegido como plano del cuadro o del dibujo. Obtendremos así la representación axonométrica del espacio, que se llama *ortogonal* u *oblicua* según que la proyección sobre el plano del dibujo sea *ortogonal* u *oblicua*.

Entre los sistemas de proyección oblicua, el único usado en la práctica es la llamada *perspectiva caballera*, en la que el plano del cuadro coincide o es paralelo con el OXZ del diedro de referencia.

2. El triángulo de las trazas en la axonometría ortogonal.—En los sistemas de axonometría ortogonal se adopta como plano del cuadro un plano que corte a los semiejes positivos OX , OY , OZ del triedro de referencia, y (elegido de modo que no pase por el origen) se fija su posición respecto de dicho triedro, dando el llamado *triángulo de las trazas* o intersección del triedro con el cuadro, triángulo que desempeña un papel fundamental en las construcciones.



Por ser la proyección sobre el cuadro *ortogonal*, cada una de las trazas es normal a la proyección del eje perpendicular (tomo I, lección 42, § 2). Así

la traza AB del plano XY es perpendicular a la proyección del eje OZ , etc., de donde resulta :

Las proyecciones de los ejes son las alturas del triángulo de las trazas.

Cada una de estas alturas es, a su vez, traza sobre el cuadro de los planos proyectantes de los ejes, los cuales cortan a los planos de referencia en rectas perpendiculares a las referidas trazas desde O . Los segmentos OM , ON , OP de tales rectas son en el espacio forzosamente interiores a los triángulos BOC , COA , AOB (por ser éstos rectángulos en O); luego M , N , P son interiores a los lados BC , CA , AB , es decir, las tres alturas de ABC son interiores. Por tanto.

El triángulo de las trazas ABC es acutángulo; de donde: Los ángulos que forman dos a dos las proyecciones de los semiejes OA , OB , OC que cortan al cuadro son obtusos, por ser suplementos de aquellos ángulos. Por ejemplo, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle MON = 180^\circ - \sphericalangle C$

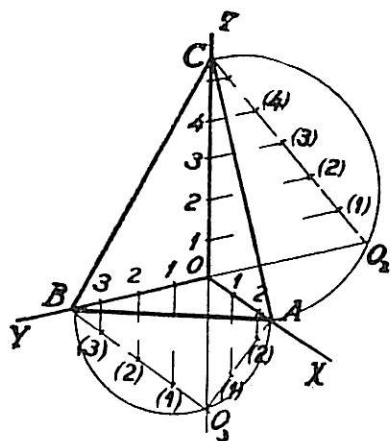
De otro modo: *La proyección de cada eje atraviesa el ángulo obtuso formado por los otros dos.*

Recíprocamente. Elegidos al arbitrio tres semiejes concurrentes OX , OY , OZ , formando ángulos obtusos, o un triángulo de las trazas acutángulo ABC , existen dos triedros trirectángulos simétricos respecto del cuadro que se proyecten según estos ejes o que corten al cuadro según este triángulo ABC . Pues el vértice O' tiene que estar en la perpendicular por O al cuadro y en la esfera de diámetro AB (lugar geométrico de los puntos del espacio desde los que se ve AB bajo ángulo recto).

3. Las escalas sobre los ejes. Abatimientos de las caras del triedro.—

Fijados los tres ejes en las condiciones dichas y hallados el triángulo de las trazas, es fácil construir las escalas sobre los referidos ejes. Basta para ello abatir dos de los triángulos AOB , BOC , COA alrededor de sus trazas sobre el cuadro, por ejemplo, AOB , AOC . El vértice O se abatirá sobre las circunferencias de diámetro AB y AC , respectivamente, en O_3 y O_2 alineados con las alturas respectivas CO y BO . Las escalas sobre OX y OY son homológicas afines de las situadas sobre O_3A , O_3B y, análogamente, la escala sobre OZ es afín de la escala sobre O_2C , lo que permite construirlas fácilmente.

Estos abatimientos permiten, además, hallar en su verdadera magnitud todas las figuras situadas en las caras del triedro y efectuar en ellas cuantas construcciones sean precisas.



4. Coeficientes de reducción. Teorema de Schlömilch.—

La razón entre la proyección de un segmento del eje x y dicho segmento, por ejemplo $OA : O_3A$, se llama *coeficiente de reducción* sobre dicho eje; análogamente, los demás. Dichos coeficientes son, en definitiva, los cosenos de los ángulos

agudos α, β, γ que forman los tres ejes OX, OY, OZ con el plano del cuadro, y su consideración tiene importancia en las aplicaciones técnicas porque valoran la preponderancia visual relativa de las tres dimensiones fundamentales x, y, z de la figura.

De lo antes dicho se desprende que la elección de los ejes determina los valores de dichos coeficientes de reducción.

Pero interesa con frecuencia, en las aplicaciones, proceder a la inversa, es decir, fijar *a priori* tales coeficientes de reducción con objeto de dar de antemano la precisión y detalle deseados en cada una de las direcciones. El problema consiste, entonces, en hallar las proyecciones de los ejes. La solución de este problema la proporciona el

TEOREMA DE SCHLÖMILCH: *Las alturas del triángulo de las trazas son las bisectrices de su triángulo órtico MNP.*

Los lados de este triángulo órtico son proporcionales a los cuadrados de los coeficientes de reducción.

La primera parte fué ya demostrada en el tomo I, lección 16, § 5 para todo triángulo, y lo ha sido nuevamente en éste como aplicación del cuadrivértice (lección 15, § 5, II).

Para demostrar la segunda parte, abatamos sobre el cuadro el plano proyectante del eje OX alrededor de su traza AM . El vértice (O) abatido caerá sobre la perpendicular a AM por O y sobre la circunferencia de diámetro AM (por ser recto el ángulo en O). El coeficiente de reducción sobre el eje OX será, pues,

$$\cos \alpha = \frac{AO}{A(O)} \quad \text{y elevando al cuadrado} \quad \cos^2 \alpha = \frac{\overline{AO}^2}{A(O)^2} = \frac{\overline{AO}^2}{AO \cdot AM} = \frac{AO}{AM}$$

Obsérvese ahora que O y A son respectivamente incentro y exincentro del triángulo órtico MNP (por ser puntos de concurso de bisectrices). Llamemos L y K los puntos de contacto de las circunferencias inscrita y exinscrita correspondientes, con el lado MN y su prolongación. Se tendrá

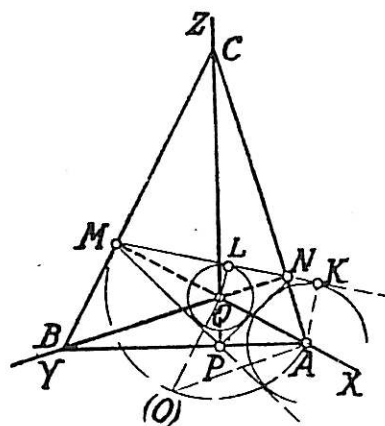
$$\frac{AO}{AM} = \frac{KL}{KM} = \frac{NP}{p}$$

($KM = p$ semiperímetro de MNP ; $KL = NP$; v. § 7, lecc. 24, tomo I)

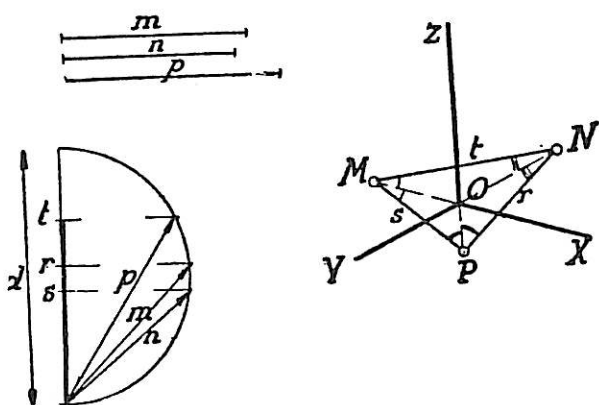
por tanto, $\cos^2 \alpha = \frac{NP}{p}$, y análogamente, $\cos^2 \beta = \frac{PM}{p}$, $\cos^2 \gamma = \frac{MN}{p}$, lo que demuestra el teorema.

Podremos, pues, escribir

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos^2 \alpha}{NP} = \frac{\cos^2 \beta}{MP} = \frac{\cos^2 \gamma}{MN} = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{2p}$$



de donde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$, relación entre los tres coeficientes de reducción que permite hallar uno de ellos conocidos los otros dos.

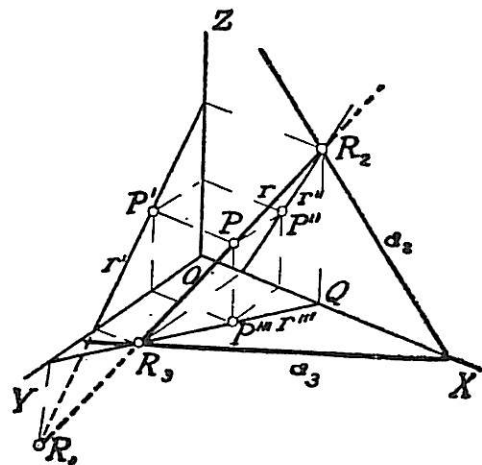


La construcción que se desprende del teorema de Schlämilch es bien sencilla. Dados tres números o tres segmentos m, n, p que se desea sean proporcionales a los coeficientes de reducción, calcularemos o construiremos tres segmentos r, s, t proporcionales a $m^2n^2p^2$, como indica la figura ($m^2 = rd, n^2 = sd, p^2 = td$). Con ellos como lados, construiremos un triángulo MNP ; sus bisectrices serán las direcciones de los ejes. Para que el sistema sea posible: *El cuadrado del mayor de los datos m, n, p debe ser menor que la suma de los cuadrados de los otros dos*. Si $m = n = p$ los tres coeficientes de reducción son iguales, MNP es equilátero, OX, OY, OZ forman ángulos de 120° , y el sistema se llama *isométrico*.

5. **Representación de puntos, rectas y planos. Problemas de incidencia.** Un punto P y una recta r se representan por su proyección directa P, r sobre el cuadro y la de alguna de sus proyecciones sobre los planos del triedro de referencia, generalmente la proyección $P'''(r''')$ sobre el plano xy . Claro es que P y P''' deben estar en una paralela del eje z (y análogamente PP', PP'' deben ser paralelas a los ejes x, y). Las restantes proyecciones se deducen fácilmente, como indica la figura. Así, trazando por P''' una paralela al eje x y por su punto de intersección con el eje y una paralela al eje z , la intersección de esta recta con la paralela por P al eje x dará P' .

5. Representación de puntos, rectas y planos. Problemas de incidencia.

Las intersecciones o trazas de una recta con los planos de referencia se proyectan según las intersecciones de su proyección directa r con las de sus proyecciones r', r'', r''' sobre los planos de referencia. Así, si se dan rr''' la traza R_3 sobre el plano XY es la intersección de r y r''' , la traza R_2 sobre el plano XZ está en una paralela al eje Z trazada por el punto Q de intersección de r''' con el eje X , lo que permite hallar r'' que pasará por R_2 y por la proyección de R_3 sobre el eje x . Proyectando R_2 y R_3 sobre ZY obtendremos r . La intersección de r' y r es la traza sobre YZ .



Un plano α se representa simplemente por dos de sus trazas a_2, a_3 sobre los planos de referencia

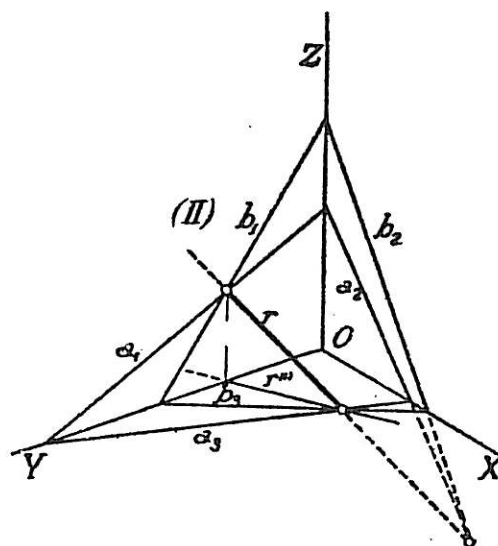
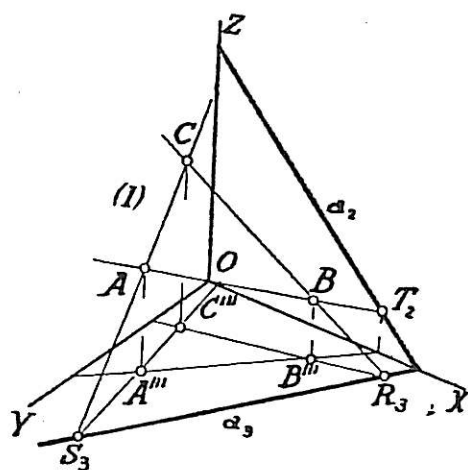
Las condiciones de incidencia son análogas a las del sistema diédrico:

Un punto P situado sobre una recta r tiene sus proyecciones situadas sobre las proyecciones homónimas de la recta (v. figura).

Una recta r situada sobre un plano α tiene sus trazas sobre las trazas homónimas del plano.

De acuerdo con estas condiciones, se resuelven en las siguientes figuras los problemas :

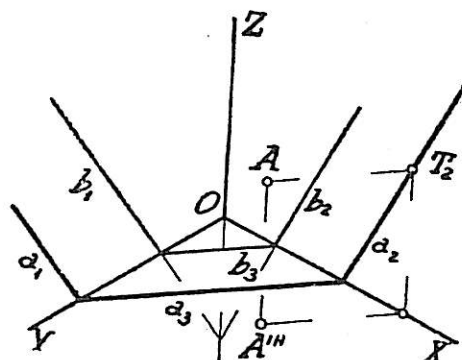
1.º (fig. I) Plano determinado por tres puntos A, B, C .



2.º (fig. II) Recta intersección r de dos planos $\alpha\beta$ dados por sus trazas. En particular, si uno de ellos β es el plano del cuadro, la intersección r es la traza del plano α sobre el cuadro llamada *traza natural*, y nos servirá más adelante para abatir directamente el plano dado α sobre el cuadro.

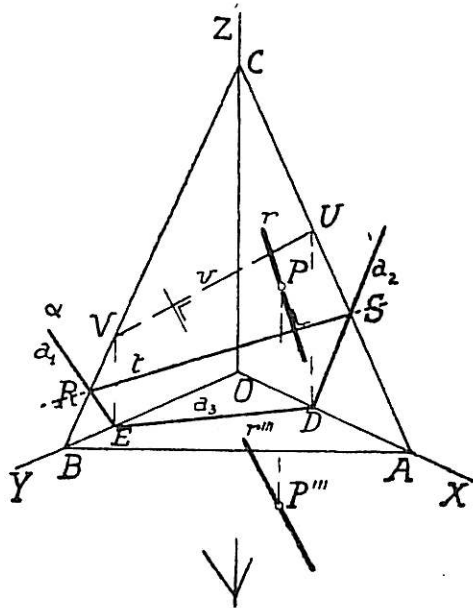
6. Paralelismo y perpendicularidad.—Las condiciones de paralelismo entre dos rectas o entre dos planos son análogas a las del sistema de Monge (v. § 7, lección anterior).

EJEMPLO. Por un punto A trazar el plano α paralelo a otro dado $\beta(b_1b_2b_3)$. Trazaremos por A la paralela a una recta del plano β , su traza b_3 , por ejemplo, y por una de las trazas T_2 de esta recta, la traza a_2 del plano buscado paralela a la b_2 del plano dado; hallada a_2 se completan inmediatamente a_3 y a_1 paralelas a b_3 y b_1 .



Una recta perpendicular a un plano α tiene su proyección directa r sobre el cuadro perpendicular a la traza t de este plano sobre el cuadro. (Recuérdese, en efecto, que la proyección es *ortogonal*, con lo que puede aplicarse el teorema § 2, lección 42, tomo I.) La proyección r''' de la recta r sobre el plano xy (horizontal) forma asimismo ángulo recto (en el espacio) con la traza a_3 del plano dado sobre el xy , pero por estar dicho ángulo recto situado en un plano oblicuo respecto del cuadro, ya no es recto en proyección. Para asegurar la

perpendicularidad entre a_3 y r''' se puede proceder abatiendo el plano xy , pero es más breve tener en cuenta que r''' es perpendicular al plano vertical que pasa por a_3 y, por tanto, a su traza v sobre el cuadro (v. figura).

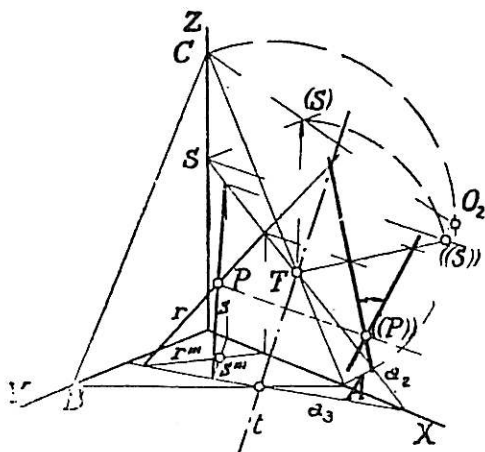
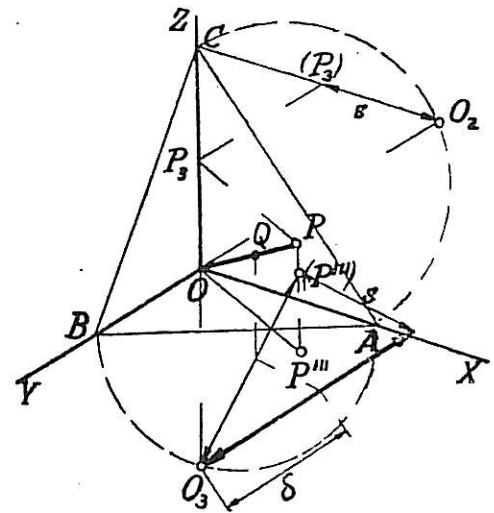


En la figura se ha construido por P la perpendicular r al plano $\alpha(a_1, a_2, a_3)$. La proyección directa de la recta es perpendicular a la traza RS del plano sobre el cuadro. La proyección sobre XY es perpendicular (en el espacio) a la traza a_3 del plano y, por tanto, al plano vertical que pasa por a_3 cuyas trazas son a_3 y las paralelas por E y D al eje z . Las intersecciones de dichas trazas con BC y CA dan los puntos V y U y la traza normal $v \equiv UV$ a la que debe ser perpendicular r'''

7. Distancias y ángulos.— La distancia entre el origen O y un punto P se halla mediante la construcción del triángulo rectángulo OPP''' formado por estos puntos y una proyección P''' de P . El cateto OP''' se obtiene abatiendo el plano XY , el otro cateto PP''' se obtiene trasladándolo sobre el eje OZ ($PP''' = OP_3$) y abatiendo el plano XZ .

Una vez hallada la longitud del segmento OP podemos recíprocamente situar sobre la recta OP un punto Q que esté a una distancia dada δ de O , operando por proporcionalidad.

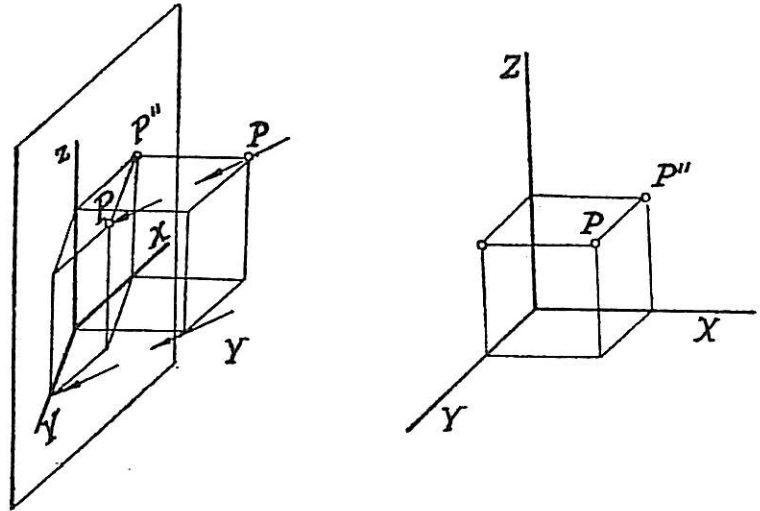
La determinación de la distancia entre dos puntos cualesquiera R, S o la construcción de un punto U sobre una recta RS situado a una distancia dada δ de R , se resolverán reduciéndolas a los problemas anteriores mediante el trazado de segmentos iguales y paralelos por el origen.



El ángulo de dos rectas concurrentes r, s se hallará abatiendo su plano $\alpha(a_2, a_3)$ sobre el cuadro alrededor de la traza t sobre éste. Esta traza es el eje de la homología afín entre la figura plana sobre α y su abatimiento. Para determinar esta homología bastará hallar dos puntos homólogos en esta afinidad. Por ejemplo, el punto S intersección del plano α con el eje OZ vendrá abatido en $((S))$ sobre la normal por S a la traza t y a una distancia $T((S)) = T(S)$ obtenida por abatimiento del plano XZ , en el que están T y S .

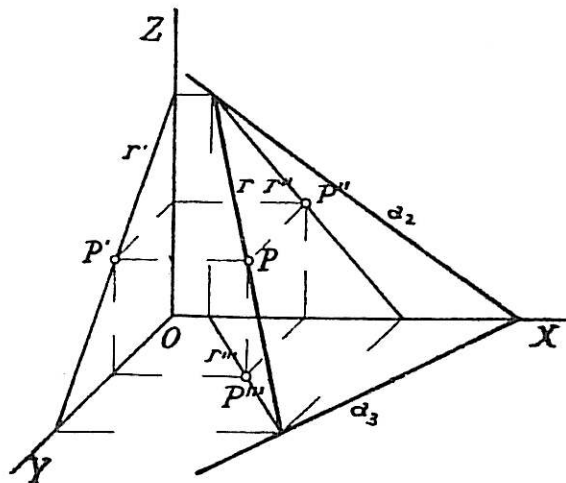
Expuestos estos problemas fundamentales y la operación de abatimiento de un plano, podemos resolver, como en sistema diédrico, cuantos problemas métricos y constructivos se nos ofrezcan.

8. Perspectiva caballera.—La perspectiva caballera es una perspectiva axonométrica oblicua, es decir, de proyección oblicua sobre el plano del cuadro, en la que este plano se toma confundido con el XZ del triedro de referencia. De esta forma, las medidas sobre los ejes OX , OZ no sufren alteración alguna. La escala sobre el eje OY y la proyección de dicho eje dependen de la dirección de proyección oblicua elegida. Recíprocamente, elegida arbitrariamente una proyección de OY y una escala en ella queda indirectamente determinada la dirección de proyección.



Es frecuente adoptar la dirección de la proyección del eje OY a 135° con OX y OZ y el coeficiente de reducción en dicho eje sencillo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ... según la importancia con que queramos destacar las dimensiones paralelas al eje OY . Es de advertir que para direcciones de proyección formando ángulo $<45^\circ$ con el cuadro este coeficiente sería >1 ; pero en la práctica se elige siempre <1 y por ello se llama *de reducción*.

9. Problemas de incidencia y paralelismo.—Los puntos y rectas se representan, como en axonometría ortogonal,



por su proyección directa (oblicua) sobre el cuadro y por la de una de sus proyecciones ortogonales sobre los planos de referencia. En particular, si se elige la proyección sobre el plano xz tendremos en definitiva determinado el punto por su proyección ortogonal P'' sobre el cuadro xz y su proyección oblicua P sobre el mismo cuadro.

Los planos se representan por sus trazas, como en axonometría ortogonal.

Los problemas de incidencia tienen en perspectiva caballera tratamiento y solución idéntica a la expuesta en axonometría ortogonal. Así, en la figura, el plano $\alpha(\alpha_2\alpha_3)$ contiene la recta r y ésta contiene el punto P .

10. Problemas de perpendicularidad y métricos.—Todas las figuras del plano XZ o situadas en planos paralelos a él, se proyectan sobre el cuadro XZ en su verdadera magnitud. Las construcciones y medidas de las figuras situadas en el plano XY se hallarán abatiéndolas sobre el plano del cuadro, teniendo en cuenta que entre la proyección y la figura abatida existe una homología afín de eje OX (traza de XY sobre el cuadro XZ). Un punto cualquiera Y del eje y vendrá abatido en una perpendicular a OX por O , y a una distancia $O(Y)$ igual al producto de OY por el recíproco del coeficiente de reducción.

Así, si la escala sobre OY es $\frac{1}{2}$ será $\overline{O(Y)} = 2\overline{OY}$. Hallados el eje y un par de puntos homólogos de la homología afín, ésta permite efectuar fácilmente las construcciones y medidas en el plano XY , y análogamente para el plano YZ .

Con lo dicho podemos resolver fácilmente los problemas de perpendicularidad y los métricos de que hemos hablado antes. Así, por ejemplo,

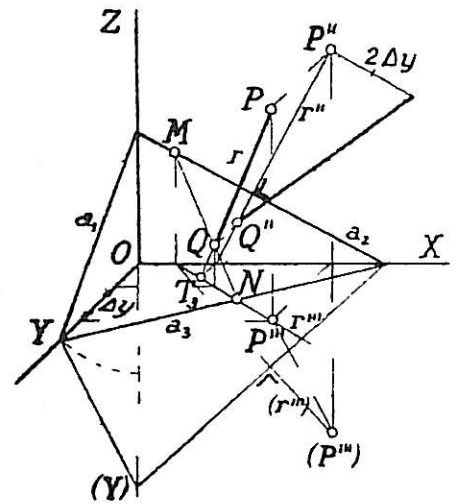
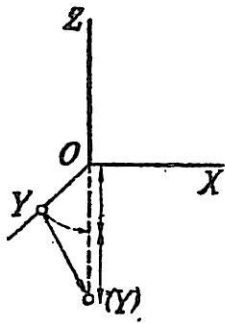
Problema: Hallar la distancia de un punto P a un plano $\alpha(a_1 a_2 a_3)$. Las proyecciones ortogonales de la perpendicular sobre los planos coordenados son perpendiculares (en el espacio) a las trazas del plano dado sobre los mismos planos. Como el plano XZ coincide con el cuadro, la proyección r'' sobre dicho plano es normal a a_2 . No así las restantes proyecciones r''' , r' que habrá que construir abatiendo los planos XY , YZ .

En la figura se ha obtenido r''' por abatimiento de XY . (Escala en OY , $\frac{1}{2}$.) Los dos proyecciones r'' , r''' determinan la perpendicular en cuestión. La proyección directa (oblicua) r se obtiene hallando una de sus trazas, por ejemplo, la traza T_3 sobre el plano XY (situada en r'' y en la paralela a OY por el punto de intersección de r'' con OX) (*).

Una vez hallada r se determina su intersección Q con el plano dado (mediante la intersección MN de dicho plano con el proyectante vertical de la recta). La distancia PQ es la pedida y se ha construído como hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es la proyección $P''Q''$ sobre el plano XZ y el otro es la diferencia Δy de coordenadas y entre P y Q , teniendo en cuenta la escala de reducción. (Se ha duplicado, por haber supuesto dicha escala = $\frac{1}{2}$.)

Problema: Hallar el ángulo de dos rectas ab . Las supondremos concurrentes en P (de lo contrario trazáramos por P paralelas a ellas) y definidas por sus

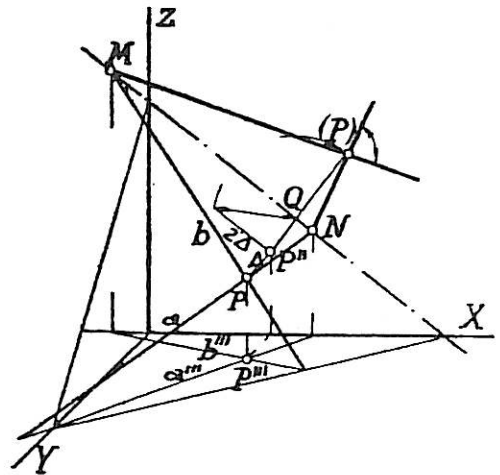
(*) Es de advertir que aquí la proyección directa r de la recta sobre el cuadro no es necesariamente perpendicular a la traza a_2 del plano α sobre el mismo por ser oblicua dicha proyección.



proyecciones aa''' bb''' directas y sobre XZ , por ejemplo. Hallamos inmediatamente las trazas M , N sobre el plano XY .

Abatiremos ahora el plano ab alrededor de su traza MN sobre el cuadro XZ . El punto P abatido vendrá en una perpendicular $P''Q$ a MN por P'' (no por P , por ser P proyección oblicua) a una distancia $Q(P)$ del pie Q de dicha perpendicular, igual a la que existe entre P y Q (y que es hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos: el segmento $P''Q$ y el doble de PP''). (Supuesta la escala sobre $QY = \frac{1}{2}$.)

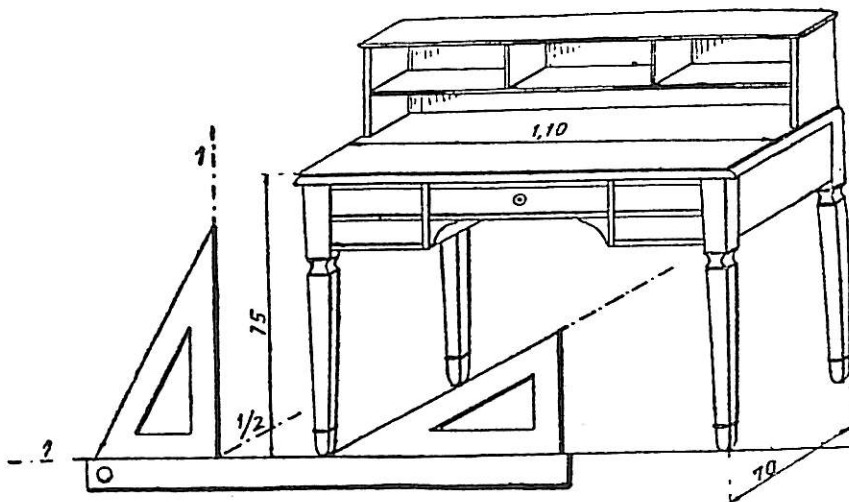
El ángulo $N(P)M$ abatido es el pedido.



11. Perspectiva caballera de un mueble.—Tratemos de representar, por ejemplo, una mesa de escritorio. Adoptaremos como plano de proyección el plano de frente de la mesa, y tomando todas las medidas que hagan falta, dibujaremos una figura semejante a la contenida en dicho plano, y a escala conveniente para que quepa la figura en el papel y para que dé reducciones fáciles de calcular, como, por ejemplo, $1/10$, $1/20$, $1/25$, ...

Así se ha dibujado en la figura el frente de la mesa. Las aristas perpendiculares a este plano se representan sobre un sistema de rectas paralelas que forme con la horizontal un ángulo cómodo de construir (el ángulo de una escuadra de 45° ó 30° por ejemplo), y se miden a una escala que es generalmente una fracción cómoda de la escala anterior, por ejemplo $\frac{1}{2}$ en la figura. Esto equivale a dar indirectamente la dirección de proyección.

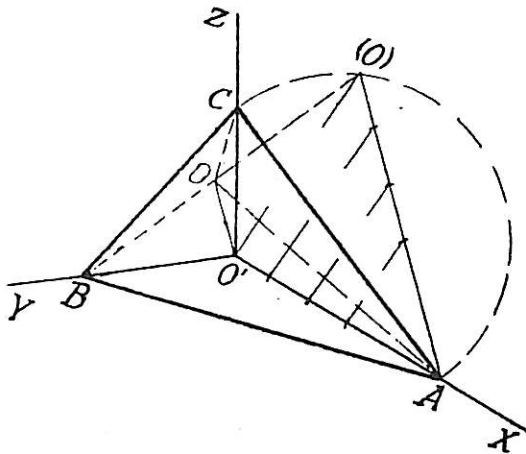
En la figura adjunta, las tres dimensiones principales de la mesa son 1,10 m., 75 cm. y 70 cm. Las dos primeras se han representado, a escala de $1/25$, por



dos segmentos perpendiculares de 44 mm. y 30 mm., respectivamente. La tercera dimensión 70 cm. mide en el dibujo la mitad de los 28 mm. que le corresponderían a la escala anterior, es decir, 14 mm., y está inclinada 30° respecto de la horizontal.

Teniendo indicadas las escalas para las tres direcciones principales del cuerpo, se completan los demás detalles fácilmente. Conviene acompañar la figura de las dimensiones más importantes. Las demás se deducen de la escala o por proporcionalidad.

12. **Axonometría oblicua general.**—**Teorema de Pohlke.**—Aunque no entremos en detalles sobre las construcciones, consignaremos la posibilidad de representar el espacio en *proyección axonométrica oblicua* obtenida proyectando *oblicuamente* el triedro trirectángulo de referencia sobre un cuadro no coincidente con ninguno de los planos de proyección. El triángulo ABC de las trazas sobre el cuadro sigue siendo acutángulo, pero las proyecciones de los ejes ya no son sus alturas; pueden ser tres cevianas cualesquiera de dicho triángulo, eligiendo convenientemente la dirección de proyección. En efecto, el triángulo de las trazas define (salvo simetría) la posición del vértice O del triedro en el espacio, que unido con la proyección oblicua O' del mismo elegida, da la dirección de proyección.



Las escalas sobre los ejes se hallarán, como para la simetría ortogonal, abatiendo sobre el cuadro los triángulos AOB , BOC , COA . La razón $O'A : (O)A$ entre el segmento proyectado (oblicuamente) $O'A$ y el segmento abatido $(O)A$ permitirá construir la escala sobre OX . Ya no es propio aquí llamar a dicha razón coeficiente de *reducción*, por cuanto en proyección oblicua puede ser la proyección de un segmento, mayor que él.

Así como en axonometría ortogonal las direcciones de las proyecciones de los ejes determinaban las escalas sobre ellos y recíprocamente (§§ 3, 4), en axonometría oblicua no existe tal relación y pueden prefijarse arbitrariamente las direcciones y las razones entre las escalas según expresa el siguiente:

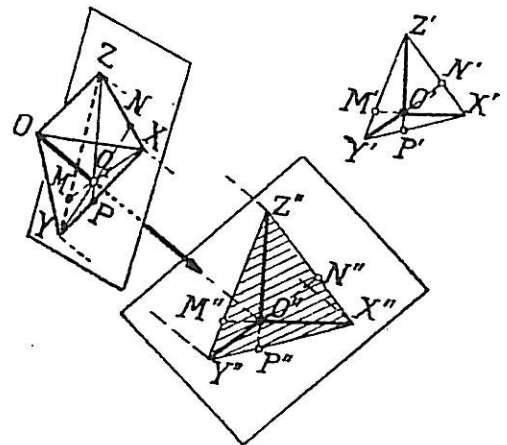
TEOREMA DE POHLKE: *Tres segmentos $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ de origen común y direcciones arbitrarias no coincidentes las tres, pueden considerarse como proyecciones paralelas de tres aristas concurrentes de un cubo.*

En efecto, sean $M'N'P'$ los puntos determinados en los lados del triángulo $X'Y'Z'$ por las cevianas $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$. El triángulo $X'Y'Z'$ deberá ser proyección paralela de triángulo equilátero formado por los tres vértices XYZ no comunes de tres aristas concurrentes del cubo. Asignemos provisionalmente a este cubo una arista arbitraria.

Tomando sobre los lados de XYZ puntos MNP que les dividan en razones de igual valor y signo que sus homónimas sobre $X'Y'Z'$, es decir, tales que $PX : PY = P'X' : P'Y'$, ..., etc., y trazando las cevianas XM , YN , ZP , tendremos un punto O , cuya unión con el vértice O determina la dirección de proyección en relación con el cubo. Imaginemos proyectado en esta dirección el triángulo XYZ y cortemos el prisma obtenido por un plano de manera que el triángulo sección $X''Y''Z''$ sea semejante al dado $X'Y'Z'$, lo cual es siempre posible, según se vió en el problema II del § 8, lección 20. La razón de semejanza entre la sección obtenida y el triángulo $X'Y'Z'$ dirá en cuánto hemos de ampliar o reducir las aristas del cubo elegido para que se proyecten exactamente según $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$.

Este teorema justifica teóricamente la posibilidad de croquizar, como se hace de hecho en la práctica, tomando tres ejes y tres escalas arbitrarias.

V. Ejercicios al final de la lección siguiente.



LECCIÓN 26.—LA PERSPECTIVA CÓNICA. EL SISTEMA GNOMÓNICO

1. La perspectiva central o cónica.—Las perspectivas axonométrica y caballera, obtenidas en la lección anterior, difieren, como proyecciones *paralelas*, de la verdadera perspectiva visual cónica. Esta diferencia es tanto más acusada cuanto mayores son las dimensiones de los objetos representados, en relación con la distancia al punto de vista. En particular, la perspectiva caballera, por su carácter de proyección *oblicua*, deforma desagradablemente el aspecto de los cuerpos. Por ello no es conveniente emplear tales sistemas en proyectos de grandes dimensiones, como edificios, puentes, etc. Para prever, en tales casos, el efecto estético visual del proyecto, es preciso dibujar una perspectiva *cónica* del mismo.

Limitaremos, pues, el estudio del sistema de proyección central o cónica a tal aplicación práctica (*).

2. Perspectiva cónica de un edificio dado en planta y alzados.—En la lección 22, § 9, hemos establecido la relación fundamental de homología que liga la perspectiva de una figura plana sobre un plano (del dibujo) con su abatimiento sobre el mismo, y hemos aplicado tal homología para deducir la forma de la planta de un edificio, de su perspectiva.

Ahora procederemos a la inversa. Dada la planta y elegido un punto de vista, dibujaremos primero la perspectiva de dicha planta aplicando la referida homología. Finalmente, para levantar sobre dicha planta las *dimensiones verticales*, bastará *trasladarlas* o referirlas *al plano del cuadro* donde efectuaremos las medidas a escala, del mismo modo como hemos leído la altura de la cornisa en la perspectiva del Monasterio del ejemplo de la página 170.

Este es todo el fundamento teórico que nos ha permitido obtener la perspectiva cónica de las líneas principales del pequeño edificio que se reproduce a continuación y en el que hemos elegido el punto de vista a la altura normal de 1,60 m. sobre el suelo, situado en el punto de proyección horizontal V' , y el plano del cuadro vertical indicado por su traza t , elegida aproximadamente perpendicular al plano bisector del diedro formado por los planos visuales verticales extremos.

He aquí resumido el proceso constructivo:

1.º Determinación de los elementos que definen la homología entre la planta abatida sobre el cuadro y su perspectiva. El eje de homología es la intersección t del plano horizontal con el cuadro (vertical). La recta límite es paralela a t , situada a distancia de 1,60 m. (a escala) sobre t . El centro de homología está análogamente a 1,60 m. por encima del abatimiento (V')

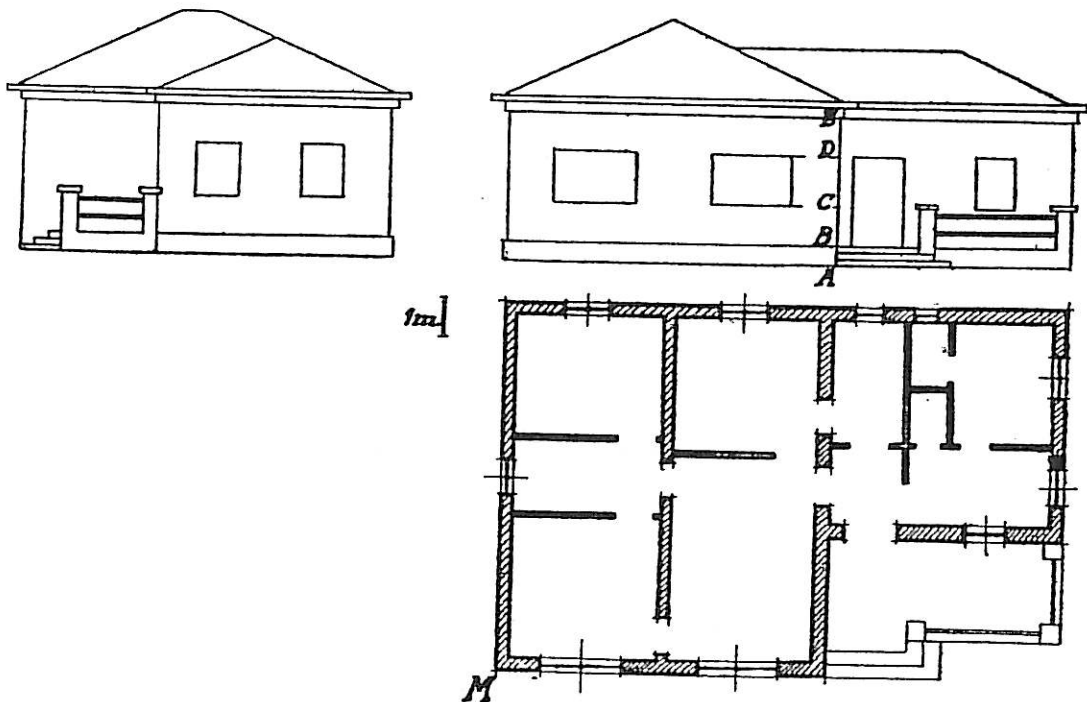
(*) La fotogrametría o técnica de levantamiento de planos por método fotográfico hace también uso de las leyes de la perspectiva, pero en sentido inverso, para obtener un plano topográfico de un terreno a partir de fotografías del mismo. En la imposibilidad de dar ni siquiera idea de tal cuestión en este breve capítulo, remitimos al lector a los tratados especiales.

sobre el cuadro de la proyección ortogonal V' del punto de vista V sobre el plano horizontal. (Basta tener en cuenta que, por el teorema de las tres homologías debe estar alineado con V a 45° con el horizontal y el vertical; es decir, es el punto V abatido sobre el cuadro alrededor de la recta (límite). Por razones de conveniencia de dibujo se ha hecho aquí el abatimiento en sentido contrario al del § 9 de la lección 22.

2.º Definida la homología por los elementos anteriores, se trazará la figura homóloga de la planta abatida, obteniéndose así la perspectiva de dicha planta.

Siendo las principales horizontales del edificio paralelas a dos únicas direcciones o puntos impropios, es conveniente hallar los puntos homólogos L y K (puntos de fuga) situados en la referida recta límite. En ellos convergerán los dos sistemas de paralelas aludidos.

3.º Por haber elegido el plano del cuadro vertical, las verticales del edificio se proyectarán según un sistema de rectas paralelas (perpendiculares a t). Sobre la recta AE , situada en el plano del cuadro tomaremos a escala los niveles B, C, D, E de los distintos sistemas de horizontales más importantes del edificio, que aparecerán a lo largo de las fachadas, según rectas convergentes en los puntos L o K . En esta forma se halla fácilmente la perspectiva de las cornisas, marcos de puertas y ventanas, escaleras, barandas, etc.



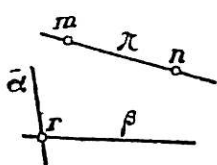
4.º Las verticales de fachada (montantes de puertas y ventanas, etc.) se han trazado hallando los homólogos de sus pies en la perspectiva de la planta y levantando sobre ellos las verticales correspondientes.

OBSERVACIÓN.—En esta perspectiva se ha supuesto el plano del cuadro vertical con objeto de reproducir el aspecto visual del edificio para una persona situada de pie a una distancia discreta del mismo.

Cuando se trata de obtener *vistas de pájaro* hay que situar inclinado el plano del cuadro y las verticales de los edificios ya no son paralelas sino concurrentes en su correspondiente punto de fuga.

Cuando el edificio o conjunto representado es de grandes dimensiones, el punto de vista debe tomarse a distancia proporcionada, por lo que con frecuencia se sale de los límites del dibujo. Es preciso manejar entonces homologías de centro inaccesible (V. ejercicio 19, Lec. 23). Asimismo cuando un punto de fuga sale de los límites del dibujo es preciso trazar rectas concurrentes en él mediante los recursos que proporciona por ejemplo, el teorema de los triángulos homológicos u homotéticos (V. ejercicio 18, Lec. 23).

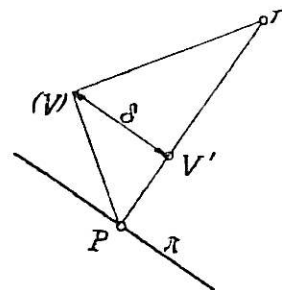
3. Sistema gnomónico.—Para representar en el plano del dibujo una radiación de vértice propio y resolver en ella problemas de incidencia y métricos (perpendicularidad, ángulos, diedros...) basta cortarla por un plano que no pase por el vértice. Cada recta y cada plano de la radiación vendrán representados por sus respectivas trazas, es decir, respectivamente por un punto y una recta. Las rectas de la radiación situadas en el plano paralelo al cuadro se representarán por puntos impropios del cuadro, y dicho plano paralelo por la recta impropia.



INCIDENCIA.—A recta y plano incidentes corresponden trazas incidentes, con lo que la traza π del plano que pasa por dos rectas se obtiene uniendo las trazas m , n de éstas, y la recta r intersección de dos planos α , β se obtiene hallando la intersección de sus trazas.

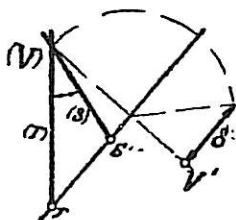
PERPENDICULARIDAD.—Para resolver problemas métricos necesitamos fijar la posición del vértice V , lo que se hace dando la proyección ortogonal V' del mismo sobre el cuadro y su distancia δ a él.

Para trazar el plano π perpendicular a una recta r , abatiremos el plano perpendicular al cuadro por r . La perpendicular a la recta r abatida $(V)r$ dará el punto P por el que pasa la traza del plano perpendicular, la cual debe ser perpendicular a la proyección ortogonal $V'r$ en virtud del § 2, lección 42, tomo I.



La construcción se puede invertir para hallar la recta r perpendicular a un plano π , construyendo en el abatimiento alrededor de $V'P$ (perpendicular a π) el mismo triángulo rectángulo $P(V)r$.

ANGULOS.—Para averiguar el ángulo de dos rectas rs abatiremos el plano que determinan alrededor de su traza rs , teniendo en cuenta lo dicho en § 8, lección 22. La figura indica la construcción.



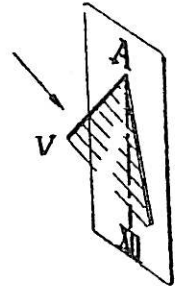
Para averiguar el ángulo de dos planos, hallaremos el de dos perpendiculares o el de una sección recta.

Con estos elementos podemos resolver problemas métricos en la radiación, como la construcción de triedros, etc.

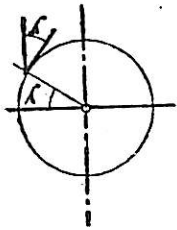
4. Construcción de un reloj solar.—Sólo presentaremos, como aplicación práctica, la construcción de un reloj solar. El fundamento de tales relojes es el movimiento diurno uniforme de rotación de la Tierra alrededor de su eje, lo que produce un movimiento aparente diurno de rotación del Sol alrededor del mismo eje.

Un estilete (gnomon) paralelo a la dirección del eje de la Tierra proyectará, pues, un plano de sombra que girará con movimiento uniforme de $(360^\circ : 24 =)$ 15 grados por hora.

Supongamos, pues, el estilete VA en cuestión clavado en una pared vertical encarada a mediodía, y en su extremo libre V el vértice de una radiación, que supondremos cortada por la referida pared como plano del cuadro.



Para construir un reloj solar graduado en horas, hallaremos las trazas de un sistema de planos de arista VA formando diedros de 15 en 15 grados. Nos falta un origen de ángulos, es decir, de horas. Para ello observemos que el mediodía solar es el momento en que pasa el Sol por el meridiano del lugar. Por tanto, a esta hora el plano de sombra del estilete es el plano meridiano que contiene la vertical por A . Es decir, *la sombra del estilete a medio día es vertical*. La vertical trazada en la pared por A marcará, pues, invariablemente las XII, cualquiera que sea la orientación de dicha pared (supuesta iluminada y vertical, y el estilete paralelo al eje de la Tierra).

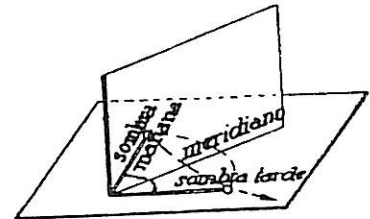


Todo el problema de la construcción de un reloj solar en una pared vertical se reduce, pues, a :

1.º Clavar un gnomon en dirección paralela al eje del mundo, es decir, situado en el plano meridiano de modo que forme con la horizontal un ángulo igual a la latitud del lugar.

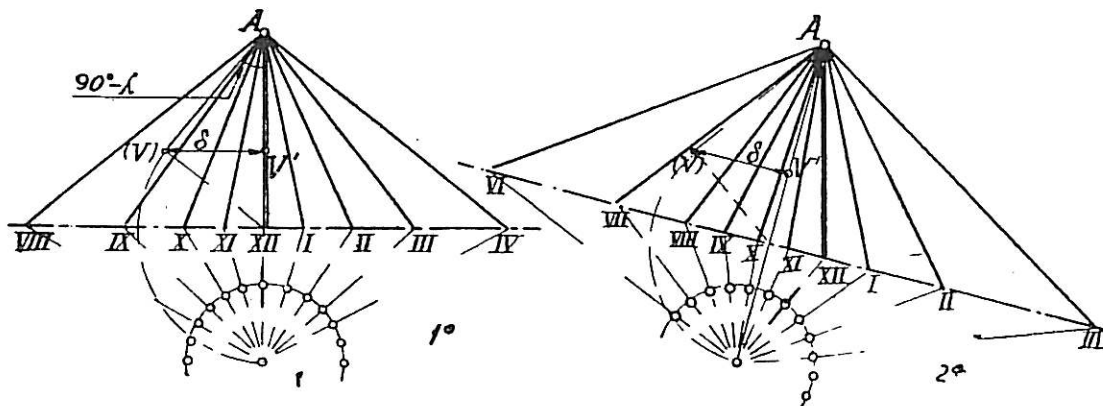
La determinación aproximada del meridiano de un lugar puede efectuarse con un simple bastón vertical, hallando en un mismo día dos sombras de dicho bastón, sobre un plano horizontal, que sean de la misma longitud, y trazando la bisectriz del ángulo que forman.

2.º Trazar la vertical por el punto de enclavamiento. Esta línea marca el plano meridiano, es decir, las XII, hora solar.



3.º Hallar las trazas sobre la pared de los planos que forman diedros de 15 en 15 grados, en uno y otro sentido, a partir del plano meridiano y graduarlas en horas, como se indica en las figuras siguientes.

En la primera se supone la pared exactamente orientada a mediodía y, por tanto, la proyección del vértice V en la vertical. En la segunda, la pared está ligeramente desviada al Norte por el lado Este y,



por tanto, la proyección ortogonal del vértice queda ligeramente al Oeste. En ambos casos la construcción es, en lo fundamental, la misma: sección del

haz de planos horarios por el plano perpendicular a su arista VA y construcción de la escala angular en esta sección recta abatida.

$V'(V)$ es igual a la distancia δ del vértice a la pared. En la figura primera puede prescindirse de su medida puesto que se sabe el ángulo $V'A(V) = \text{co-latitud}$.

Es conveniente insistir en que tales relojes marcan *hora local solar* distinta de la *hora civil*. Esta última se regula por convenios, no sólo de origen astronómico, sino, también, político, para unificar la medida del tiempo en amplias zonas de la tierra.

EJERCICIOS

1. De las construcciones fundamentales de la lección anterior, §§ 3 y 4, se desprende que los ángulos obtusos $\xi \eta \zeta$ que forman las proyecciones de los ejes entre sí, determinan los coeficientes de reducción, es decir, los ángulos α, β, γ que forman los dichos ejes con el plano del cuadro. Hallar las relaciones analíticas que ligan $\xi \eta \zeta$ con $\alpha \beta \gamma$.

Aplíquense las fórmulas de los triángulos esféricos rectiláteros a los triedros formados por dos ejes y la proyectante del origen. Los diedros que tienen su arista en dicha proyectante son precisamente $\xi \eta \zeta$.

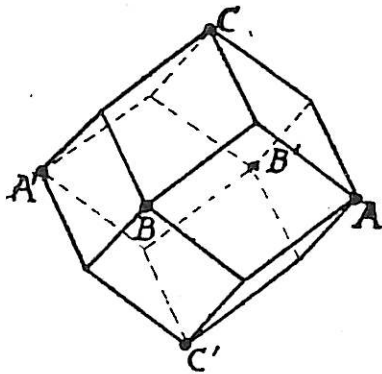
2. Resolver trigonómicamente, de acuerdo con lo anterior, los dos problemas: 1.º Dados $\alpha \beta \gamma$, hallar $\xi \eta \zeta$; 2.º Dados $\xi \eta \zeta$, hallar $\alpha \beta \gamma$.

3. Traducir el teorema de Schlömilch en un proceso de cálculo para obtener $\alpha \beta \gamma, \xi \eta \zeta$ dados tres números proporcionales a los coeficientes de reducción.

4. Representar en axonometría ortogonal los cinco poliedros regulares convexos tomando como centro el origen del triedro de referencia, y una arista situada en el plano XZ perpendicularmente al eje OX .

5. Idem id., en perspectiva caballera.

6. La figura adjunta representa la perspectiva caballera de un rombododecaedro (forma cristalográfica del sistema regular). Dibújese, centrado en la figura, el triedro de referencia y hállese el coeficiente de reducción en el eje OY . Hallar la sección recta del diedro formado por dos caras contiguas, así como su valor, y la forma de una de las caras, por abatimiento sobre el cuadro (se tendrá en cuenta la ortogonalidad de los ejes cuaternarios AA', BB', CC' y la igualdad $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$). Con estos simples datos podemos, pues, construir el cuerpo y el desarrollo de su superficie.



7. Representar en perspectiva axonométrica una pirámide regular de 8 cm. de altura apoyada en el plano XY y cuya base es un cuadrado de 3 cm. de arista, cuyo centro está en el punto de coordenadas $x=4, y=3$ y una de cuyas diagonales está alineada con el origen.

8. Dibujar la sombra de dicha pirámide sobre los planos XY, XZ , supuesta iluminada por un sol alineado con el origen y el punto $(-1, 7, 3)$.

9. Cortar la pirámide anterior por el plano determinado por los puntos $A(-1, 7, 3), B(10, 0, 0), C(0, 0, 8)$.

10. Resolver el ejercicio de conjunto anterior en perspectiva caballera.

11. Resolver en sistema gnomónico un triedro dadas dos de sus caras y el diedro que forman. (Tómese la arista del diedro perpendicular al cuadro.)

12. Id. id. dados dos diedros y una cara contigua (tómese la arista de un diedro perpendicular al cuadro).

13. Representar en sistema gnomónico un anguloide pentagonal regular de eje perpendicular al cuadro y cuyas caras sean de 30 grados. Id. de 60 grados. Obtener por construcción el valor de los diedros.

14. Representar los anguloides del ejercicio anterior con una arista perpendicular al cuadro. Id. con una apotema lateral perpendicular al cuadro.

15. Repetir la perspectiva del pequeño edificio de la página 202 suponiendo el cuadro en el plano diagonal que pasa por la arista M y el punto de vista situado a 20 metros de distancia, equidistante de dicha arista y su opuesta, y a 5 m. de altura sobre el suelo.

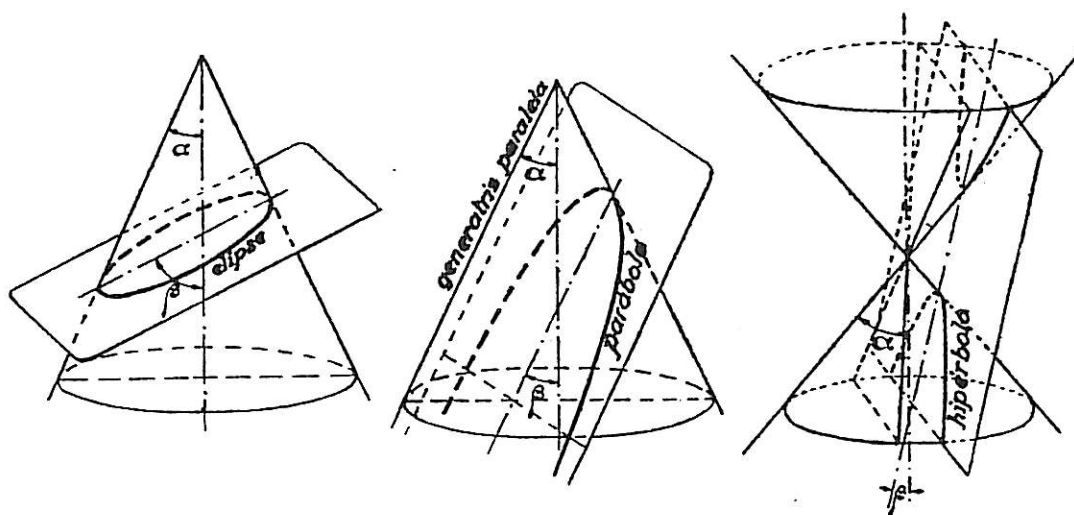
PARTE TERCERA

LAS CÓNICAS

Capítulo VIII.—ESTUDIO MÉTRICO DE LAS CÓNICAS

LECCIÓN 27.—DEFINICIONES MÉTRICAS DE LAS CÓNICAS

1. **Definición y clasificación de las cónicas.**—Siguiendo la tradición clásica antigua, definiremos las cónicas como secciones producidas en una superficie cónica de revolución por un plano que no pase por el vértice. De aquí su nombre: «cónicas».



Si el plano secante corta a todas las generatrices de la superficie, llamaremos a la sección *elipse*; si es paralelo a una sola generatriz, la curva tendrá un punto impropio y la llamaremos *parábola*; si es paralelo a dos generatrices, tendrá dos puntos impropios y se llama *hipérbola*. Como el plano paralelo por el vértice sólo puede tener a lo sumo dos generatrices del cono, éstos son todos los casos posibles.

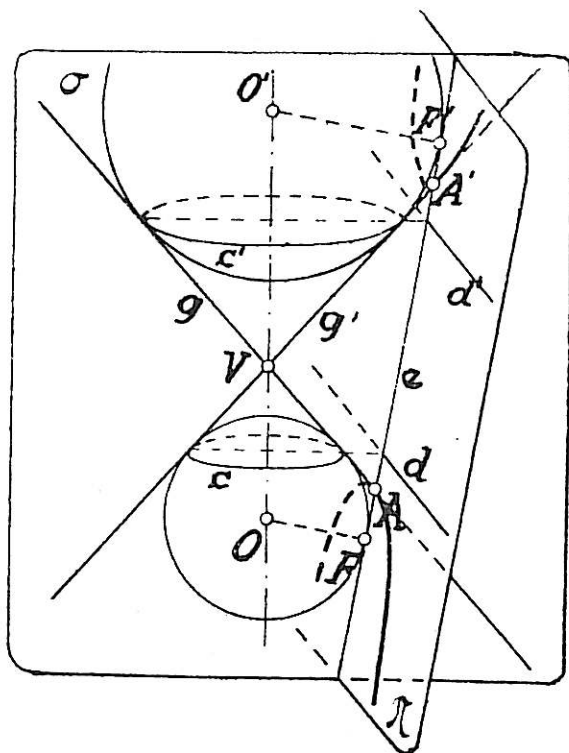
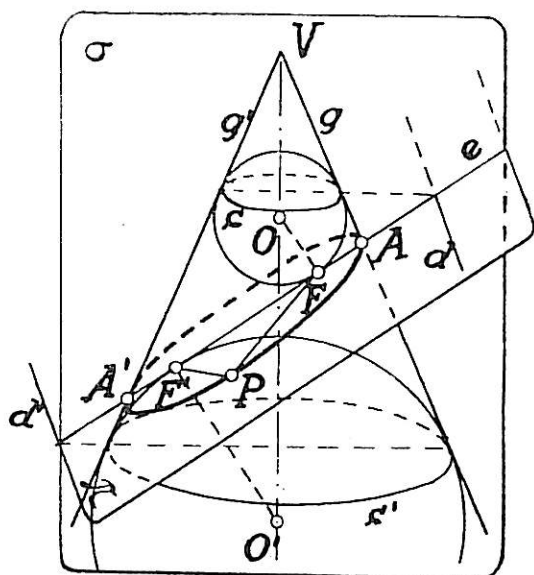
Si α es el ángulo de las generatrices con el eje, y β el ángulo de éste con el plano de la sección, podemos caracterizar la naturaleza de la sección según que sea $\alpha < \beta$ (elipse), $\alpha = \beta$ (parábola) o $\alpha > \beta$ (hipérbola).

Si el plano de la sección es perpendicular al eje ($\beta = 90^\circ$) la sección es *circunferencia*. La circunferencia es, pues, un caso particular de la elipse. Por ser curva ya estudiada, prescindiremos de este caso y consideraremos siempre la sección *oblicua al eje*.

Llamaremos puntos *interiores* (*exteriores*) a la cónica los que se proyectan desde el vértice, según rayos interiores (*exteriores*), al espacio cónico encerrado por la superficie.

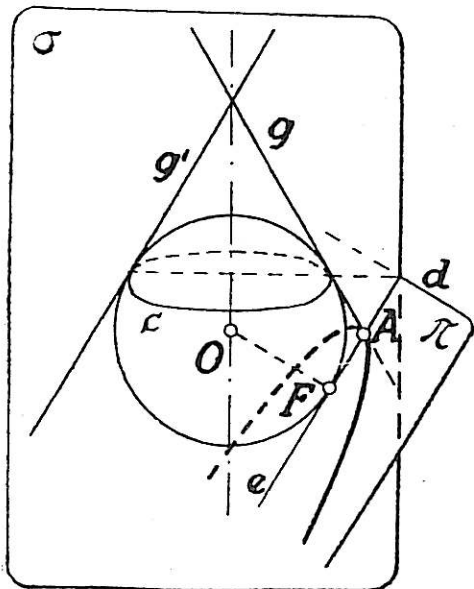
De esta definición se desprende: *Toda recta que pase por un punto interior a una cónica tiene con ésta dos puntos comunes* (propios o impropios) por tener el plano que la proyecta dos generatrices comunes con la superficie cónica.

2. Focos, directrices, eje focal.—En cualquiera de los tres casos, tracemos por el eje del cono el plano σ perpendicular al plano π que contiene la



cónica. σ será plano de simetría del cono y de π y, por tanto, de la cónica. Sean g, g' las dos generatrices contenidas en dicho plano y e la recta de intersección de σ con π . Tracemos en el plano σ

las dos circunferencias interiores al ángulo gg' (o a su supuesto por el vértice) tangentes a sus lados y a la recta e . Sean F, F' los puntos de contacto con e . Estas circunferencias se reducen a una sola si e es paralela a g o g' (caso parábola) y, por tanto, en tal caso, no hay más que un punto F . Los puntos F, F' se llaman *focos* de la cónica.



Si hacemos girar las circunferencias obtenidas alrededor del eje del cono, se engendran esferas que son tangentes a la superficie cónica (a lo largo de sendas circunferencias c, c' situadas en planos perpendiculares al eje) y también tangentes al plano π en F o F' , respectivamente, puesto que la

distancia del Centro O (O') al plano π es la perpendicular OF (OF') igual al radio. Resumiendo: *Se llaman focos de una sección cónica a los puntos de contacto de su plano con las esferas inscritas en el cono y tangentes al plano de la sección.*

La intersección d (d') del plano de la circunferencia de contacto c (c') con el plano de la cónica se llama *directriz* de ésta correspondiente al foco F (F'). La parábola no tiene más que un foco y una directriz.

Se llama *eje focal* a la recta FF' que contiene los focos. Esta recta e es eje de simetría de la cónica (por ser intersección de su plano con el plano σ de simetría). Es, por tanto, perpendicular a las *directrices*. Los puntos A , A' de la cónica situados en el eje se llaman *vértices* de la cónica. La parábola sólo tiene uno.

Los segmentos PF , PF' que unen un punto P cualquiera de la cónica con los focos se llaman *radios vectores* del punto P .

3. Razón de distancias de un punto de la cónica a un foco y a su directriz.—En virtud de las definiciones anteriores resulta que el radio vector que une un punto cualquiera P de la sección con un foco F , es igual al segmento PM de generatriz que pasa por P y comprendido entre P y la circunferencia c , $PF=PM$, puesto que ambos son segmentos de rectas tangentes por P a una esfera.

Ahora bien, PM forma constantemente el mismo ángulo α con el eje del cono, y el segmento de perpendicular PR de P a la directriz es paralelo al eje focal e y forma con el eje del cono el ángulo constante β . Pero las proyecciones de PM y PR sobre el eje del cono son iguales por estar R y M en un mismo plano normal al eje, es decir, $PM \cos \alpha = PR \cos \beta$. Por tanto,

$$PF : PR = PM : PR = \cos \beta : \cos \alpha = \varepsilon \text{ (constante)}$$

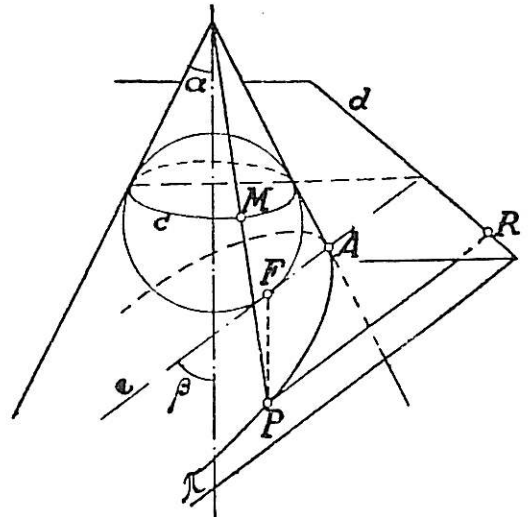
y podemos enunciar:

La razón de distancias de un punto de una cónica a un foco y a su directriz es la misma para todos los puntos. Esta razón constante ε se llama excentricidad y es igual a la que existe entre los cosenos de los ángulos que forman con el eje, el plano de la sección y las generatrices rectilíneas de la superficie.

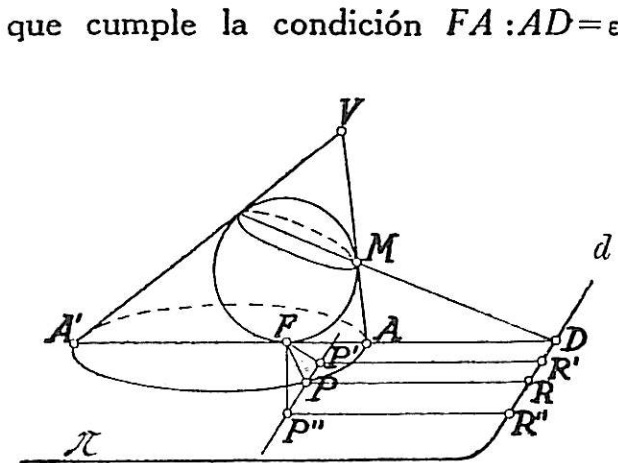
Según sea $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, es decir, según se trate de una *elipse*, *parábola* o *hipérbola*, se tendrá $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$.

4. Nueva definición métrica de las cónicas.—Recíprocamente: *Todo lugar de puntos de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo F y a una recta fija d es constante, ε , es una cónica (*).*

Sea FD el segmento de perpendicular de F a d , y sea A el punto de él



(*) Parece innecesario advertir que se trata aquí de distancias absolutas y, por tanto, $\varepsilon > 0$.



que cumple la condición $FA : AD = \epsilon$. Tracemos una esfera arbitraria tangente en F al plano π del lugar, y en el plano diametral por A tracemos la tangente AM . El cono circunscrito a dicha esfera a lo largo de su sección por el plano Md (supuesta esta sección no diametral, en cuyo caso variaríamos la esfera) será cortado por el plano π según una cónica cuyos puntos, entre los que está A , verificarán la condición del enunciado. Y son los únicos puntos que la verifican, pues si P' es, por ejemplo, un punto interior y trazamos por P' la

paralela a d , la distancia de F a uno de los puntos P de intersección verificará $FP' < FP$, y, por tanto, $FP' : P'R' < \epsilon$.

Análogamente probaríamos que para puntos exteriores P'' es $FP'' : P''R'' > \epsilon$.

Acabamos, pues, de probar de paso que: *Para todo punto interior (exterior) la razón de distancias al foco y a la directriz es menor (mayor) que la excentricidad.* El razonamiento es válido para las tres curvas.

Demostrado el recíproco anterior, podemos dar estas nuevas definiciones de elipse, hipérbola y parábola, equivalentes a las anteriores:

Cónica es el lugar geométrico de puntos de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) es una cantidad constante. Si esta constante es < 1 la cónica se llama elipse, si es > 1 se llama hipérbola, si es $= 1$ se llama parábola. De otro modo: Parábola es un lugar geométrico de puntos de un plano equidistantes de uno fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.

En particular, el vértice A de la parábola es el punto medio del segmento FD de perpendicular trazada del foco a la directriz.

5. Teorema de Dandelin. Tercera definición de elipse e hipérbola.—

Consideremos ahora los dos radios vectores PF y PF' por un mismo punto P cualquiera de la cónica, que son respectivamente iguales a los segmentos de generatriz PM y PN que pasan por P . Se tendrá en la

$$\text{elipse} \quad PF + PF' = PM + PN = MN = HJ$$

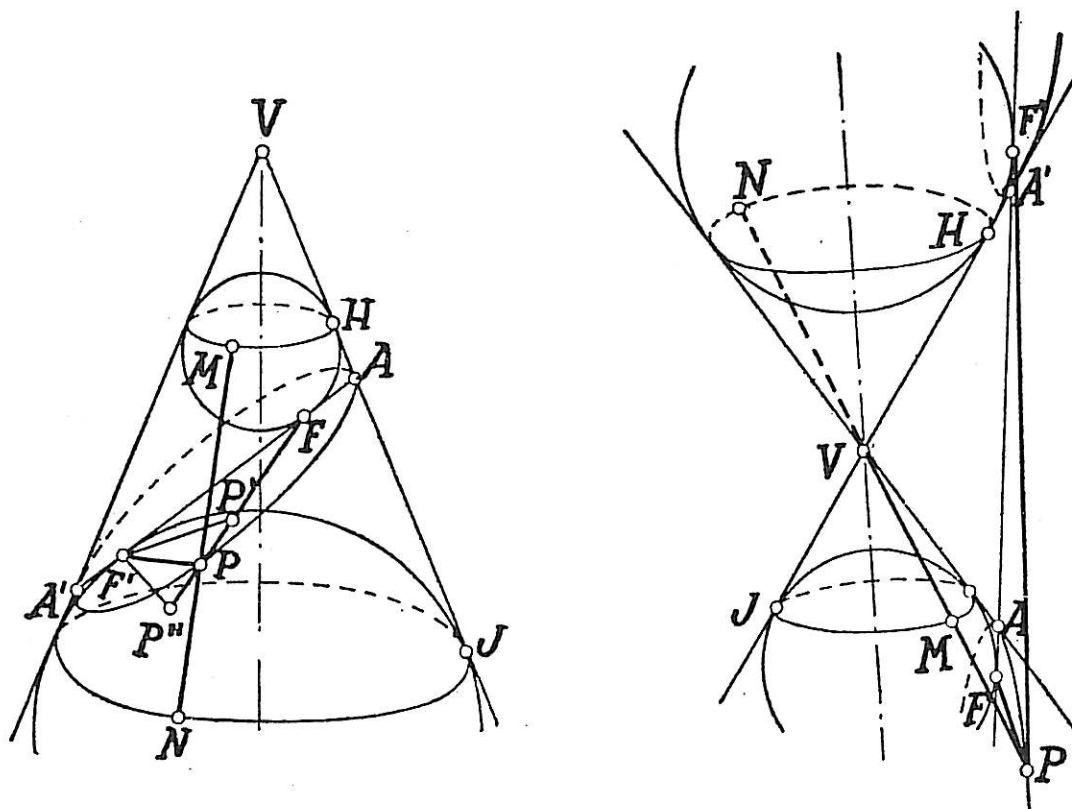
$$\text{hipérbola} \quad PF' - PF = PN - PM = MN = HJ$$

Pero, en el caso de la elipse, HJ es la distancia entre los puntos de contacto de dos circunferencias inscrita y exinscrita al triángulo AVA' , cuya longitud es igual al lado AA' (v. Tomo I, lec. 24, § 7).

Análogamente, considerando en el caso de la hipérbola, el triángulo VAA' se tendrá (p semiperímetro) $A'H = p - AA'$, $A'J = p$, $HJ = A'J - A'H = AA'$. En resumen:

Los radios vectores de una elipse tienen suma constante, los de una hipérbola tienen diferencia constante en valor absoluto. En ambos casos esta constante es la longitud del eje focal, entendiendo por tal la distancia entre los

vértices A, A' de la cónica, situados en él. Se la suele designar por $2a$, mientras la distancia FF' se suele designar por $2c$.



Recíprocamente: El lugar de puntos P de un plano π cuya $\left. \begin{array}{l} \text{suma} \\ \text{diferencia} \end{array} \right\}$ de distancias a dos puntos fijos F y F' es una longitud $2a$ constante, es una $\left\{ \begin{array}{l} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{array} \right\}$ cuyos focos son F y F' .

En efecto, colocados A y A' simétricamente respecto del punto medio de FF' , tales que $AA = 2a$, A y A' pertenecen al lugar, puesto que $AF + AF' = A'F' + A'F = 2a$.

Tracemos ahora una esfera arbitraria, tangente al plano π en F y en el plano diametral que contiene A y A' , dos tangentes AV y $A'V$ por dichos puntos. El cono circunscrito a dicha esfera por el punto V de intersección (se suponen secantes, pues en caso contrario variaríamos la dimensión de la esfera) corta al plano π según una cónica cuyos puntos, entre los que se hallan A y A' , cumplen la condición del enunciado. Y son los únicos puntos que la cumplen, pues todos los puntos P' (P'') situados en el interior (en la prolongación) de un radio vector cualquiera PF verifican:

$$\left. \begin{array}{l} P'F < PF' + PP' \\ P''F > PF' - PP'' \end{array} \right\} \text{ y sumando } \left\{ \begin{array}{l} P'F \\ P''F \end{array} \right\} \text{ se tiene } \left\{ \begin{array}{l} P'F' + P'F < PF' + PF = 2a \\ P''F' + P''F > PF' + PF = 2a \end{array} \right.$$

Es decir: La suma de distancias de todo punto interior (exterior) a la elipse a sus focos es menor (mayor) que el eje focal.

Análogamente se prueba: La diferencia de distancias de todo punto interior

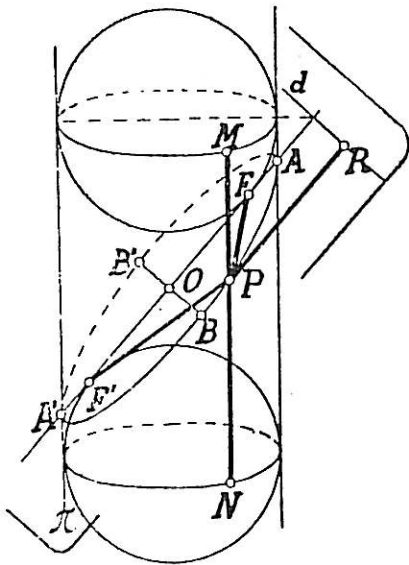
(exterior) a la hipérbola a sus focos es mayor (menor) que la longitud del eje focal.

En resumen, podemos dar esta tercera definición de elipse e hipérbola, equivalente a las dos anteriores:

Elipse } es el lugar geométrico de puntos cuya { suma
Hipérbola } { diferencia } de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Esta definición y la de parábola dada en el párrafo anterior son las definiciones de que se suele partir en las exposiciones elementales (*) de las propiedades métricas de estas curvas y que revisaremos y ampliaremos en la lección siguiente.

6. Secciones del cilindro de revolución. Eje menor de la elipse.— La sección producida en una superficie cilíndrica circular por un plano π oblicuo al eje, es una elipse.



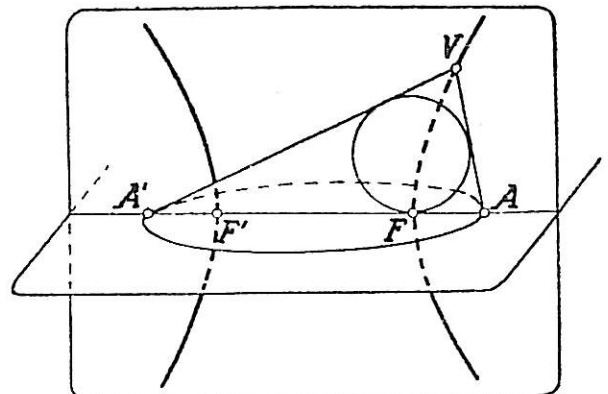
En efecto, definiendo como en el § 2 las esferas tangentes al cilindro y al plano de la sección, si F y F' son los puntos de contacto de las mismas, P es un punto cualquiera de la sección y MN el segmento de generatriz que pasa por P y limitado por las circunferencias de tangencia respectivas, se tendrá análogamente a § 5, $PF + PF' = PM + PN = MN$ (const.), lo que demuestra que la sección es elíptica.

También se puede probar por la constancia de la razón $PM : PR$, siendo PR la distancia de P a la recta intersección de π con el plano de la circunferencia de contacto, de donde resulta que esta recta es *directriz*.

El plano diametral del cilindro, perpendicular a π , es plano de simetría de la elipse y su intersección con π será el eje de simetría AA' . El diámetro perpendicular a dicho eje por el punto medio O de AA' será asimismo *eje de simetría* del cilindro y de π y, por tanto, de la elipse. El segmento BB' limitado por sus intersecciones con la elipse se llama *eje menor* y es igual al diámetro del cilindro, se le designa por $2b$ y sus extremos B, B' se llaman también *vértices* de la elipse.

7. Lugares geométricos de los vértices de los conos de revolución que pasan por una cónica dada.—

Dada una cónica, hemos visto en los §§ 4 y 5 (recíprocos) que hay infinitos modos de obtenerla como sección de un cono de revolución, ya que las construcciones dependen de



(*) Este punto de partida, que por tradición se sigue en los programas elementales, tiene su origen en un tratado de «De la Hire», s. XVII.

una esfera de radio arbitrario tangente al plano de la cónica en un foco. Al variar el radio de la esfera ¿cuál es el lugar geométrico de los vértices V ? Refiriéndonos a la construcción del § 5 en el caso elipse, obsérvese que en el triángulo VAA' se tiene (Tomo I, lec. 24, § 7) $FA' = p - VA$, $FA = p - VA'$ (p semiperímetro), de donde $VA' - VA = FA' - FA = \text{constante} = FF'$.

El lugar geométrico de V es, por consiguiente, una hipérbola de focos A y A' y que pasa por F y asimismo por F' . Por otra parte, como el plano perpendicular al de la cónica, trazado por el vértice V del cono es plano de simetría de ella que contiene los focos, V está necesariamente en el plano perpendicular al de la cónica por FF' .

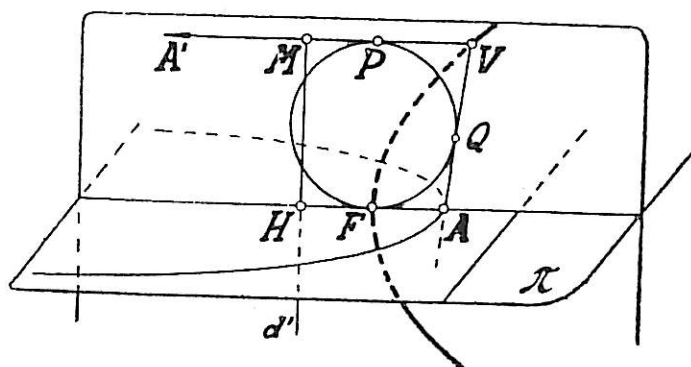
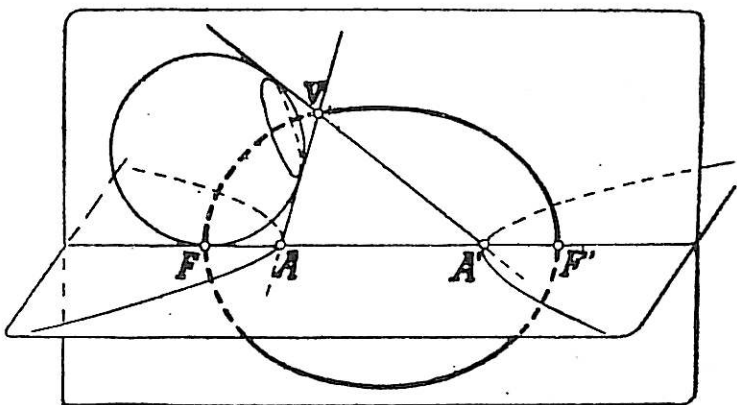
En resumen :

El lugar geométrico de los vértices de los conos de revolución que pasan por una elipse dada, es una hipérbola situada en un plano perpendicular por su eje, que tiene por vértices los focos F y F' de la elipse, y cuyos focos son los vértices A y A' del eje focal de dicha elipse.

En rigor deben suprimirse del lugar los focos F y F' , por ser coplanarios con la elipse.

Los puntos del infinito de la hipérbola son aquéllos para los cuales el cono se convierte en cilindro. Análogamente se demuestra :

El lugar geométrico de los vértices de los conos que pasan por una hipérbola, es una elipse (situada en un plano perpendicular al de ésta) cuyos vértices son los focos de la hipérbola y cuyos focos son los vértices de aquélla (descontando los focos de la referida hipérbola).



Para el caso de la parábola, basta imaginar el punto A' de la figura primera infinitamente alejado y, por tanto, la tangente VA' paralela a FA .

Tomemos $FH = FA$ y tracemos HM perpendicular a FA por H ; sea M la intersección con VA' . Se tendrá

$$VM = VP + HF = VQ + QA = VA$$

En consecuencia V es un punto que equidista de A y de la recta $MH \equiv d'$, de donde

El lugar geométrico de los vértices de los conos que pasan por una parábola φ es otra situada en un plano perpendicular al de ésta, cuyo foco es el vértice A de φ y cuyo vértice F' es el foco de φ .

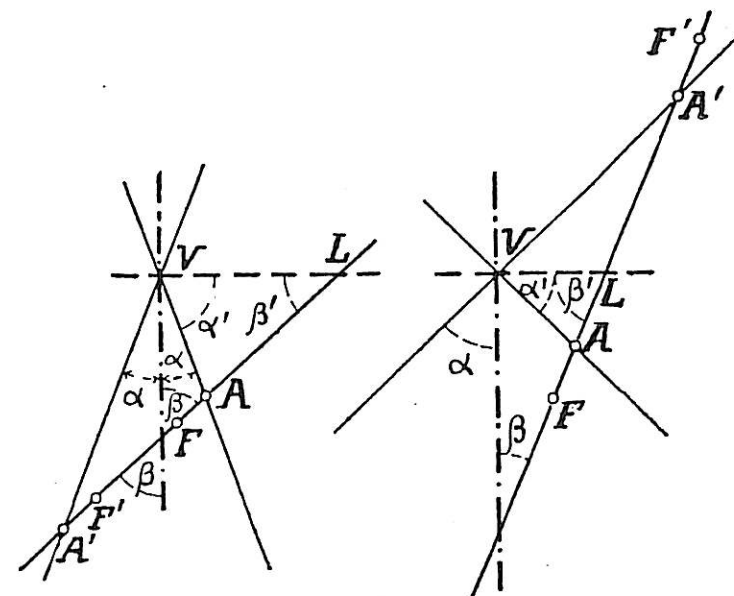
8. La excentricidad en función del eje focal y de la distancia focal.—
 En la elipse y en la hipérbola la excentricidad es igual a la razón $FF' : AA' = c : a$ entre la distancia focal $FF' = 2c$ y la distancia $AA' = 2a$ entre los vértices del eje focal.

En efecto, trazando por V la perpendicular VL al eje del cono en el plano de simetría σ (normal al de la sección) se tendrá (v. fig.)

$$\epsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\text{sen } \beta'}{\text{sen } \alpha'} = \frac{VA}{LA}$$

y por una propiedad bien conocida de las bisectrices interiores y exteriores de un triángulo, se verificará (restando o sumando términos de la proporción, según se trate de elipse o hipérbola)

$$\epsilon = \frac{VA}{LA} = \frac{VA'}{LA'} = \frac{VA' \pm VA}{AA'}$$

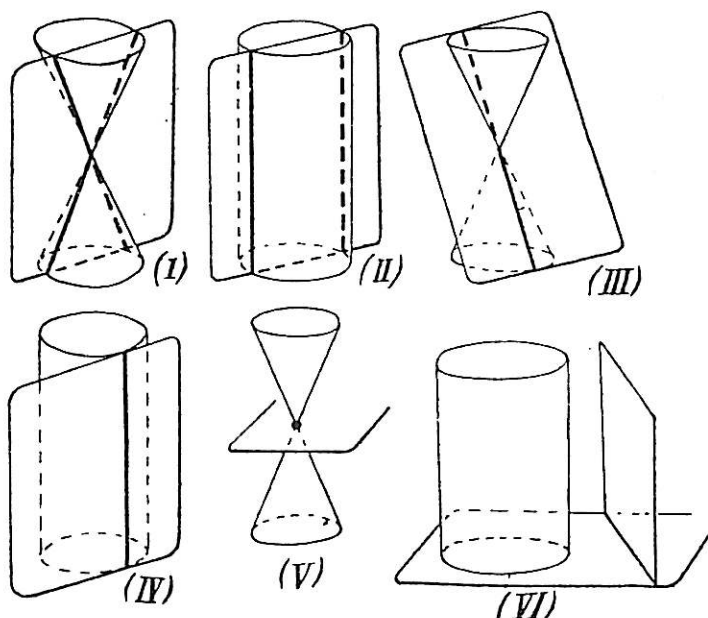


pero según el párrafo anterior, $VA' - VA = FF'$ en la elipse y $VA' + VA = FF'$ en la hipérbola, luego en ambos casos es $\epsilon = FF' : AA'$, como queríamos demostrar.

La palabra *excentricidad* es de origen astronómico. La órbita de un planeta alrededor de su sol es una elipse de la cual dicho sol ocupa uno de sus focos. La razón $c : a$ mide, pues (considerando como unidad el semieje mayor a) el alejamiento c del sol respecto al centro de la órbita, es decir, su *excentricidad*. La excentricidad en la órbita terrestre es, próximamente, $1/60$.

9. Cónicas degeneradas.— Si en la definición de cónica como sección de un cono omitimos la restricción de que el plano sección no pase por el vértice y consideramos el cilindro como un cono (de vértice impropio)

obtendremos, además de la elipse, hipérbola y parábola las siguientes clases de cónicas llamadas *degeneradas*: dos rectas concurrentes (fig. I); dos rectas paralelas (fig. II); dos rectas confundidas en una (caso de plano tangente) (figs. III y IV); dos rectas imaginarias con un punto propio común (fig. V); dos rectas imaginarias con un punto impropio común (fig. VI). Desde puntos de vista más generales (Geometría analítica, Geometría proyectiva) conviene, además, llamar cónicas a ciertos conjuntos de puntos imaginarios (definidos por ecuaciones sin soluciones reales, o por sistemas planos polares sin elementos homólogos incidentes), cuyo estudio nos llevaría demasiado alejados de los límites de este curso.



LECCIÓN 28.—TRAZADO DE LAS CÓNICAS. PUNTOS COMUNES CON UNA RECTA

1. Trazado de las cónicas. Ejes de simetría.—Partiremos de las definiciones expuestas en la lección anterior :

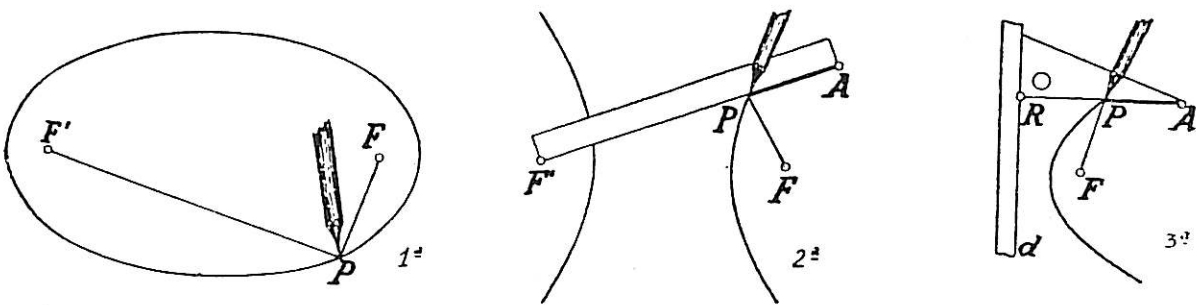
La elipse es el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a dos puntos fijos F, F' llamados FOCOS, es constante ($=2a$). Es decir, $PF + PF' = 2a$.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F, F', llamados FOCOS, es (en valor absoluto) constante ($=2a$). Es decir, tales que $PF - PF' = 2a$ o bien $PF' - PF = 2a$; desglosando los dos lugares se obtienen las dos partes o ramas de la curva. (Corresponden a las dos hojas del cono de revolución cortado.)

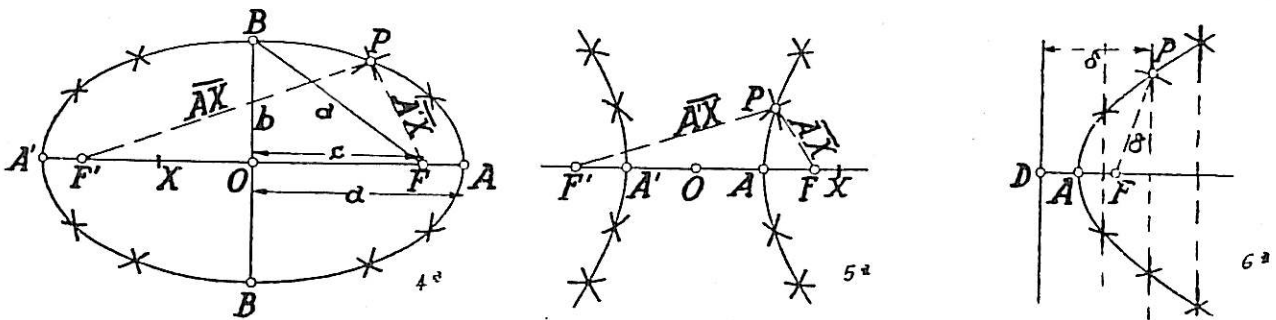
La parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto fijo, llamado FOCO, y de una recta fija, llamada DIRECTRIZ.

Y supondremos dados en la elipse e hipérbola la constante $2a$ y los focos cuya distancia FF' hemos llamado $2c$. En la parábola supondremos dado el foco y la directriz.

De tales definiciones se desprenden fácilmente las conocidas construcciones materiales por trazo continuo que indican las figuras 1.^a, 2.^a, 3.^a (la primera de las cuales es particularmente usada en jardinería).



Asimismo, de las definiciones anteriores se deducen las construcciones por puntos de las figuras 4.^a, 5.^a y 6.^a, que consisten en lo siguiente :



Elipse (fig. 4.^a).—Colocado el segmento $AA' = 2a$ (que suponemos $> FF'$) simétricamente respecto del punto medio O de FF' , los puntos A y A' pertenecen a la elipse (vértices), puesto que cumplen la condición

$$\left. \begin{aligned} AF' + AF &= \\ A'F' + A'F &= \end{aligned} \right\} AF + FA' = AA' = 2a$$

Para obtener nuevos puntos, basta dividir AA' en dos segmentos mediante un punto interior variable X y trazar, con centros en F y F' circunferencias de radios AX y $A'X$. Las intersecciones de tales circunferencias darán puntos de la curva por verificarse constantemente $AX + A'X = 2a$ ($>FF'$).

Permutando los centros, se obtienen cuatro puntos para cada división, excepto cuando X coincide con O , que dará dos puntos B, B' situados en la mediatriz de FF' .

Si llamamos $2b = BB'$ se tiene (triángulo BOF)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Hipérbola (fig. 5.^a).—Situado, análogamente, $AA' = 2a$ ($<FF'$) simétricamente respecto del punto medio O de FF' , los puntos A, A' son los vértices de la hipérbola por cumplir

$$\left. \begin{aligned} AF' - AF &= \\ A'F - A'F' &= \end{aligned} \right\} AF' - A'F' = AA' = 2a$$

Para obtener nuevos puntos, se tomarán ahora puntos X en el exterior de AA' . Las circunferencias de centros F y F' y radios AX y $A'X$ se cortan en puntos de la hipérbola, por ser $A'X - AX = 2a$ ($<FF'$).

Parábola (fig. 6.^a).—El punto medio A de FD , distancia del foco F a la directriz d , es punto de la parábola llamado *vértice*. Otros puntos se hallarán por intersección de circunferencias de centro F y radio δ con rectas a distancia δ de d (tomando, claro es, segmentos $\delta > AD$).

La construcción por puntos de la parábola (fig. 6.^a) puede aplicarse a la elipse e hipérbola, dada por un foco la directriz y la excentricidad ϵ , trazando paralelas a distancia δ y circunferencias de radio $\epsilon\delta$.

Las definiciones adoptadas en esta lección y las construcciones que de ellas se derivan, parten de datos que admiten ejes de simetría; de ello resulta:

La elipse y la hipérbola tienen dos ejes de simetría, que son la recta FF' y su mediatriz. El punto O de intersección de ambos ejes es, pues, un centro de simetría de la cónica.

La parábola tiene un eje de simetría, que es la perpendicular del foco a la directriz.

2. Las circunferencias focales en la elipse e hipérbola.—Por cada punto P de la elipse (hipérbola) imaginemos hecha la operación que indica la

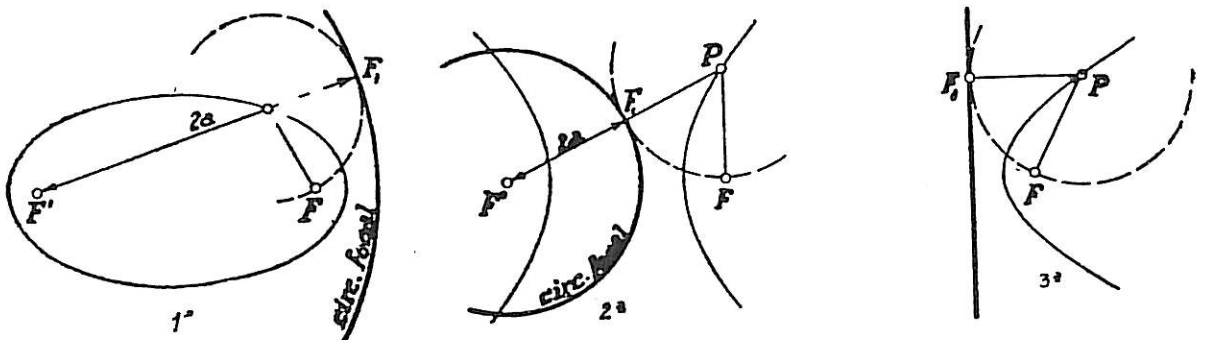


figura 1.^a (2.^a), es decir, llevemos el radio vector PF sobre la prolongación del radio vector $F'P \rightarrow$ (sobre el propio radio vector PF').

Puesto que $PF' + PF$ ($|PF' - PF|$) es constantemente igual a $2a$, el lugar de los puntos F_1 así obtenidos es una circunferencia de radio $2a$ y centro F' que se llama *circunferencia focal*. Existe una para cada foco. El segmento PF_1 ($=PF$) es la distancia del punto P a la circunferencia focal. Por tanto:

Una $\left\{ \begin{array}{l} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{array} \right\}$ es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia (la focal) y de un punto $\left\{ \begin{array}{l} \text{interior} \\ \text{exterior} \end{array} \right\}$ (el otro foco).

Observando que la circunferencia de centro P y radio PF es tangente a la circunferencia focal F' resulta también:

Una $\left\{ \begin{array}{l} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{array} \right\}$ es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una fija y que pasan por un punto fijo $\left\{ \begin{array}{l} \text{interior} \\ \text{exterior} \end{array} \right\}$.

Mientras que de la definición de parábola se desprende (fig. 3.^a):

Una parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta fija (directriz) y que pasan por un punto exterior (foco).

3. Intersecciones de una cónica con una recta.—Supongamos una parábola definida por el foco y la directriz, o una elipse o una hipérbola definidas por un foco F y la circunferencia focal con centro en el otro foco F' (lo que equivale a dar F, F' y $2a$ como antes). En virtud de los resultados que acabamos de obtener, hallar las intersecciones de la cónica con una recta r , es hallar en ésta los centros de las circunferencias que pasan por F y son tangentes a la directriz de la parábola o a la circunferencia focal F' de la elipse o hipérbola.

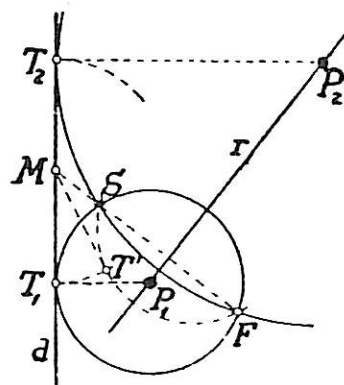
Consideremos el simétrico S de F respecto de la recta dada r ; toda circunferencia que pasa por S y F tiene su centro en r y recíprocamente, toda circunferencia que pasa por F y tiene su centro en r pasa por S . El problema equivale, pues, a estos otros que resolvimos en el Tomo I (lec. 32, § 2):

Hallar los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos F y S y son tangentes: 1.º, a una recta dada (directriz d de la parábola); 2.º, a una circunferencia dada (circunferencia focal F' de la elipse o de la parábola).

Recordemos brevemente las soluciones y su discusión.

1. CASO PARÁBOLA.—Si M es la intersección de FS con d , el punto T de tangencia tiene que verificar $\overline{MT}^2 = \overline{MS} \cdot \overline{MF}$, lo que permite determinar MT mediante MT' , segmento de tangente por M a una circunferencia auxiliar cualquiera que pase por F y S .

Discusión.—Si el simétrico S del foco respecto de r cae del mismo lado que F respecto de la directriz la construcción es viable y llevando MT' a uno y otro lado de M sobre d , se obtienen dos puntos T_1, T_2 , existiendo dos soluciones. La recta corta a la parábola



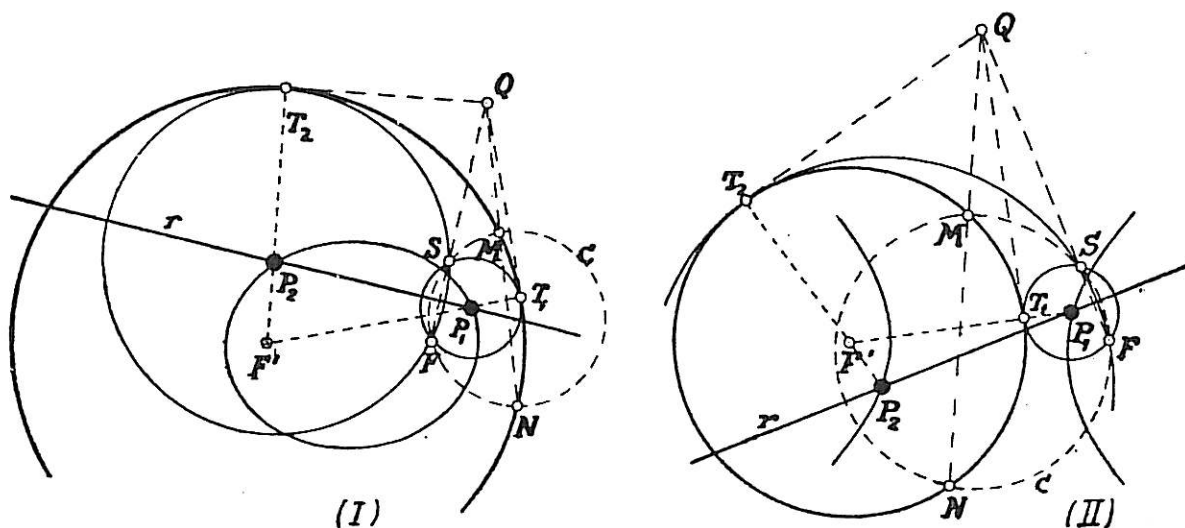
en dos puntos P_1P_2 , que son las intersecciones de r con las perpendiculares a d por los dos puntos de contacto hallados.

Si r es perpendicular a d la construcción no es aplicable, pero entonces el punto de intersección rd es el de tangencia T de la circunferencia buscada cuyo centro se halla inmediatamente. La recta r no tiene más que un punto propio con la curva, además del impropio que también es común por pertenecer al eje.

Si F y S caen a distinto lado de d no hay solución posible; la recta r es exterior a la parábola.

El caso en que S cae sobre la directriz d se estudia en el párrafo siguiente.

II. CASOS ELIPSE E HIPÉRBOLA.—Trazada una circunferencia auxiliar c que pase por F y S y que corte a la focal en MN , la recta MN es el eje radical de

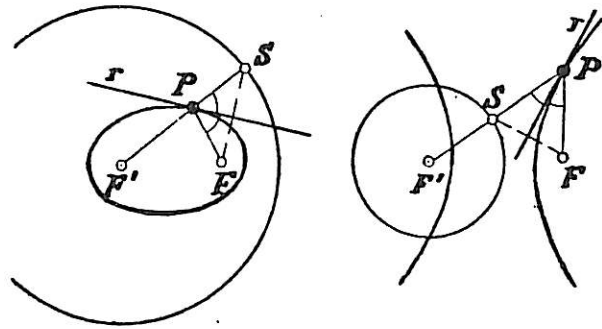


la circunferencia focal y de la auxiliar, mientras SF es eje radical de ésta y de la buscada. El centro radical de las tres circunferencias es, pues, el punto Q de intersección de MN y FS y por él pasará el eje radical de la circunferencia dada y de la que se busca, que es su tangente común. Trazando, pues, por Q las tangentes a la circunferencia focal, tendremos los puntos de contacto, T_1, T_2 ; y los centros de las circunferencias FST_1 y FST_2 serán los puntos de intersección buscados. Estos centros se hallan fácilmente por estar en r y respectivamente alineados con $F'T_1, F'T_2$.

Discusión.—Si el simétrico S del foco F de la $\left. \begin{array}{l} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{array} \right\}$ respecto de r es interior exterior } a la circunferencia focal F' existen dos soluciones, y ninguna es exterior interior } En el primer caso la recta es *secante* y en el segundo es exterior a la cónica respectiva.

El hecho de que una cónica no pueda tener más que dos puntos comunes con una *recta*, subsiste para las cónicas llamadas degeneradas (lec. 27, § 9); unas y otras se llaman *curvas de segundo orden*.

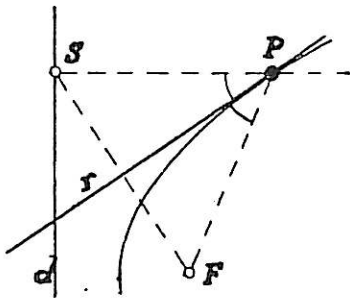
4. Propiedades de las tangentes.—Completando la discusión, si el simétrico S de F cae sobre la circunferencia focal F' (de la elipse o hipérbola) no existe más que una circunferencia que le es tangente en S y cuyo centro P se halla directamente por la condición de estar alineado con F' . La recta r se llama, en este caso, *tangente* a la elipse o hipérbola en P por no tener más punto común con ella que el P , llamado *punto de contacto*. De la simetría de S y F respecto de r se desprende la igualdad de los ángulos SPr y FPr . En resumen:



El simétrico de un foco respecto de toda tangente a una elipse o hipérbola está sobre la circunferencia focal con centro en el otro foco.

La tangente en un punto P a la $\left\{ \begin{array}{l} \text{hipérbola} \\ \text{elipse} \end{array} \right\}$ es bisectriz del ángulo que forman $\left\{ \begin{array}{l} \text{los dos radios vectores} \\ \text{un radio vector y la prolongación del otro} \end{array} \right\}$. La tangente en cada vértice es, en particular, la perpendicular al eje que pasa por él.

Análogamente, en el caso parábola, si el simétrico S del foco respecto de una recta r está en la directriz, no hay más que una circunferencia que pase por F y sea tangente a d , y su centro P se halla directamente por la condición de estar sobre la normal a d por S . La recta r se llama, en tal caso, *tangente* en P a la parábola, y por la simetría de S y F resulta la igualdad de los ángulos SPr y FPr . En resumen:

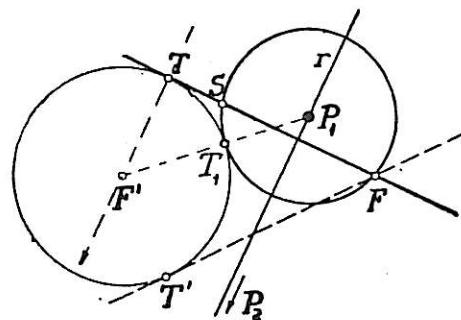


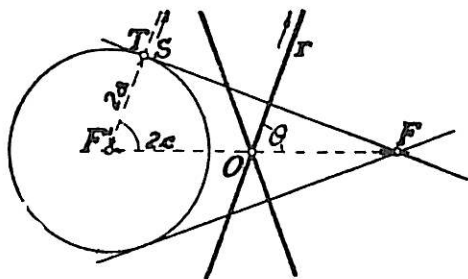
El simétrico del foco de una parábola respecto de toda tangente, está en la directriz.

La tangente a la parábola en un punto P es bisectriz del ángulo formado por el radio vector y la perpendicular por P a la directriz (paralela al eje).

En estas propiedades se fundan: la de los espejos o reflectores elípticos de concentrar en un foco los rayos u ondas procedentes del otro foco, y la de los parabólicos de concentrar en un foco los rayos paralelos al eje.

5. Secantes excepcionales y asíntotas de la hipérbola.—Tracemos desde un foco F de una hipérbola las tangentes a la circunferencia focal con centro en el otro foco F' y tratemos de aplicar la construcción del § 4 a una perpendicular cualquiera r a una de ellas FT . El punto T_2 de la figura § 4, II, se convierte en el punto T de la figura adjunta, y por estar TSF alineados, una de las circunferencias que pasan por F y S , tangentes a la circunferencia focal F' , se ha transformado en la propia recta FT . En





cuanto al punto P_2 de intersección, se ha transformado en el punto impropio de r . La recta r es, pues, una secante excepcional que tiene un punto propio P_1 común con la hipérbola y otro impropio, excepto si coincide con la mediatriz de FT , en cuyo caso el simétrico $S \equiv T$ de F respecto de r está en la circunferencia F' y estamos ante una tangente excepcional cuyo punto de contacto (intersección de $F'T$ con r) es su punto impropio.

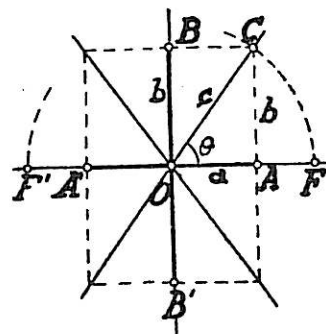
Una tal recta se llama *asíntota* de la hipérbola.

6. Eje transverso de la hipérbola. Hipérbola equilátera.—La hipérbola tiene, pues, *dos asíntotas* que pasan por el centro (punto medio de $F'F$), formando con el eje un ángulo θ cuyo coseno (v. fig. anterior) es $2a : 2c$, o sea $\cos \theta = a : c = 1 : e$.

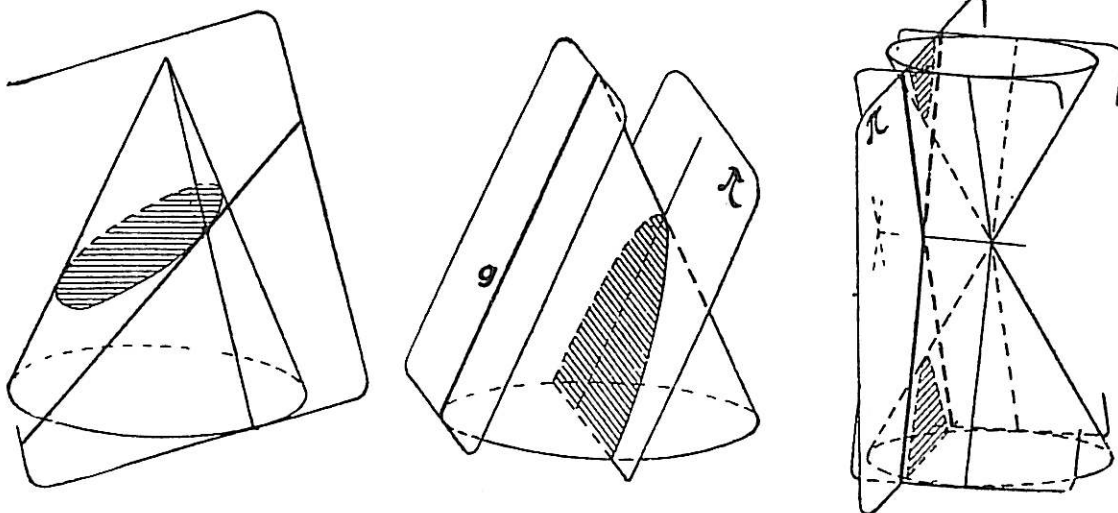
Construyendo un rectángulo cuyas diagonales sean las asíntotas y una de cuyas paralelas medias es $AA' = 2a$, la otra BB' situada en el segundo eje de simetría se llama *eje transverso* de la hipérbola y su longitud se designa por $2b$. La semidiagonal $OC = a : \cos \theta = c$. Por tanto, se verifica entre los dos semiejes focal a , transverso b y la semidistancia focal, la relación

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Si $\theta = 45^\circ$ el triángulo OAC es rectángulo isósceles $a = b$ y la hipérbola se llama *equilátera*. Sus asíntotas son, pues, *perpendiculares*.



7. Las tangentes y asíntotas como secciones de planos tangentes al cono.—Recordando que es plano tangente a una superficie cónica todo el que tiene una sola generatriz común con él (Tomo I, lec. 47, § 4) resulta : *Las rectas*



en que un plano secante al cono corta a los planos tangentes al mismo son tangentes a la cónica sección, por no tener con ella más que un punto común.

Trazando por el vértice un plano paralelo al de la sección, las generatrices contenidas en este plano, si las hay, dan los puntos del infinito de la cónica, y los planos tangentes en estas generatrices cortarán al plano de la cónica según las llamadas tangentes en dichos puntos impropios a la cónica.

El plano paralelo por el vértice al de una sección parabólica es tangente al cono y por ello la parábola sólo tiene un punto impropio y la tangente en él es la recta impropia. En el caso de sección hiperbólica los planos tangentes al cono a lo largo de las dos generatrices paralelas al plano de la sección cortan a dicho plano según las *asíntotas*.

Por estar el cono en uno de los diedros completos limitados por esos planos tangentes, la hipérbola estará en uno de los ángulos completos limitados por las asíntotas.

EJERCICIOS

1. Dibujar la parábola sección producida en un cono equilátero por un plano trazado a dos centímetros de distancia del vértice.

2. Lugar geométrico de los focos de todas las secciones parabólicas de un cono de revolución dado.

3. Idem de todas las secciones que son elipses o hipérbolas de igual excentricidad.

4. Situar una cónica dada en un cono de revolución dado. (La excentricidad definirá el ángulo del plano de la sección con el eje, según se ha visto en el § 3, lec. 27. La magnitud del eje mayor dará la distancia a que hay que colocar dicho plano.) Resolución trigonométrica del problema y discusión.

5. Lugar geométrico de los puntos cuya suma o diferencia de distancias a un punto y a una recta fijos tenga un valor dado.

6. Lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos circunferencias dadas, o lo que es lo mismo: Lugar de los centros de las circunferencias tangentes a dos circunferencias fijas.

7. Lugar geométrico del centro del círculo inscrito en un sector circular variable AOB , uno de cuyos radios OA es fijo y el otro OB móvil.

8. Lugar geométrico de los centros de las elipses de eje mayor $2a$ (hipérbolas de eje real $2a$) que tienen un foco común y son tangentes a una recta dada.

9. Construir una elipse (hipérbola) dados un foco F , la longitud $2a$, una tangente y un punto.

10. Dados un punto P , una tangente t y un foco F de una cónica, hallar el lugar geométrico del otro foco F' .

11. Construir una parábola dado su eje, un punto P y la tangente t en P .

12. Hallar la tangente común a dos parábolas que tienen el mismo foco F dado, y dos directrices secantes d y d' , también dadas.

13. Hallar el punto de intersección de las parábolas del ejercicio anterior.

14. Lugar geométrico de los centros de las cónicas que tienen un foco dado y son tangentes a dos rectas dadas.

15. ¿Cuánto vale la excentricidad de una hipérbola equilátera?

16. Construir una parábola dados el foco y dos puntos.

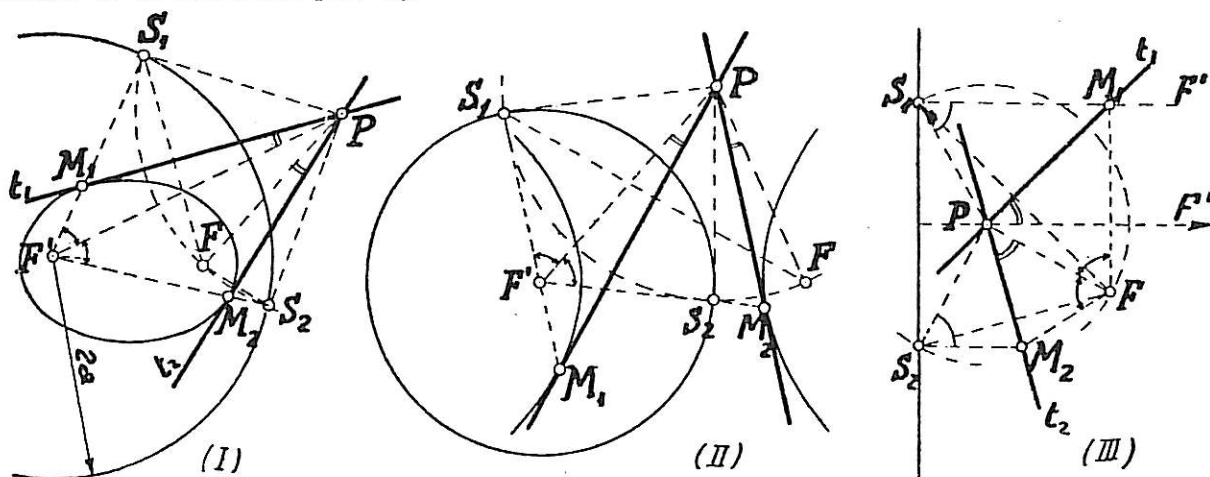
17. Idem dada la directriz y dos puntos.

LECCIÓN 29.—TRAZADO DE TANGENTES. PROPIEDADES MÉTRICAS

1. **Trazado de tangentes por un punto.**—Los teoremas obtenidos en el § 5 de la lección anterior permiten trazar fácilmente una tangente a una cónica por un punto dado P .

Si P está en la cónica, basta trazar en cada caso la bisectriz de que nos hablan los enunciados.

Si P no está en la cónica, observemos que, por pertenecer a la tangente buscada t , debe equidistar de F y de su simétrico S respecto de ella. Como, además, este simétrico debe estar en la circunferencia focal F' (o en la directriz, en el caso parábola), se hallará S por intersección de dicha circunferencia (directriz, en el caso parábola) con la de centro P y radio PF ; la mediatriz de FS será la tangente pedida cuyo punto M de contacto estará en el radio focal $F'S$ (o en la perpendicular a la directriz por S).



Viniendo el punto S dado por intersección de dos circunferencias o de una recta y una circunferencia, el problema puede tener dos, una o ninguna solución.

En el caso elipse, el problema tiene dos, una o ninguna solución, según que la distancia entre los centros de las circunferencias trazadas, PF' , sea $\geq 2a - PF$ diferencia de los radios, o lo que es lo mismo, según que sea $PF' + PF \geq 2a$; es decir, según que P sea exterior a la cónica, pertenezca a ella, o sea interior (*).

En la hipérbola y parábola el resultado es análogo, y dejamos su deducción a cargo del lector. Las figuras indican las soluciones y su trazado en los casos de existencia de dos tangentes.

Por el hecho de que a lo sumo sólo se pueden trazar dos tangentes a una cónica desde un punto, se dice que las cónicas son *curvas de segunda clase*.

El análisis de estas sencillas construcciones nos va a conducir a curiosos resultados.

(*) Si P es exterior se cumple, por otra parte $2a + PF > PF'$ por ser $PF' - PF \leq FF' < 2a$.

2. Teoremas de Poncelet.—En la elipse y en la hipérbola los puntos S_1 y S_2 de la construcción anterior, obtenidos por intersección de dos circunferencias, son simétricos respecto de la recta PF' que une sus centros y en la parábola lo son respecto de la paralela PF' al eje. De esta simetría resulta :

1.º La igualdad de los ángulos $PF'S_1, PF'S_2$ en la elipse e hipérbola ; y en la parábola resulta $\sphericalangle PS_1M_1 = \sphericalangle PS_2M_2$ y, por tanto, serán iguales sus simétricos respecto de las tangentes t_1 y t_2 $\sphericalangle PFM_1 = \sphericalangle PFM_2$.

La recta que une un foco con un punto P es bisectriz del ángulo que forman las que unen este mismo foco con los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde P (bisectriz exterior en el caso de tangentes a ramas distintas de la hipérbola).

2.º La igualdad de los ángulos S_1PF' y $F'PS_2$, de donde :

$$\sphericalangle F'PS_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle S_1PS_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle S_1PF + \frac{1}{2} \sphericalangle FPS_2 = \sphericalangle M_1PM_2$$

($\sphericalangle FPS_2$ negativo en fig. II).

El ángulo de giro que lleva a coincidir $\sphericalangle F'PS_2$ con $\sphericalangle M_1PM_2$ es

$$\sphericalangle F'PM_1 = \sphericalangle S_2PM_2 = \sphericalangle M_2PF; \quad \text{por tanto}$$

El ángulo que forma una de las tangentes trazadas desde un punto P exterior a una cónica con la recta que une P a un foco, es igual al que forma la otra tangente con la recta que une P al otro foco en los casos elipse e hipérbola, o con la paralela por P al eje en el caso parábola.

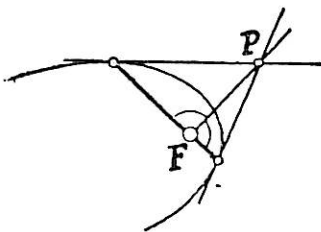
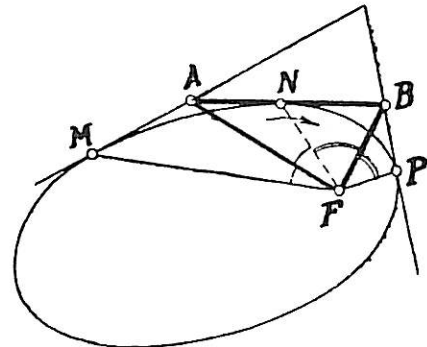
COROLARIO. Dadas dos tangentes fijas a una cónica (en M y P) y una móvil (en N), el segmento AB de tangente móvil comprendido entre las fijas se ve desde un mismo foco, bajo un ángulo constante.

En efecto, por el primer teorema de Poncelet, se tiene :

$$\sphericalangle MFA = \sphericalangle AFN, \quad \sphericalangle NFB = \sphericalangle BFP$$

y como la suma de los cuatro ángulos es $\sphericalangle MFP$ constante, la suma $\sphericalangle AFN + \sphericalangle NFB$ es también constante e igual a la mitad de MFP . El razonamiento sigue siendo válido, con las debidas sustituciones de suma por resta de ángulos, cuando N cae fuera del ángulo MFP .

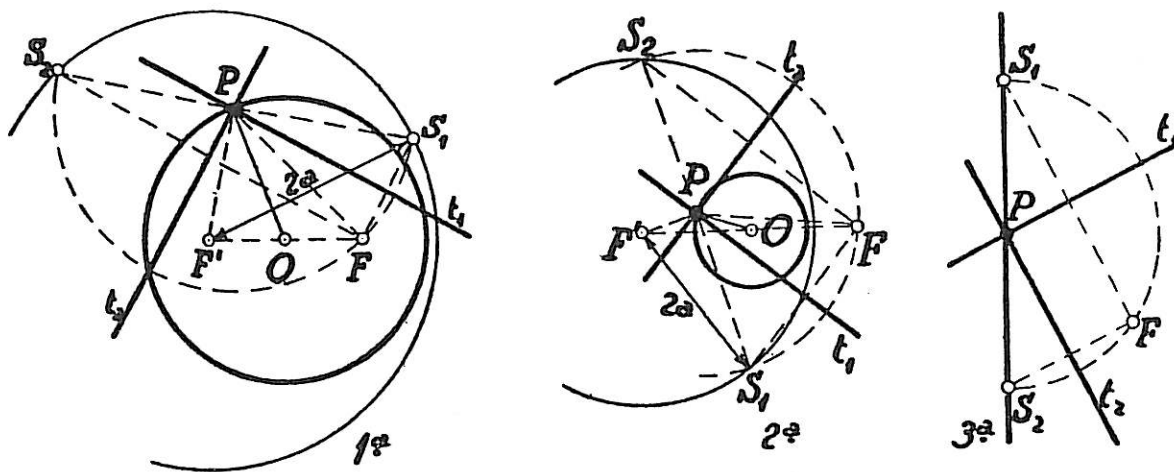
La igualdad de los haces descritos por FA y FB prueba que las series descritas por A y B en las respectivas tangentes fijas son proyectivas. La cónica aparece así como tangente a las rectas que unen pares de puntos homólogos en dos series proyectivas.



3. Tangentes en los extremos de una cuerda focal.—Aplicando el teorema 1.º de Poncelet a las tangentes en los extremos de una cuerda que pasa por el foco (cuerda focal), resulta :

La recta FP que une un foco F con el punto P de intersección de las tangentes en los extremos de una cuerda focal cualquiera es normal a dicha cuerda.

4. **Círculo de Monge.**—¿Qué condiciones habrá de cumplir un punto t para que las tangentes trazadas desde él a la cónica sean perpendiculares entre sí? ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P que las cumplen?



Fijémonos en los casos elipse e hipérbola.

Las igualdades (ver § anterior) $\sphericalangle F'PS_1 = \sphericalangle F'PS_2 = \sphericalangle t_1Pt_2$ nos dicen que si $\sphericalangle t_1Pt_2$ es recto, también lo es $F'PS_1$, con lo que P cumplirá la condición.

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{PS_1}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{F'S_1}^2 = 4a^2 \text{ (const.)}$$

Recíprocamente, si P cumple la condición $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2$ llevando $PS_1 = PF$, se tendrá $\overline{PS_1}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{F'S_1}^2$ y el ángulo $F'PS_1$ será recto como su igual, el ángulo de las tangentes, t_2Pt_1 .

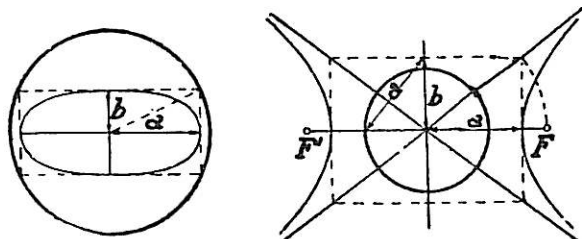
El lugar pedido es, pues, el de los puntos P cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos F, F' es la constante $4a^2$, o sea (Tomo I, lección 22, § 8) una circunferencia cuyo centro es el punto medio O de FF' y cuyo radio es la mediana OP' del triángulo FPF' . El cuadrado de esta mediana vale (Tomo I, lección 24, § 6)

$$\frac{1}{2} (\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2) - \frac{1}{4} \overline{FF'}^2 = 2a^2 - c^2 = \begin{cases} a^2 + b^2 & \text{en la elipse} \\ a^2 - b^2 & \text{en la hipérbola.} \end{cases}$$

Expresaremos esta propiedad diciendo:

El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve una elipse o una hipérbola bajo un ángulo recto, es una circunferencia cuyo centro es el de la cónica y cuyo radio es $\sqrt{a^2 + b^2}$ en la elipse y $\sqrt{a^2 - b^2}$ en la hipérbola. Se llama circunferencia de Monge, y también circunferencia ortóptica.

En la hipérbola sólo existe esta circunferencia si es $a^2 > b^2$ es decir, si el ángulo de las asíntotas con el eje focal es $< 45^\circ$.

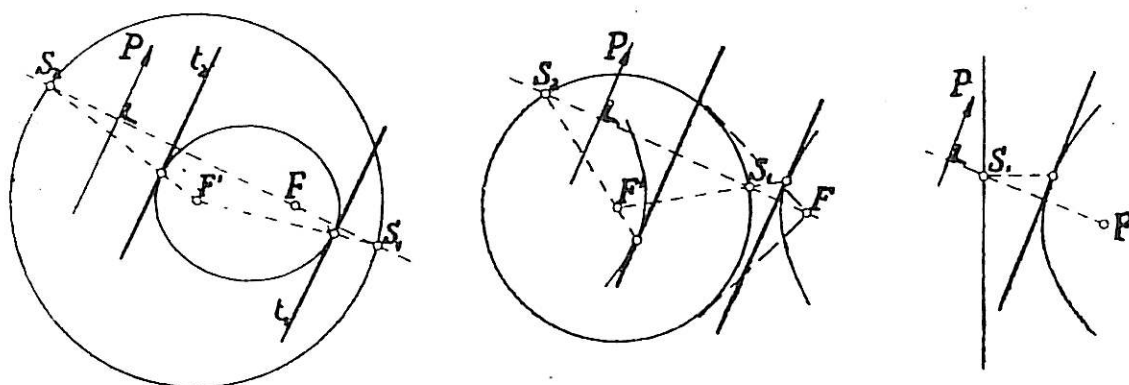


En la elipse se comprueba más rápidamente el valor del radio, viendo que la circunferencia de Monge es circunscrita al rectángulo formado por las tangentes en los vértices.

En la parábola se deduce fácilmente que tal lugar es la directriz.

Basta aplicar a uno cualquiera de sus puntos la construcción del § 1 (v. fig. 3)
 El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve una parábola bajo un ángulo recto, es su directriz.

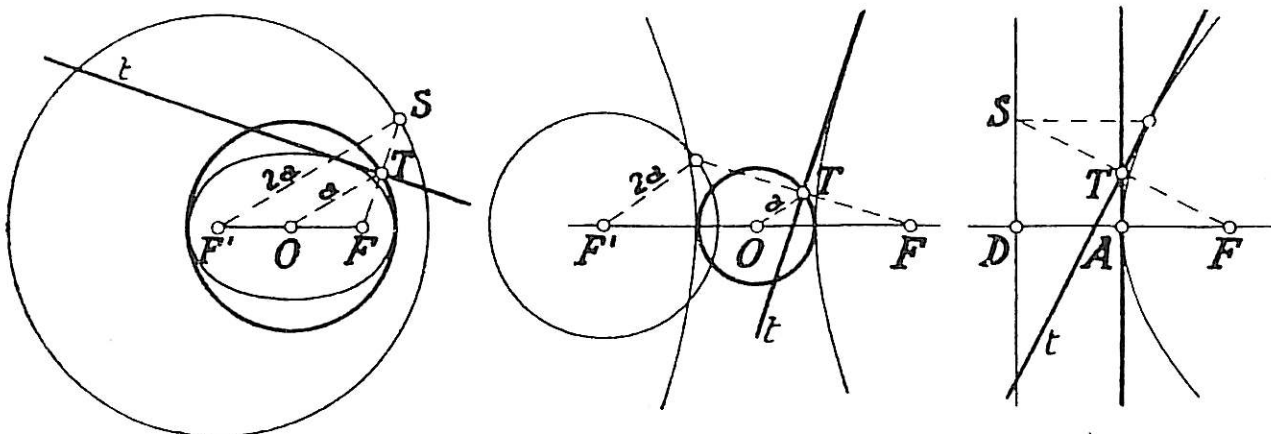
5. Tangentes paralelas a una dirección.—Si en lugar de dar un punto de la tangente damos su dirección la construcción de ella es aún más sencilla, pues el simétrico de F respecto de la tangente buscada debe estar situado en la circunferencia focal F' (o en la directriz de la parábola) y en la perpendicular por F a la dirección dada.



Es fácil ver que: En el caso elipse existen siempre dos soluciones. En el caso parábola existe siempre una solución y sólo una, excepto si la dirección es la del eje. En el caso hipérbola pueden existir dos, una o ninguna solución, según que la perpendicular por F a la dirección dada caiga dentro del ángulo de las tangentes por F a la circunferencia focal F' , o sea (lección anterior, § 6) según que la inclinación de la tangente pedida respecto del eje focal sea mayor, igual o menor que la de las asíntotas.

6. Propiedad de la circunferencia principal de una elipse o una hipérbola y de la tangente en el vértice de una parábola.—De lo dicho en el § 5 de la lección anterior se desprende que:

El lugar geométrico de los simétricos de un foco respecto de las distintas



tangentes a una cónica, es la circunferencia focal con centro en el otro foco (en los casos elipse o hipérbola), o la directriz (en el caso parábola).

La figura homotética de esta circunferencia focal o de esta directriz respecto del foco F con razón $\frac{1}{2}$ dará el lugar geométrico de los pies T de las perpendiculares bajadas de F a dichas tangentes. En esta homotecia al centro F de la circunferencia focal corresponde el centro O en la elipse e hipérbola, y al punto D (caso parábola) corresponde el vértice A . Podemos, pues, decir:

I. El lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de un foco sobre las tangentes a una elipse o hipérbola, es la circunferencia de radio a y cuyo centro es el centro de la cónica. Esta circunferencia se llama *circunferencia principal*, y es tangente a la elipse e hipérbola en los vértices del eje focal.

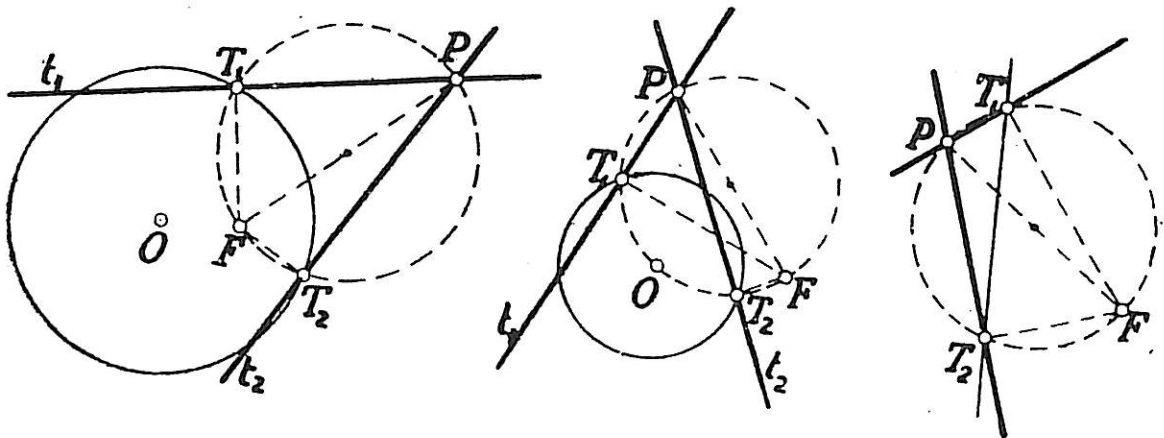
II. En la parábola el lugar geométrico de las proyecciones de un foco sobre las tangentes, es la tangente en el vértice.

Se dice que una curva es *envolvente* de sus tangentes. Por tanto:

Toda cónica es envolvente de uno de los lados de un ángulo recto cuyo vértice se apoya en la circunferencia principal (o en la tangente en el vértice si es parábola) y cuyo otro lado pasa por un foco.

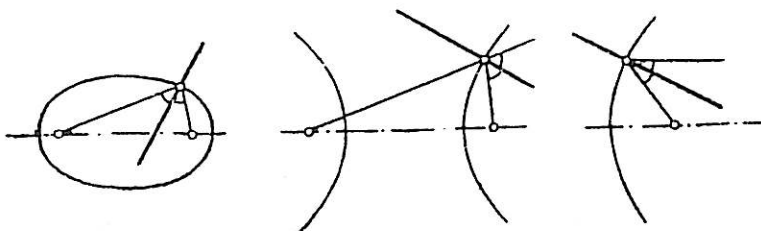
7. Aplicación al trazado de tangentes.— La propiedad de la circunferencia principal de una elipse o hipérbola o de la directriz de una parábola puede ser utilizada para el trazado de tangentes.

Para trazar las tangentes por un punto P bastará trazar la circunferencia de diámetro PF y unir con P los puntos T_1, T_2 de intersección con la circunferencia principal de la elipse e hipérbola, o con la directriz de la parábola.



Para trazar las tangentes paralelas a una dirección dada, basta trazar por P la recta r perpendicular a la dirección, y las paralelas a ésta por los puntos de intersección de r con la circunferencia principal o la directriz, respectivamente.

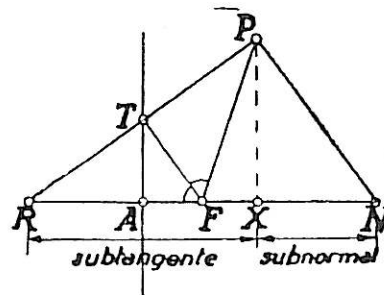
8. Normal a una cónica en un punto.— La recta perpendicular a la tangente en un punto de una cónica se llama *normal*. Recordando la propiedad de la tangente resulta:



La normal en un punto es: en la elipse, bisectriz del ángulo de los radios vectores; en la hipérbola, bisectriz del ángulo adyacente; en la parábola, bisectriz del ángulo formado por el radio vector y la semirecta interior paralela al eje.

9. Subtangente y subnormal en la parábola.—Llámanse *subtangente* y *subnormal* correspondientes a un punto P de la parábola, a los segmentos de eje limitados por la proyección X del punto y la tangente o normal, respectivamente. Así en la figura la subtangente en P es RX y la subnormal es XN .

De las propiedades anteriores se desprende (figura): TF es la bisectriz de AFP (Poncelet), RP es perpendicular a TF , el triángulo ATF es semejante al XNP ; de donde:



$RF = FP$ La distancia del foco al pie de la tangente es igual al radio vector.

$RT = TP$, $RA = AX$ La subtangente es doble de AX o sea, doble de la distancia del punto a la tangente en el vértice.

$PX = 2TA$, $XN = 2AF$ La subnormal es constante e igual a la distancia del foco a la directriz. Esta distancia $2AF$ se llama *parámetro de la parábola*.

EJERCICIOS

1. Demostrar que el producto de distancias de los dos focos a una tangente a una elipse o hipérbola es constante.
 2. El segmento de paralela a una asíntota trazada desde un punto de la hipérbola y comprendido entre dicho punto y una directriz es igual al radio vector que une dicho punto al foco correspondiente.
 3. Demostrar que toda secante a una cónica trazada por un foco F corta a la directriz correspondiente en un punto D , y a la cónica en dos puntos M y M' tales que la cuaterna $FDMM'$ es armónica.
 4. Hallar el lugar geométrico de los pies de las oblicuas trazadas desde un foco a las distintas tangentes a una cónica, de modo que formen con ellas un ángulo constante.
 5. Lugar geométrico de los centros de las elipses tangentes a dos ejes rectangulares. Idem para las hipérbolas.
 6. Demostrar que el segmento PQ de tangente a una elipse o hipérbola, comprendido entre las tangentes en los vértices del eje focal, se proyecta desde un foco F según un ángulo recto.
 7. Demostrar que el producto de distancias $FP \cdot FQ = \text{constante}$ (ejercicio 6).
 8. Si sobre las tangentes trazadas desde un punto P (exterior) a una elipse o hipérbola se llevan segmentos $PR = PF$, $PR' = PF'$ (en el sentido en que se hallan los puntos de contacto), la distancia entre los extremos RR' vale $2a$.
 9. La recta que une dos puntos M y N de una cónica corta a una directriz en un punto D tal que FD es bisectriz exterior (interior) del ángulo MFN (F foco correspondiente a la directriz en cuestión). Demostrarlo y precisar cuándo la directriz es interior.
 10. Demostrar, como caso límite del teorema anterior, que el segmento de tangente a una cónica comprendido entre el punto de contacto y una directriz se ve desde el foco correspondiente según un ángulo recto.
 11. Las circunferencias de centros en dos puntos de una cónica M y N y que pasan por un foco F son homotéticas respecto de un centro situado en la intersección de la recta MN con la directriz correspondiente.
 12. Dados dos puntos M y N y una directriz, hallar el lugar geométrico del foco correspondiente a dicha directriz. (Ver ejercicio 9.)
- (Véanse más ejercicios al final de la lección siguiente.)

LECCIÓN 30.—INICIACIÓN AL ESTUDIO ANALÍTICO DE LAS CÓNICAS

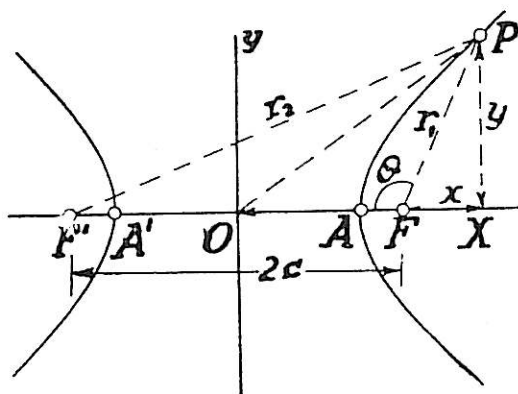
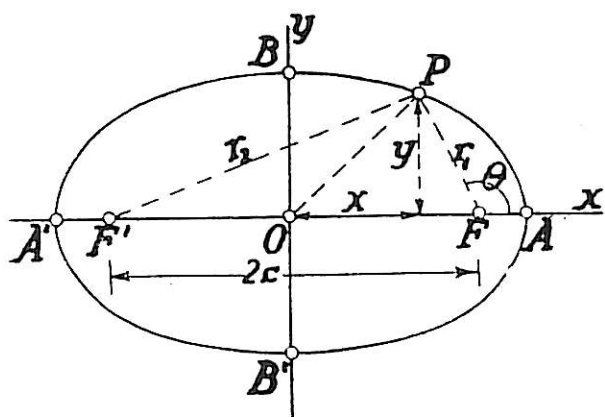
Nos proponemos, en esta lección, dar idea de la aplicación de los métodos de la Geometría analítica (Tomo I, lec. 36) al estudio de las cónicas.

En el tomo I, lección 36 § 7, hemos aprendido a expresar en coordenadas cartesianas rectangulares la distancia entre dos puntos mediante un radical cuadrático. Si elegimos, pues, unos ejes cartesianos y damos las coordenadas de los focos FF' de una elipse o de una hipérbola, podremos expresar la condición $PF' \pm PF = 2a$ mediante una ecuación irracional. Aun elegidos los ejes más convenientes, que son los de la cónica, la racionalización de esta ecuación exige dos elevaciones al cuadrado.

Es preferible obtener directamente la ecuación en forma entera valiéndonos de ciertas expresiones de los radios vectores, que van a sernos asimismo útiles para hallar la ecuación polar

1. Expresión de los radios vectores.—Consideremos unos ejes cartesianos rectangulares Ox , Oy coincidentes con los ejes AA' y BB' de la elipse o de la hipérbola.

Los dos radios vectores r_1, r_2 de cada punto P son lados de un triángulo $PF'F$ cuya diferencia de cuadrados se expresa fácilmente (Tomo I, lecc. 22, § 7) me-



dante el tercer lado $FF' = 2c$ y la proyección x de la mediana OP sobre él. Se tiene:

Elipse

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

$$r_2 + r_1 = 2a$$

por división resulta

$$r_2 - r_1 = \frac{2c}{a}x$$

Hipérbola

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

$$r_2 - r_1 = 2a$$

por división resulta

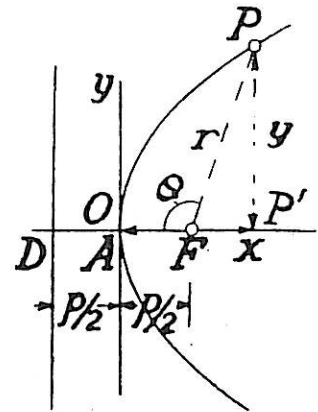
$$r_2 + r_1 = \frac{2c}{a}x$$

conocidos $r_2 + r_1$ y $r_2 - r_1$ se deduce por suma y resta (respectivamente),

$$\begin{aligned}
 r_2 &= a + \frac{c}{a} x = a + \epsilon x & r_2 &= \epsilon x + a \\
 [1] \quad r_1 &= a - \frac{c}{a} x = a - \epsilon x & r_1 &= \epsilon x - a
 \end{aligned}$$

En la parábola, tomando como eje x el de la parábola y como eje y la tangente en el vértice y llamando p a la distancia del foco a la directriz, se tendrá $r = DP'$, es decir,

$$[2] \quad r = x + \frac{p}{2}$$



2. Ecuación focal de las cónicas.—Llamando θ al ángulo que forma el radio vector r_1 con FA se tendrá

<i>Elipse</i>	<i>Hipérbola</i>
$r_1 \cos \theta = x - c$	$r_1 \cos \theta = c - x$

y eliminando x entre estas ecuaciones y las respectivas expresiones del radio vector, para lo cual basta multiplicarlas por ϵ y sumarlas a las anteriores [1] (recuérdese que $a^2 = b^2 + c^2$ en la elipse y $c^2 = a^2 - b^2$ en la hipérbola)

$$r_1 (1 + \epsilon \cos \theta) = a - \epsilon c = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}, \quad r_1 (1 + \epsilon \cos \theta) = \epsilon c - a = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

Es decir, poniendo $\frac{b^2}{a} = p$, queda la ecuación, válida para ambas cónicas,

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad [3]$$

que liga las dos coordenadas polares r, θ del punto P respecto a un origen situado en el foco y a un eje polar coincidente con la dirección del radio vector mínimo FA .

Esta ecuación tiene gran interés en Astronomía, por ligar la distancia del Sol al planeta con el ángulo girado por éste alrededor de aquél, tomando como origen de ángulos la dirección del apogeo (distancia mínima)

Esta ecuación vale también para la parábola, pues en ella se tiene (v. fig.)

$r \cos \theta = \frac{p}{2} - x$, que sumada a [2] da

$$r (1 + \cos \theta) = p, \quad r = \frac{p}{1 + \cos \theta} \quad [4]$$

3. **Ecuación cartesiana de la elipse e hipérbola.**—Volviendo a los ejes cartesianos coincidentes con los de la cónica, se tiene

$$r_1^2 = (x-c)^2 + y^2$$

y sustituyendo r_1 por la expresión [1] resulta, lo mismo en la elipse que en la hipérbola,

$$a^2 + \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + y^2$$

o sea

$$x^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \quad [5]$$

Pero el coeficiente de x^2 vale en la elipse $\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$ y en la hipérbola $\frac{b^2}{a^2}$. Por tanto, dividiendo por b^2 , se obtendrá

ECUACIÓN DE LA ELIPSE

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

$$[6] \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad [7]$$

que se llaman ecuaciones *reducidas* de dichas cónicas referidas a sus ejes.

Recíprocamente, toda curva de ecuación [6] (supuesto $a > b$, en caso contrario bastaría permutar los ejes) puede escribirse, poniendo $c^2 = a^2 - b^2$, en la forma [5] o en sus equivalentes

$$a^2 + \frac{c^2}{a^2} x^2 \pm 2cx = x^2 + c^2 \pm 2cx + y^2$$

es decir,

$$\left(a \pm \frac{c}{a} x \right)^2 = (x \pm c)^2 + y^2$$

Pero, con el signo +, el segundo miembro es el cuadrado de la distancia r_2 del punto xy del lugar al punto $F'(-c, 0)$ y con el signo - es el cuadrado de la distancia r_1 al punto $F(+c, 0)$, de modo que

$$\left. \begin{aligned} a + \frac{c}{a} x &= r_2 \\ a - \frac{c}{a} x &= r_1 \end{aligned} \right\} \text{ y sumando } \quad 2a = r_1 + r_2$$

que expresa que todo punto del lugar cumple la definición de elipse (*).

Análogamente para la hipérbola.

(*) No es válida la conclusión $\frac{c}{a}x - a = r_1$, porque de la ecuación de la elipse se desprende que sólo existen puntos para $x < a$, lo que daría $\frac{c}{a}x - a$ negativo, por ser c también $< a$.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.—Si en una elipse es $a=b$, es $c=0$, los focos se confunden (*excentricidad nula*), la elipse se convierte en circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA.—Si $a=b$ en la hipérbola resulta $c=a\sqrt{2}$. Las asíntotas forman 45° con los ejes y queda la ecuación

$$x^2 - y^2 = a^2$$

4. Ecuación cartesiana de la parábola.—Respecto a unos ejes cartesianos coincidentes con el eje de la parábola y la tangente en el vértice, se tiene

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = r^2 \quad [8]$$

y sustituyendo r por [2] resulta

$$x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px \quad [8']$$

es decir,

$$\boxed{y^2 = 2px} \quad [9]$$

también llamada ecuación reducida de la parábola.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma [9] puede ponerse en la forma [8'], es decir,

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

que traduce la condición de equidistancia del punto xy del lugar al punto $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y a la recta $x = -\frac{p}{2}$.

Hagamos uso de las ecuaciones reducidas para deducir algunas nuevas propiedades de las cónicas.

5. Homología afín entre la elipse y su circunferencia principal.—Comparemos el valor de la ordenada de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{de donde} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

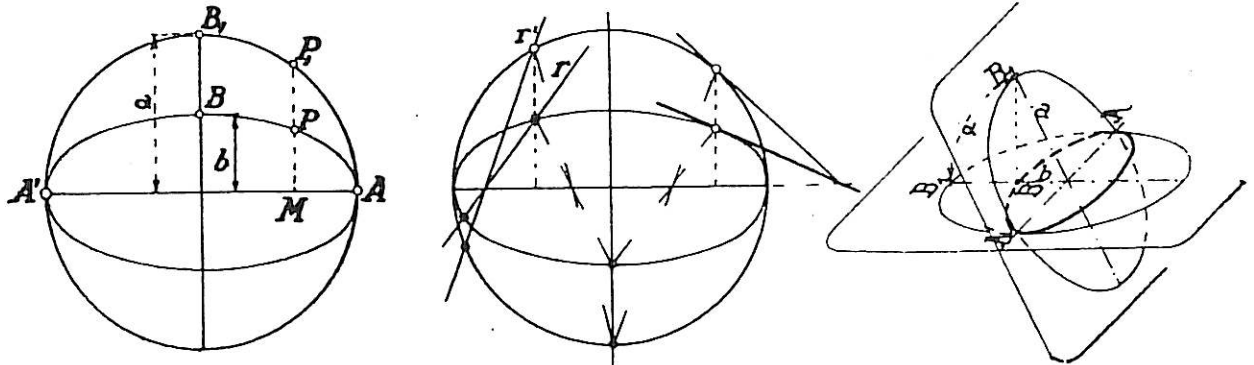
con la de la *circunferencia principal* que tiene por diámetro al eje mayor

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{de donde} \quad y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

La razón entre ambas ordenadas es el valor constante $\frac{b}{a}$. cualquiera que sea x . Es decir, los puntos P y P_1 de la circunferencia y de la elipse situados

en una misma paralela al eje y distan del eje x dos segmentos, que están en la razón constante $MP : MP_1 = b : a$; por tanto, entre la elipse y la circunferencia principal existe una homología afín de eje AA' y razón $b : a$.

Esta relación de afinidad se utiliza para dar solución sencilla y uniforme a problemas sobre secantes y tangentes. Así, por ejemplo, para hallar las intersecciones de una recta r con la elipse basta transformar por afinidad r en r' y hallar las intersecciones de r' con la circunferencia (v fig.).

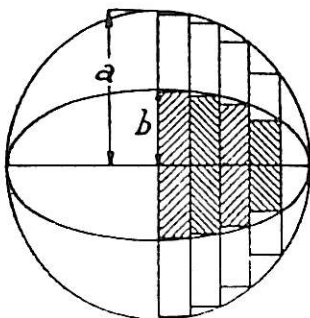


6. La elipse como proyección de la circunferencia.—Si giramos la circunferencia alrededor del eje mayor AA' hasta que el punto B_1 caiga en la perpendicular por B al plano, los puntos de la circunferencia se proyectan entonces sobre los correspondientes de la elipse en la mencionada afinidad. En efecto, el coseno del ángulo formado por los dos planos, el de la elipse y el de la circunferencia, tendrá el valor de $\cos \alpha = b : a$.

En resumen: *Toda elipse puede obtenerse como proyección ortogonal de una circunferencia de diámetro igual a su eje mayor.*

Compárese este resultado con el del § 6, lección 27. Aquí la circunferencia es sección oblicua de un cilindro cuya sección recta es elíptica; allí la elipse es sección oblicua de un cilindro de sección recta circular de diámetro igual al eje menor, es decir, *la elipse se proyecta según dicha circunferencia.*

7. Área de la elipse.—Considerando el área de la elipse como el límite de la suma de las áreas de rectángulos inscritos en las fajas que resultan de trazar paralelas al eje y (Tomo I, lección 58, § 10), y haciendo lo propio en el círculo principal, a cada rectángulo inscrito en el círculo corresponderá otro del mismo ancho inscrito en la elipse. Las áreas de ambos rectángulos estarán constantemente en la razón de las alturas o sea $b : a$. Por consiguiente, ésta será la razón entre las sumas y entre sus límites. Por tanto,



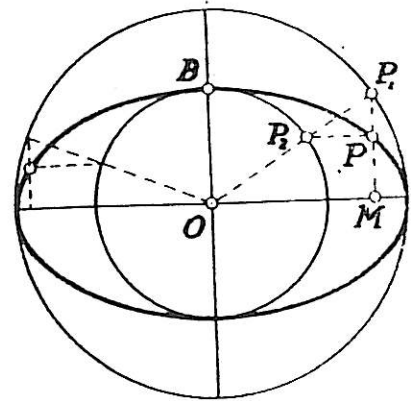
$$\frac{\text{área elipse}}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$$

de donde resulta

$$\text{área elipse} = \pi ab$$

Esto mismo resulta del § 6 de la lección 2.^a, pues siendo la elipse proyección de la circunferencia, su área valdrá $\pi a^2 \cdot \cos \alpha = \pi ab$.

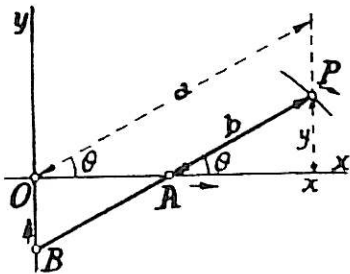
8. **Nuevas construcciones de la elipse.**—La relación de afinidad nos proporciona, además, otra construcción de la elipse por puntos, que consiste en trazar la circunferencia principal y la que tiene por diámetro el eje menor. Trazado un radio cualquiera, sean P_2 y P_1 las intersecciones con la circunferencia menor y la principal, las paralelas respectivamente trazadas por ellos al eje x y al eje y se cortan en un punto P de la elipse, puesto que



$$\frac{MP}{MP_1} = \frac{OP_2}{OP_1} = \frac{b}{a}$$

Otra construcción se obtiene con el llamado *compás elíptico* o *elipsógrafo*.

Consiste en una varilla con dos salientes A y B , que se deslizan sobre dos guías en ángulo recto Ox , Oy . Un punto cualquiera P de la varilla describe una elipse. En efecto, la abscisa x y la ordenada y de P referidas a las guías como ejes, valen



$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= b \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{a} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{b} \end{aligned} \right.$$

y elevando al cuadrado y sumando resulta

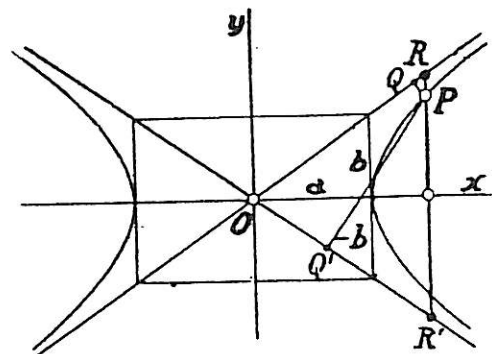
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es decir, la ecuación de la elipse.

9. **Distancias de un punto de una hipérbola a sus asíntotas.**—Recordando (lec. 28, § 7) que las asíntotas pasan por el centro y por los puntos de coordenadas a y $\pm b$, se obtienen como ecuaciones de una y otra,

$$y = + \frac{b}{a} x, \quad y = - \frac{b}{a} x$$

Las ordenadas correspondientes a la misma abscisa x en la hipérbola



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{son } y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

correspondientes a dos puntos simétricos respecto del eje x . Sumando y restando los valores absolutos de las ordenadas correspondientes a la asíntota y

a la curva, obtendremos los segmentos PR y PR' comprendidos entre un punto P de la curva y las asíntotas (v. fig.).

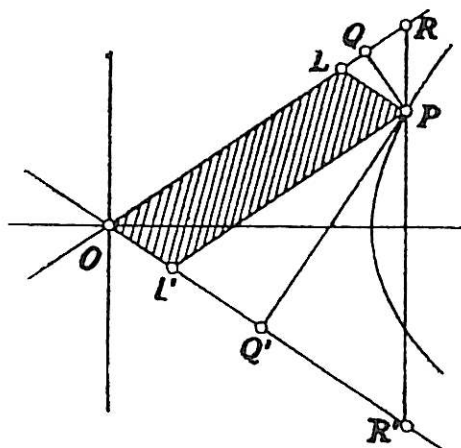
$$PR = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}), \quad PR' = \frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

Multiplicando estos valores, resulta

$$\overline{PR} \cdot \overline{PR'} = \frac{b^2}{a^2} [x^2 - (x^2 - a^2)] = b^2$$

Estos segmentos tienen, pues, producto constante.

Trazando por P las perpendiculares a las asíntotas, se obtienen dos segmentos PQ , PQ' tales que las razones $PQ:PR$ y $PQ':PR'$ son constantes. Luego es constante su producto $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} : \overline{PR} \cdot \overline{PR'}$, y al serlo $\overline{PR} \cdot \overline{PR'}$ lo es también $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'}$, es decir:



El producto de distancias de un punto cualquiera de la curva a sus asíntotas es constante. Cuando uno de los factores crece infinitamente, el otro tiende a cero, acercándose el punto indefinidamente a la asíntota correspondiente.

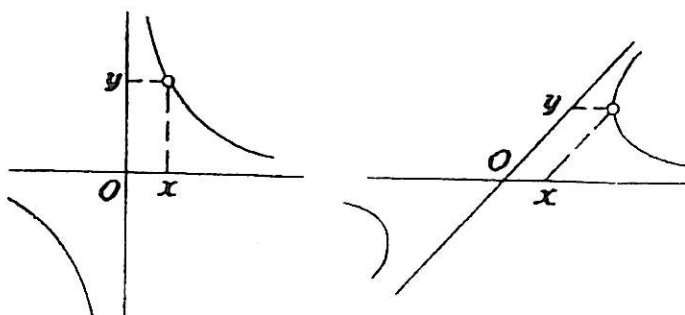
Trazando por P los segmentos de paralelas PL , PL' a las asíntotas, comprendidos entre P y las mismas, resulta análogamente $\overline{PL} \cdot \overline{PL'} = \text{const.}$, de donde:

El área del paralelogramo formado por las asíntotas y las paralelas a ellas por un punto cualquiera de la curva es constante.

10. Ecuación de la hipérbola referida a las asíntotas.—Si adoptamos las asíntotas de una hipérbola equilátera como ejes cartesianos rectangulares de referencia, sus puntos verificarán la relación

$$\boxed{xy = k} \text{ (const.)}$$

que se desprende de lo que acabamos de demostrar. Y esta misma ecuación vale para una hipérbola no equilátera referida a sus asíntotas, si definimos como coordenadas de un punto los segmentos de paralelas a las mismas.



11. **Teorema de Schooten.**—Generalizando el elipsógrafo, consideremos una varilla AB dos de cuyos puntos A, B se deslizan sobre dos rectas fijas secantes Ox, Oy rectangulares u oblicuas, e imaginemos el plano arrastrado por el movimiento de la varilla. El diámetro de la circunferencia OAB permanecerá constante, puesto que vale (lección 3.^a, § 8) $\overline{AB} : \text{sen } \alpha$; podemos, pues, imaginar esta circunferencia invariablemente unida al segmento AB en su movimiento. Un punto cualquiera H de ella formará arcos constantes \widehat{HA} , \widehat{HB} , con A y B , de donde resulta

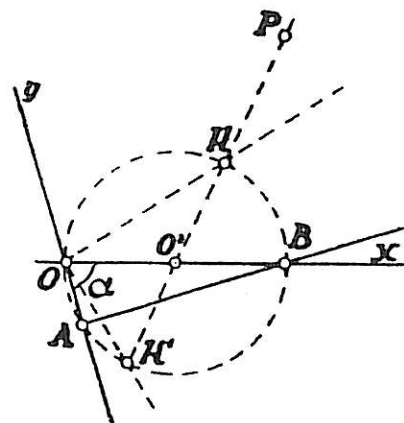
$$HOA = \text{constante}, \quad \sphericalangle HOB = \text{constante}, \quad \text{es decir,}$$

Todo punto H de la circunferencia AOB , supuesta unida invariablemente a AB en su movimiento, describe una recta que pasa por el origen.

Uniéndolo ahora un punto cualquiera P del plano móvil con el centro O' de dicha circunferencia obtenemos dos puntos alineados diametrales HH' , describiendo cada uno de ellos una recta fija, y tales que $HH' = \text{constante}$. Por tanto:

Todo punto P de un plano móvil, dos de cuyos puntos se deslizan sobre dos rectas fijas secantes, describe en su movimiento una elipse, excepto los de la circunferencia AOB , que describen segmentos. Su centro describe una circunferencia, por ser $OO' = \text{constante}$.

Este notable teorema de Schooten (Siglo XVII) generaliza el del elipsógrafo dado en el § 8. (En la figura se ha dibujado sólo una posición particular de la circunferencia AOB ; aquella en que el centro está sobre el eje Ox , pero no se ha hecho uso de esta particularidad en la demostración.)



NOTA

Ecuación general de segundo grado con dos variables.—Todas las ecuaciones reducidas de las cónicas estudiadas tienen un carácter analítico común: Son ecuaciones de segundo grado en las coordenadas

En Geometría analítica se demuestra que las ecuaciones de las cónicas siguen siendo de segundo grado referidas a ejes cartesianos cualesquiera, y recíprocamente: Que toda ecuación general de segundo grado en dos variables x, y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una elipse, una hipérbola, una parábola o un conjunto de dos rectas distintas o confundidas, reales o imaginarias (que hemos denominado cónicas degeneradas en el § 9 de la lección 27), o un lugar totalmente imaginario.

Para comprender la existencia de estos casos particulares, basta observar que si multiplicamos ordenadamente las ecuaciones de dos rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

obtendremos una ecuación de segundo grado

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

que se satisface, evidentemente, para las coordenadas de los puntos de las dos rectas y sólo para ellas; luego esta ecuación de segundo grado representa el conjunto de ambas.

En cambio, la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ sólo se satisface para el punto real $x = 0, y = 0$, puesto que todo otro par de valores reales elevados al cuadrado y sumados darán forzosamente una suma positiva; pero junto a este punto real la ecuación se satisfará para los infinitos pares de valores imaginarios que cumplan la condición $y^2 = -x^2$; $y = \pm x\sqrt{-1}$ y se dice que las dos ecuaciones lineales $y = +x\sqrt{-1}, y = -x\sqrt{-1}$, representan dos rectas imaginarias conjugadas.

Finalmente, dada la ecuación $x^2 + y^2 = -1$, por ejemplo, es fácil ver que no hay ningún punto real cuyas coordenadas la satisfagan; es el caso de cónica imaginaria.

Las condiciones a que han de satisfacer los coeficientes de la ecuación general (1) para reconocer uno y otro de los casos particulares enunciados, se estudian en Geometría analítica, saliéndose dicho estudio de los límites de este curso.

Se comprende ahora la razón analítica del hecho de no poder ser cortada una cónica por una recta más que en *dos puntos*, ya que el sistema formado por su ecuación y la de la recta (de primer grado) sólo tendrá dos soluciones.

Queda asimismo justificada la denominación de *curvas de segundo orden*.

EJERCICIOS

(Referentes a todo el capítulo)

1. Expresar la distancia entre las directrices de una elipse o hipérbola en función del eje mayor (real) y de la excentricidad.

2. Comprobar que la semicuérda focal perpendicular al eje focal es en las tres cónicas igual al parámetro p .

Mostrar que:

3. Toda tangente a una parábola corta a la directriz y a su paralela por el foco en puntos equidistantes de éste.

4. Si desde un punto cualquiera P de una tangente a una parábola se traza la otra tangente t el ángulo FPt es constante.

5. Dos parábolas simétricas con un mismo foco se cortan ortogonalmente.

6. La distancia de una parábola a una tangente cualquiera es media proporcional entre el radio vector y el semiparámetro.

7. Si POP' y QFQ' son dos cuerdas paralelas de una elipse o hipérbola, respectivamente trazadas por el centro Q y un foco F , se verifica $(\overline{FQ} \cdot \overline{FQ'}) : (\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'}) = \pm b^2 : a^2$.

8. Si M y N son los puntos en los que la normal a una elipse o hipérbola por un punto P de ella corta a los ejes, se verifica $PM : PN = \pm b^2 : a^2$.

9. Si una cuerda de la parábola corta al eje en un punto R su distancia RA al vértice es media proporcional entre las distancias x_1 , x_2 de los extremos de la cuerda a la tangente en el vértice.

10. Las tangentes en dos puntos M y N de una parábola se cortan en un punto P cuya distancia al foco F es media proporcional entre los radios vectores FM y FN .

11. Un segmento de tangente TP a una parábola, donde T es el punto de contacto, se ve desde el foco según un ángulo suplementario del que forma PT con la otra semirecta tangente a la parábola por P .

12. La circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres tangentes a una parábola pasa por el foco. (Teorema de *Lambert*, siglo XVIII.)

13. El ortocentro del triángulo del ejercicio anterior está en la directriz.

14. Hallar la posición de equilibrio de un hilo sujeto por dos puntos y del que cuelga una anilla pesada capaz de resbalar sin rozamiento.

15. Hallar el foco de una pantalla parabólica de 30 cm de diámetro y 25 cm de profundidad.

Lugares geométricos.

16. Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una elipse que pasan por un punto dado.

17. Lugar geométrico de los puntos que resultan de llevar sobre las ordenadas de una cónica referida a sus ejes segmentos iguales a los radios vectores de los puntos respecto a un foco.

18. Lugar geométrico de los focos de las cónicas que tienen una circunferencia principal dada y que pasan por un punto dado.

19. Lugar geométrico de los focos de las parábolas que tienen común la tangente en su vértice respectivo y que pasan por un punto dado P .

20. Lugar geométrico de los puntos de intersección de los diámetros trazados por los puntos M de una parábola con las cuerdas focales paralelas a las tangentes respectivas.

21.—Considérense los infinitos rectángulos que se pueden trazar con tres vértices en una parábola siendo uno de ellos el vértice de la misma. Hallar el lugar geométrico del cuarto vértice.

22. Envoltente de la cuerda de los segmentos elípticos de área constante en una elipse dada.

23. Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas focales de una parábola.

24. Lugar geométrico de los focos de las parábolas tangentes a dos rectas dadas, siéndolo a una de ellas en un punto dado.

EJERCICIOS DE CONSTRUCCION DE CONICAS DADAS POR ELEMENTOS METRICOS

Se entenderá resuelto el problema en cuanto se conozcan los elementos de que hemos partido para las construcciones de las lecciones 28 y 29, es decir, los focos y $2a$, o el foco y directriz si es parábola, o en cuanto se conozcan los parámetros de su ecuación a , b o p y la posición de los ejes (*).

Construir una elipse o hipérbola dados:

1. Los dos focos y una tangente.
2. Un foco y tres tangentes.
3. Un foco, dos tangentes y un punto.
4. Un foco, dos puntos y una tangente.
5. Un foco y tres puntos.
6. Un foco, dos tangentes y el punto de contacto de una de ellas.
7. Un foco, su directriz y el valor de la excentricidad.
8. Un foco, un vértice y una tangente.
9. Un foco, dos tangentes y la distancia focal.
10. Un foco, su directriz y una tangente (recuérdese ejercicio 10, lec. 29).
11. Las dos directrices y dos puntos (recuérdese ejercicio 12, lec. 29).
12. Una directriz, un vértice y un punto.
13. Una directriz, el centro y un punto.
14. Una directriz y tres puntos.
15. El centro, dos tangentes y $2a$.
16. Los vértices del eje focal y una tangente.

Construir una elipse dados:

17. Dos vértices y la excentricidad. Considérense los distintos casos según los vértices que se supongan dados.
18. Un foco, las longitudes de los dos semiejes y un punto.
19. Un foco, uno de los vértices del eje menor y un punto.
20. Un foco, uno de los vértices del eje menor y una tangente.
21. Un foco, dos tangentes y la longitud del eje menor.

Construir una hipérbola dados:

22. Los vértices del eje focal y un punto.
23. Un foco, una asíntota y $2a$.
24. Un vértice, una asíntota y la excentricidad.
25. Un foco, una asíntota y una tangente.
26. Una asíntota, una directriz y un punto (recuérdese ejerc. 2, lec. 29).

Construir una parábola dados:

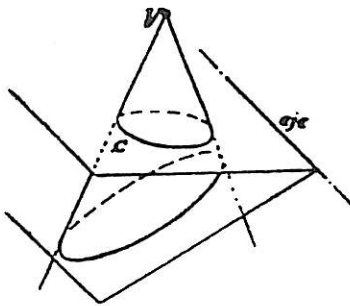
27. El foco, una tangente y un punto. Caso en que sea su punto de contacto.
28. La directriz, una tangente y un punto.
29. El foco y dos tangentes.
30. La directriz y dos tangentes.
31. La cuerda focal perpendicular al eje.
32. La tangente en el vértice y otras dos.
33. Cuatro tangentes cualesquiera (recuérdese ejerc. 12 de esta lección).
34. Tres tangentes y el punto de contacto de una de ellas (idem ejercicio 24).

(*) Entre los ejercicios de la lección 28 hemos propuesto ya cuatro de este género, números 9, 11, 16 y 17.

Capítulo IX.—ESTUDIO PROYECTIVO DE LAS CÓNICAS

LECCIÓN 31.—GENERACIÓN PROYECTIVA DE LAS CÓNICAS

1. Las cónicas definidas como figuras homológicas de una circunferencia.—En el capítulo precedente hemos definido las cónicas como las secciones planas de un cono de *revolución*. Las llamaremos *cónicas métricas*. Como dos secciones planas de un cono son homológicas entre sí (con centro de homología el vértice del cono y eje de homología la recta de intersección en ambos planos), si relacionamos una cónica métrica con otra sección circular del mismo cono de revolución, podemos afirmar:



Toda cónica métrica es homológica de cualquier sección circular del cono de revolución de que procede.

Toda cónica métrica es homológica de cualquier sección circular del cono de revolución de que procede.

Llamemos ahora *cónica proyectiva* a toda curva homológica de una circunferencia.

Según acabamos de ver, *las cónicas métricas son cónicas proyectivas.*

En la lección próxima demostraremos que, recíprocamente, toda cónica proyectiva es una cónica métrica, y, por tanto, que la nueva definición de cónica es equivalente a las anteriores. Entre tanto conservaremos la distinción nominal para no confundir *a priori* los conceptos de partida (*).

De la definición adoptada resulta :

Todas las propiedades de la circunferencia que tengan carácter invariante en toda transformación proyectiva, serán asimismo propiedades de las cónicas proyectivas.

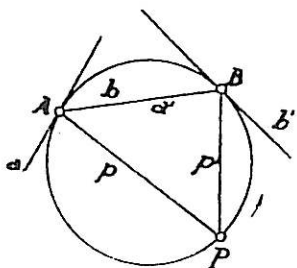
2. Teorema de Steiner.—Recordemos, en particular, que :

Al proyectar los puntos P de una circunferencia desde dos de ellos A, B se obtienen dos haces iguales (y, por tanto, proyectivos) no perspectivas.

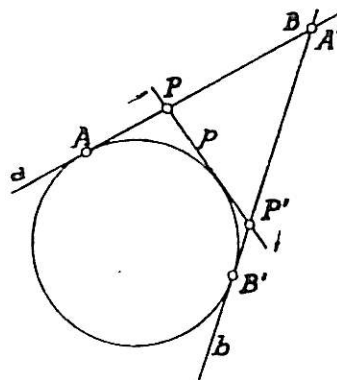
Al cortar las tangentes p a una circunferencia por dos tangentes fijas a y b las series obtenidas son proyectivas, no perspectivas.

(*) El hecho de que una curva pueda ser obtenida como transformada homológica de una circunferencia no significa *a priori* que pueda serlo en una homología particular, en que el centro de la homología se proyecte ortogonalmente en el centro de la circunferencia (cono de revolución).

En esta proyectividad, al rayo $AB \equiv b$, considerado como del haz A , le corresponde la tangente b' en B , y



En esta proyectividad, al punto $ab \equiv B$, considerado como de la serie a , le corresponde el punto de tangen-



análogamente al rayo $BA \equiv a'$, considerado como perteneciente al haz B , le corresponde la tangente a en A (v. lec. 19, § 1).

cia B' de b , y análogamente, al punto $ba \equiv A'$ considerado como de la serie b , le corresponde el punto A de tangencia de a (v. lec. 19, § 2).

Toda homología que transforme esta circunferencia en cónica transformará los dos haces (series) proyectivos entre sí, no perspectivos, en otros dos que guardarán entre sí la misma relación. Como, por otra parte, una tangente a la circunferencia se transforma en tangente a la cónica (por tener un solo punto común con ella), podemos afirmar:

Al proyectar los puntos P de una cónica proyectiva desde dos de ellos A, B se obtienen dos haces proyectivos no perspectivos, en los que al rayo común AB considerado como perteneciente a cada uno de los haces A, B corresponde la tangente en el vértice del otro B, A .

Al cortar las tangentes p a una cónica proyectiva por dos de ellas a, b se obtienen dos series proyectivas no perspectivas, en las que al punto común ab considerado como perteneciente a cada una de las series a, b corresponde el punto de contacto de la base de la otra b, a .

Toda cónica proyectiva puede, pues, imaginarse engendrada por intersección de los pares de rayos homólogos de los haces que proyectan sus puntos desde dos cualesquiera de ellos.

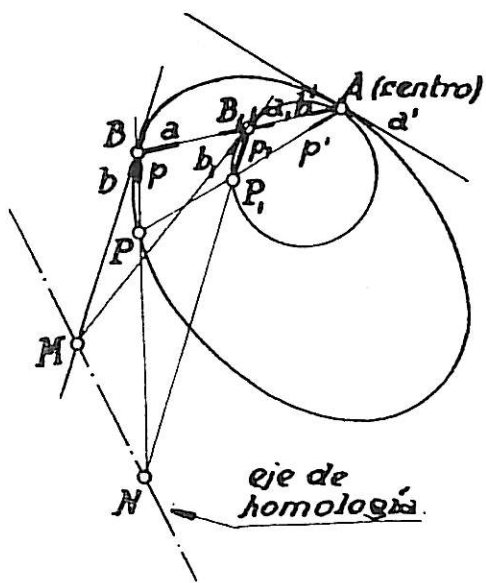
Toda cónica proyectiva puede, pues, concebirse como envolvente de las rectas que unen los pares de puntos homólogos de las series interceptadas en dos cualesquiera de sus tangentes por las demás.

3. Generación proyectiva de las cónicas.—Demostraremos ahora que, recíprocamente:

El lugar de los puntos de intersección de los pares de rayos homólogos de dos haces proyectivos no perspectivos es una cónica proyectiva.

La envolvente de las rectas que unen pares de puntos homólogos de dos series proyectivas no perspectivas es una cónica proyectiva.

Sean A y B los vértices de los haces. Sean b y a' las rectas homólogas del rayo común considerado, respec-



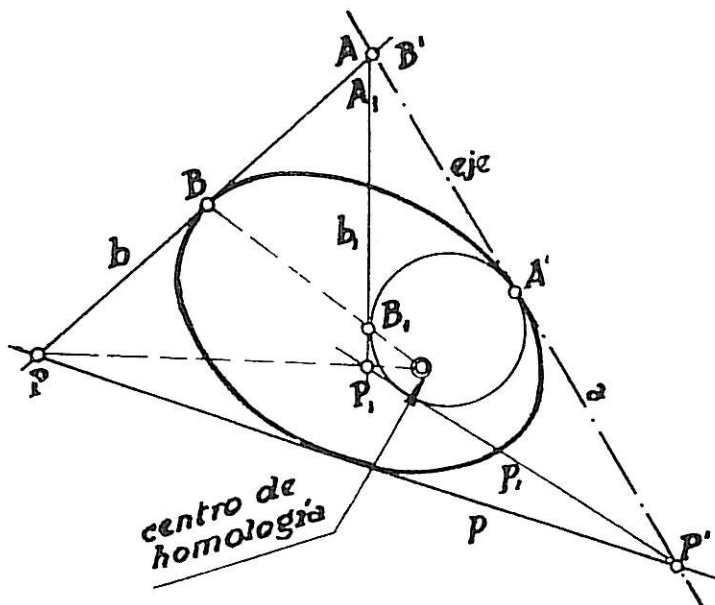
tivamente, como del haz A y del B . Sea P un punto cualquiera del lugar, es decir, de intersección de dos rayos homólogos cualesquiera p, p' .

Tracemos por A una circunferencia tangente a a' , y sean P_1 y B_1 los segundos puntos de intersección de AB y AP con la circunferencia. Tracemos finalmente b_1 tangente a la circunferencia en B_1 .

Consideremos la homología con centro A y en la que a $P_1B_1b_1$ corresponden PbB (su eje quedará determinado por las intersecciones M, N de los pares de rectas homólogas bb' pp_1). En esta homología a los dos haces proyectivos $a'b'p' \bar{\wedge} a_1b_1p_1$, que engendran la circunferencia, corresponden los $a'b'p' \bar{\wedge} abp$. Luego el lugar de los puntos engendrado por estos haces es la cónica homológica de la circunferencia en la mencionada homología.

La construcción se desarrolla análogamente si en lugar de dar el par de rayos homólogos bb' de los haces, se da otro par qq' , es decir, si se

Sean a y b las bases de las series. Sean B y A' los puntos homólogos del punto común considerado, respecti-



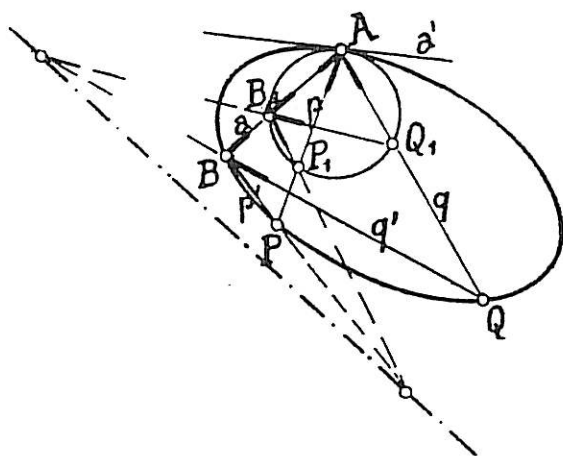
vamente, como de la serie a o de la b . Sea p una tangente cualquiera del haz, es decir, unión de dos puntos homólogos cualesquiera P, P' de las series.

Tracemos una circunferencia tangente a a por A' y sean p_1 y b_1 las segundas tangentes trazadas desde P' y B' a la circunferencia. Sea B_1 el punto de contacto de b_1 .

Consideremos la homología de eje a y en la que a $p_1b_1B_1$ correspondan pbB (el centro vendrá determinado uniendo los pares de puntos homólogos PP_1 y BB_1). En esta homología a las series proyectivas $A'B'P' \bar{\wedge} A_1B_1P_1$, que engendran el haz de tangentes a la circunferencia, corresponden las series proyectivas $A'B'P' \bar{\wedge} ABP$, que engendran el haz dado. Luego éste es envolvente de la cónica homológica de la circunferencia trazada.

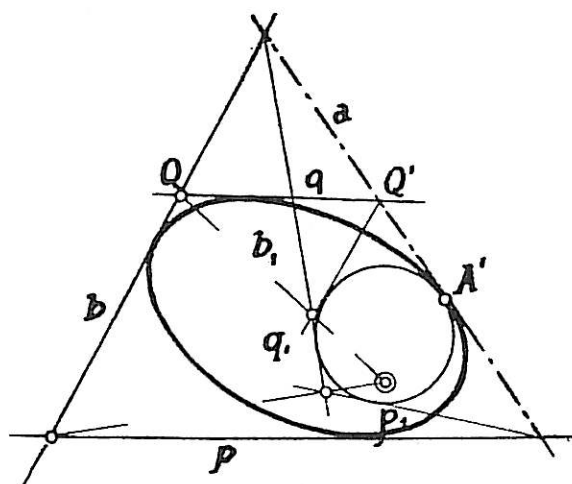
La construcción se desarrolla análogamente si en lugar de dar el par de puntos homólogos BB' de las series se da otro par cualquiera QQ' , es decir,

conocen del lugar cuatro puntos $ABPQ$ y la tangente a' en el punto A . Proyectando BPQ desde A sobre la



circunferencia se tienen los puntos homólogos $B_1P_1Q_1$, lo que permite hallar el eje.

si se conocen cuatro tangentes del haz $abpq$ y el punto de contacto A' de a . De la homología de eje a se



conocen ahora tres tangentes bpq a la cónica y sus homólogos $b_1p_1q_1$ en la circunferencia, lo que permite hallar el centro.

NOTA.—Conviene que el lector retenga estas demostraciones, por su carácter constructivo. Con ellas podrá construir una homología que transforme una cónica en circunferencia, siempre que pueda hallar, entre los elementos que la definen, un punto y su tangente.

Estas construcciones no son las únicas que pueden darse, pero son de las más sencillas. Si giramos la circunferencia alrededor del eje de homología, sacándola fuera de su plano, la nueva posición de la circunferencia será afín de la anterior y, por tanto, homóloga de la cónica (teorema de las tres homologías), obteniendo así ésta como sección de un cono circular; pero no, en general, de revolución.

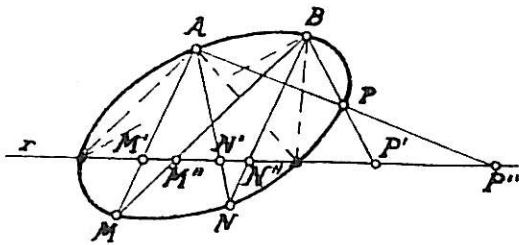
4. Definiciones proyectivas de cónicas.—Demostrados los directos y los recíprocos anteriores, resulta: *Una cónica proyectiva puede también definirse:*

- 1.º Como lugar geométrico de los puntos comunes a los pares de rayos homólogos de dos haces proyectivos no perspectivos.
- 2.º Como envolvente de las rectas que unen los pares de puntos homólogos de dos series proyectivas no perspectivas.

Estas definiciones son interesantes por utilizar sólo conceptos proyectivos y son usadas, por ello, en Geometría proyectiva. Su equivalencia con la definición del § 1 prueba, además, su equivalencia entre sí.

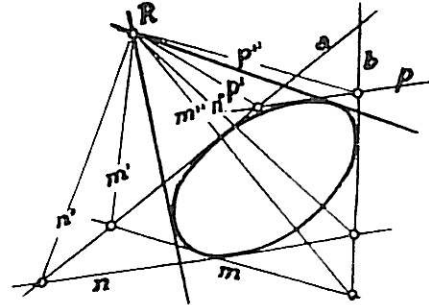
5. Determinación proyectiva de las intersecciones de una cónica con una recta. Tangentes por un punto.

Definida una cónica proyectiva mediante dos haces proyectivos, para hallar sus intersecciones con una



recta r bastará hallar los puntos dobles de la proyectividad entre las series que resultan de cortar aquellos haces por r .

Definida una cónica proyectiva mediante dos series proyectivas, para hallar las tangentes a ella desde un



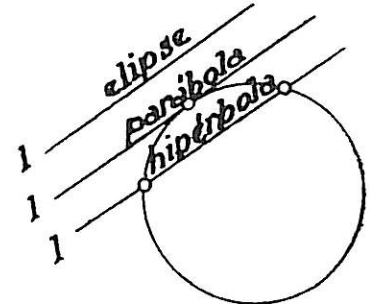
punto R bastará hallar los rayos dobles de la proyectividad entre los haces que resultan de proyectar aquellas series desde R .

La existencia, a lo sumo, de dos puntos dobles o de dos rayos dobles, prueba que toda cónica proyectiva no puede ser cortada por una recta en más de dos puntos, ni admite más de dos tangentes por un punto de su plano, lo que se desprende, por otra parte, de la homología con la circunferencia.

6. Clasificación de las cónicas.—Llamaremos a una cónica proyectiva *hipérbola*, *parábola* o *elipse* según que tenga dos puntos, uno o ninguno comunes con la recta impropia.

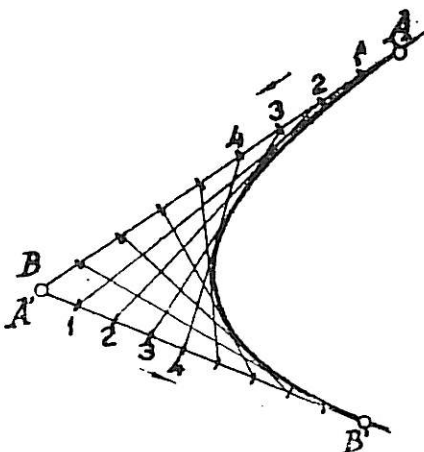
Si definimos la cónica por homología con una circunferencia, se reconocerá su carácter según los puntos comunes que tenga esta circunferencia con la recta límite l de su plano.

Si definimos la cónica por dos haces proyectivos, se reconocerá su carácter viendo si los haces tienen dos, uno o ningún par de rayos paralelos, es decir,



cutándolos por la recta impropia.

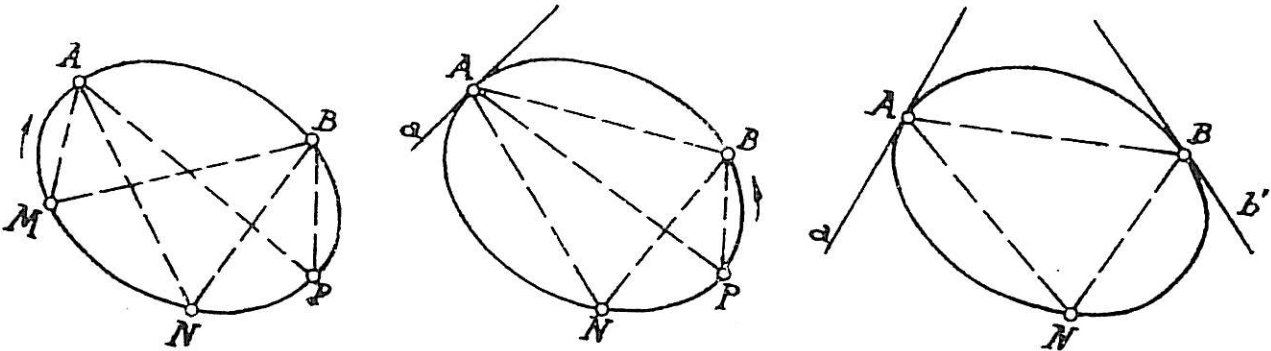
Si la cónica es *parábola*, es decir, tangente a la recta impropia, esta recta determinará puntos homólogos en las series proyectivas sobre dos tangentes cualesquiera y, por tanto, tales series serán *semejantes*; y recíprocamente, este carácter de las series permitirá reconocer que la cónica por ellas definida es *parábola*.



De aquí se desprende el trazado por tangentes (envolvente) de la parábola determinada por dos puntos A, B y las tangentes en ellos AB y $A'B'$. Basta dividir los segmentos homólogos AB y $A'B'$ de las series en el mismo número de partes iguales y unir los puntos de división ordenadamente.

LECCIÓN 32.—PROPIEDADES DE LAS CÓNICAS DERIVADAS DE SU GENERACIÓN PROYECTIVA

1. **Determinación de una cónica por cinco elementos.**—Todo conjunto de puntos o tangentes de una cónica proyectiva que permita determinar dos haces proyectivos generadores, servirá para determinar la cónica.



Así tenemos :

I. Cinco puntos A, B, M, N, P , no alineados tres a tres, determinan unívocamente una cónica proyectiva. De otro modo : Existe una cónica proyectiva, y sólo una, que pase por cinco puntos dados no alineados tres a tres. En efecto, definamos dos haces proyectivos de vértices A, B , tomando como ternas homólogas $A (MNP)$ y $B (MNP)$. Los puntos de intersección de los pares de rayos homólogos de estos haces definen una cónica proyectiva que cumple la condición del enunciado. Cualquier otra cónica que pasara por estos cinco puntos podría ser engendrada, en virtud del teorema directo, por estos mismos haces, luego coincide con la cónica hallada.

Análogamente : Una cónica proyectiva queda determinada por:

II. Cuatro puntos $ANPB$ y la tangente a en uno de ellos A . Basta tomar como haces generadores homólogos los definidos por las ternas $A (aNP) \bar{\cap} B (ANP)$.

III. Tres puntos A, B, N y las tangentes a, b' en dos de ellos. Basta tomar como haces generadores homólogos los definidos por las ternas $A (aNb) \bar{\cap} B (ANb')$.

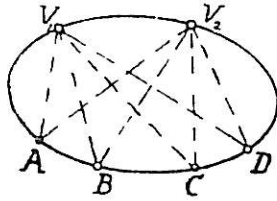
Correlativamente, podemos afirmar :

Una cónica proyectiva queda determinada unívocamente por:

- I' Cinco tangentes.
- II' Cuatro tangentes y el punto de contacto de una de ellas.
- III' Tres tangentes y los puntos de contacto de dos de ellas.

La construcción de los restantes puntos (tangentes) de la cónica puede efectuarse hallando elementos homólogos de los haces (series) definidores o transformándola por homología en circunferencia (como se indica en el § 3 de la lección anterior).

2. Proyectividad entre series puntuales de una cónica.—Elegidos cuatro puntos $ABCD$ en una cónica proyectiva, la razón doble del haz que los proyecta desde otro punto V , es la misma cualquiera que sea V , pues en virtud del § 2 de la lección anterior



$$V_1(ABCD) \bar{\wedge} V_2(ABCD)$$

El valor de esta razón doble se llamará *razón doble de la cuaterna curvilínea* $ABCD$. Partiendo de este concepto, podemos definir la proyectividad entre series puntuales de 2.º orden, es decir, series de puntos situados sobre cónicas, de modo análogo a lo efectuado en la lección 19, § 3 para las series circulares.

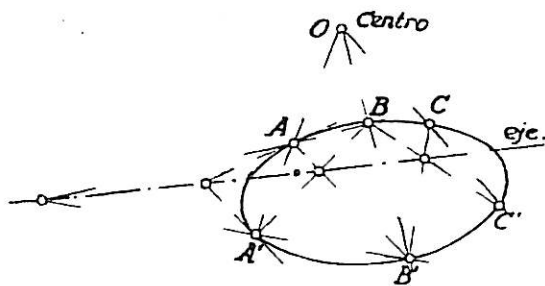
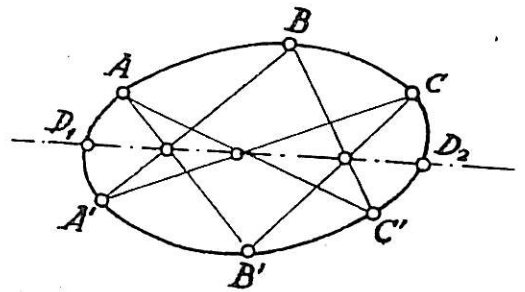
En particular diremos:

Dos series de puntos de una cónica se llamarán proyectivas cuando lo sean los haces que las proyectan desde un punto de ella.

A tales series corresponderán series proyectivas en toda circunferencia homológica, y como todas las construcciones efectuadas en las series circulares proyectivas superpuestas, para hallar sus elementos homólogos, dobles, etc., no manejan más que las operaciones de proyectar y cortar, serán invariantes en la homología y podemos aplicarlas, sin más, a las series de puntos sobre una cónica, transcribiendo los resultados obtenidos en la lección 19, § 4, a saber:

En dos series $ABC, \dots, A'B'C', \dots$, proyectivas superpuestas en una cónica, los pares de rectas AB' y $A'B$, AC' y $A'C$, BC' y $B'C$, ..., se cortan en una recta fija llamada eje de la proyectividad. Si esta recta corta a la cónica, lo hace en los puntos dobles de la proyectividad.

Si la proyectividad es involutiva, las rectas AA' , BB' , CC' que unen pares de puntos homólogos, se cortan en un punto fijo llamado *centro de la involución* (*). El eje, en tal caso, contiene los puntos armónicamente separados del centro respecto de los pares de puntos homólogos. Contiene asimismo los puntos de intersección de las tangentes a la cónica en dichos pares de puntos. El eje es, en una palabra, la *polar* del centro, como definiremos en la próxima lección.



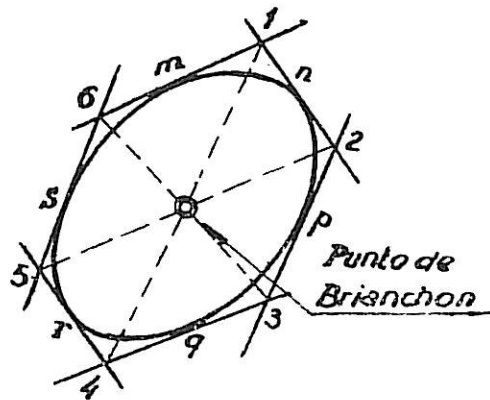
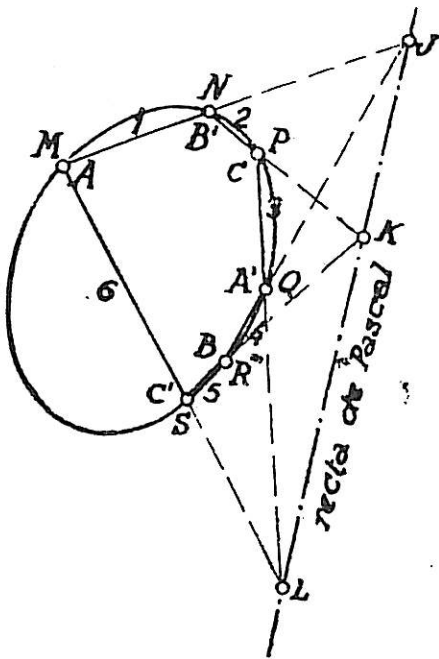
Dejamos a cargo del lector el enunciado de las definiciones y propiedades correlativas en el plano, referentes a la *proyectividad entre haces de tangentes a una misma cónica*, en particular la existencia del *centro proyectivo de dos haces proyectivos de tangentes* a una misma cónica.

(*) Impropiamente llamado punto de *Frégier* por algunos autores. Frégier sólo descubrió el centro de algunas involuciones particulares, como la determinada en la cónica por un haz rectangular con vértice en ella

3. Teoremas de Pascal y de Brianchon.—La existencia del eje proyectivo de dos series puntuales y de su correlativo el centro proyectivo de dos haces tangenciales es propiedad respectivamente equivalente a los siguientes teoremas :

TEOREMA DE PASCAL.—Si un hexágono $MNPQRS$ se halla inscrito en una cónica proyectiva, los pares de lados opuestos MN y QR , NP y RS , PQ y SM se cortan en tres puntos alineados (en la recta llamada de Pascal).

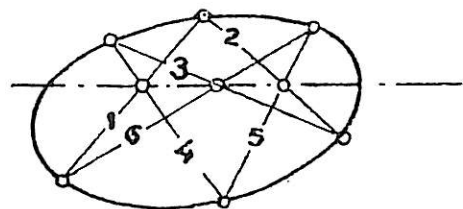
TEOREMA DE BRIANCHON.—Si un hexágono $mnpqrs$ se halla circunscrito a una cónica proyectiva, las rectas que unen pares de vértices opuestos mn y qr , np y rs , pq y sm concurren en un punto (punto de Brianchon).



Basta, por ejemplo, para el teorema de Pascal, variar la nomenclatura de los vértices designándolos así $\left\{ \begin{matrix} MNP, QRS \\ AB'C, A'BC' \end{matrix} \right\}$ y aplicar el teorema del eje proyectivo a las series proyectivas definidas por $ABC \bar{\cap} A'B'C'$; el eje proyectivo es la recta de Pascal. Análogamente, el punto de Brianchon es el centro proyectivo de $mnp \bar{\cap} qns$.

Numerados correlativamente los lados (vértices) del hexágono, son opuestos 1 y 4, 2 y 5, 3 y 6. No es preceptivo que los hexágonos sean convexos (v. fig.).

APLICACIÓN.—Dados cinco puntos $MNPQR$ de una cónica y una recta arbitraria MS por uno de ellos M , podemos hacer aplicación del teorema de Pascal para hallar la intersección S_2 de esta recta con la cónica. En efecto, la recta de Pascal queda determinada por las intersecciones de MS y PQ , MN y QR , y basta hallar su intersección K con

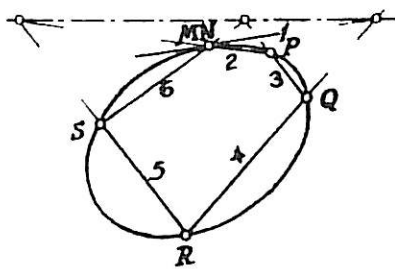


...

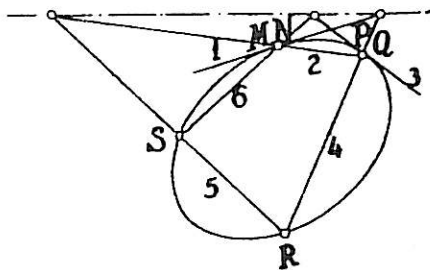
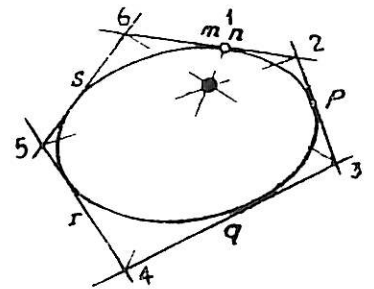
NP y unir K con R hasta cortar la recta dada en S . Por ello este teorema tiene aplicación para hallar nuevos puntos de una cónica definida por cinco de ellos.

Análogamente se utiliza el de Brianchon cuando se define la cónica por cinco tangentes.

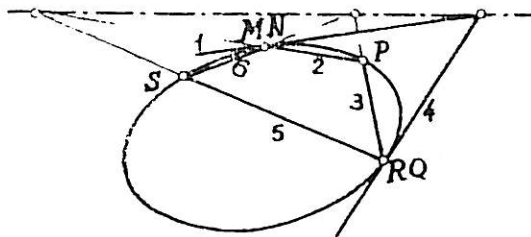
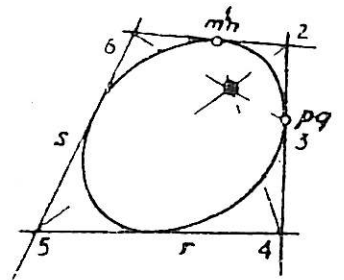
4. Generalizaciones de los teoremas anteriores.— Cuando dos vértices consecutivos, MN del hexágono de Pascal (o dos lados consecutivos mn del de Brianchon) se confunden en uno M (m), los teoremas subsisten, reemplazando la recta MN por la tangente t en M (y el punto mn por el de contacto T de m). Así resultan las propiedades que expresan gráficamente las figuras y que el lector traducirá fácilmente al lenguaje vulgar.



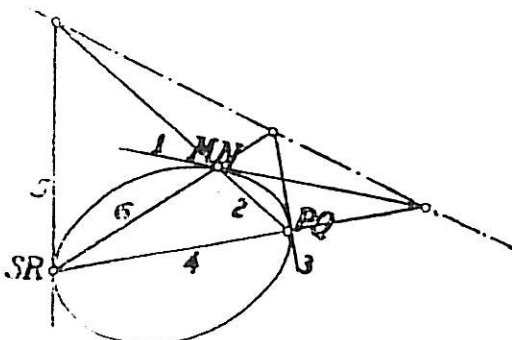
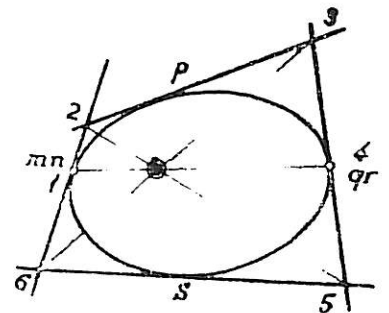
Coinciden un par de puntos MN tangentes mn



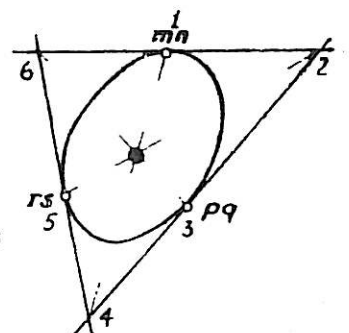
Y análogamente si coinciden dos pares de puntos consecutivos MN, PQ tangentes consecutivos mn, pq



Id. id. dos pares no consecutivos MN, QR mn, qr



Coinciden tres pares de puntos MN, PQ, RS tangentes mn, pq, rs



5. Aplicación al trazado de tangentes y determinación de puntos de contacto.—Las primeras figuras del párrafo anterior permiten:

Dados cinco puntos MPQRS de una cónica, hallar las tangentes en ellos.

Así, por ejemplo, para hallar la tangente en M basta hallar la recta de Pascal correspondiente al hexágono $MN (\equiv M) PQRS$, uniendo las intersecciones MS y PQ , MP y RS . La tangente en M se obtendrá uniendo M con el punto en que la recta de Pascal corta a QR . Y análogamente para las demás.

Dadas cinco tangentes mpqrs a una cónica, hallar sus puntos de contacto.

Así, por ejemplo, para hallar el punto de contacto de m basta hallar el punto de Brianchon correspondiente al hexágono $mn (\equiv m) pqrs$ por intersección de las rectas que unen ms y pq , mp y rs . El punto de contacto de m se obtendrá hallando la intersección de m con la recta que une el punto de Brianchon con qr .

De la solución de estos problemas resulta:

Definida una cónica mediante puntos y tangentes incidentes en cualquiera de las formas indicadas en el párrafo 1.º, es posible hallar siempre un punto y su tangente mediante una aplicación del teorema de Pascal o de Brianchon, lo que permite aplicar cómodamente la construcción dada en el § 3 de la lección anterior para determinar una circunferencia homológica de la cónica.

6 Figura homográfica de una cónica.—Dos haces proyectivos que engendran una cónica se transforman, en toda homografía, en otros dos haces también proyectivos entre sí. Por tanto:

La figura homográfica de una cónica es también cónica. En particular: La figura homológica de una cónica es también cónica.

7. Figura correlativa de una cónica.—Dos haces proyectivos no perspectivas se transforman mediante una correlación en dos series proyectivas no perspectivas. A la cónica lugar de los puntos de intersección de los rayos homólogos de aquéllos corresponde la cónica envolvente de las rectas que unen los puntos homólogos de éstas. Por tanto:

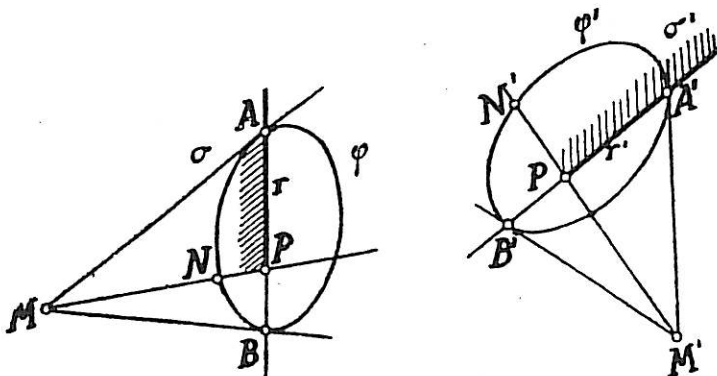
La figura correlativa de una cónica es también cónica (envolvente).

Esta propiedad nos permite (v. lección siguiente) averiguar cuál es la transformada de una cónica por polaridad.

8. Homografías en las que se corresponden dos cónicas dadas (*).—*Dadas dos cónicas φ y φ' es posible definir una homografía en la que sean homólogos: 1.º Las cónicas φ y φ' . 2.º Dos puntos P y P' interiores a ellas. 3.º Dos semirrectas r , r' con orígenes en P y P' ; y 4.º Dos semiplanos σ y σ' , limitados por las rectas de r y r' .*

(*) Este párrafo y el siguiente sólo van a ser utilizados en el Apéndice «Sobre indemostrabilidad del postulado de Euclides».

En efecto, estos datos permiten establecer sin ambigüedad la correspondencia entre cuatro puntos $ABMN$ del plano de φ (tres a tres no alineados) y sus homólogos $A'B'M'N'$ del plano de φ' , definidos del siguiente modo: A es la intersección $r\varphi$; B la intersección de la semirrecta opuesta; M es la intersección de las tangentes en A y B ; N es la intersección de la recta MP con φ contenida en el semiplano σ ; sus homólogos acentuados se definen de igual manera.



asimismo homólogas las cónicas φ (definida por los tres puntos ABN y las tangentes en dos de ellos AM y BM) y φ' (definida por los elementos homólogos).

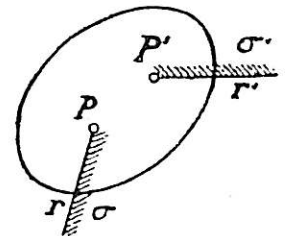
Esta homografía es única en virtud de lección 21, § 12.

9. Homografías con cónica doble.—La cónica homográfica de una dada, puede ser la misma cónica. De otro modo: Existen homografías con cónicas dobles, sin serlo todos sus puntos (en cuyo caso se trataría de una identidad).

Ejemplo: En una homología involutiva son dobles todas las cónicas en que el centro y el eje son polo y polar.

Un giro en el plano es una homografía en la que son dobles todas las circunferencias trayectorias.

En virtud de lo dicho antes, podemos definir una homografía, y sólo una, en la que sea doble una cónica dada, haciendo corresponder dos puntos interiores PP' , dos semirrectas r, r' partiendo de ellos y dos semiplanos σ, σ' limitados por sus rectas.



EJERCICIOS

1. Hemos visto que el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos en dos haces directamente iguales es una circunferencia. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos en dos haces inversamente iguales?
2. Dígase cuál es la envolvente de las rectas que interceptan entre dos fijas r, s un segmento que se ve desde un punto fijo P no incidente con ellas bajo un ángulo constante. Caso en que r y s sean paralelas y el ángulo sea recto.
3. Lugar del ortocentro de un triángulo que tiene dos lados en dos rectas fijas y la recta del tercero pasa por un punto fijo del plano.
4. Dadas dos tangentes a una cónica con sus puntos de contacto, y además otro punto de ella, hallar las intersecciones de dicha cónica con una recta dada.
5. Enunciar y resolver el problema correlativo del anterior.
6. Resolver cada uno de los ejercicios 4 y 5 con los datos del otro.
7. Demostrar que la cónica envolvente de las rectas que unen pares de puntos homólogos de dos series proyectivas es elipse si los homólogos del punto común a ambas series están entre éste y los puntos límites, hipérbola en caso contrario y parábola cuando los referidos puntos límites son impropios.
8. Dadas tres tangentes a, b, c a una parábola, si por cada uno de los puntos de intersección de una de ellas a con las otras dos b, c , trazamos paralelas respectivamente a c y b , el punto de intersección de dichas paralelas pertenece a la cuerda que une los puntos de contacto de b y c . Demuéstrase aplicando el teorema de Brianchon generalizado (§ 4).
9. Envolvente de las rectas que unen los pies de las perpendiculares trazadas desde los puntos de una recta fija a otras dos también fijas. Caso en que las rectas sean incidentes.

LECCIÓN 33.—POLARIDAD RESPECTO DE UNA CÓNICA

1. Polaridad respecto de una circunferencia.—Vamos a resumir las propiedades establecidas en el Tomo I, lección 27, empleando sólo conceptos proyectivos. Recordemos que :

I. Dada una circunferencia y un punto cualquiera P no situado en ella, los puntos J, K, L, \dots armónicamente separados de P respecto de los AA', BB', CC', \dots de intersección de la circunferencia con las secantes que pasan por P , están en una recta p llamada *polar* de P . El punto P se llama *polo* de p .

II. Haciendo corresponder a cada punto no situado en la circunferencia, su recta polar y a cada recta su polo, y llamando asimismo polo y polar recíprocos a todo punto de la circunferencia y su tangente en él, queda establecida una correspondencia biunívoca entre puntos y rectas del plano de la circunferencia llamada *polaridad* o *sistema polar* respecto de la circunferencia y que tiene la siguiente propiedad fundamental :

III. **POLARIDAD RECÍPROCA.**—Si un punto Q está en la recta p polar de P , este punto P está asimismo en la recta q polar de Q . Los puntos P y Q se llaman *conjugados*, sus polares p y q se llaman también *conjugadas*.

Todo punto de la circunferencia es, pues, conjugado con todos los de su tangente, y en particular es *conjugado de sí mismo*. Toda tangente a la circunferencia es conjugada de toda recta que pase por el punto de contacto, y en particular es conjugada de sí misma.

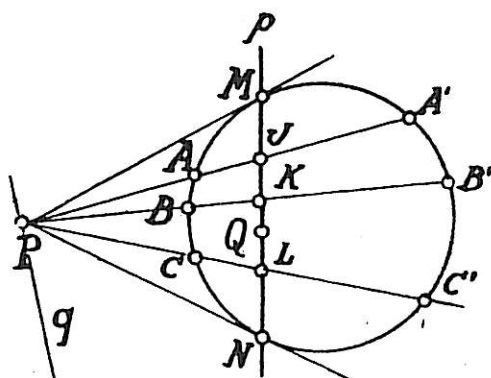
La propiedad enunciada equivale a las siguientes :

Las polares de todos los puntos Q de una recta p pasan por el polo P de esta recta.

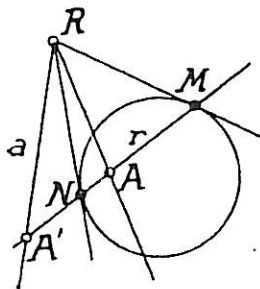
Los polos de todas las rectas que pasan por un punto P están sobre la polar p de este punto. En particular la polar de un punto P exterior pasa por los puntos de contacto M, N de las tangentes m, n trazadas desde este punto.

Esta correspondencia es, pues, una correlación (v. lec. 23, § 1) y aplicándole el § 7 de la lección anterior podemos enunciar : *La figura polar de una cónica respecto de una circunferencia es también cónica* (considerada como envolvente).

Dos puntos conjugados P, Q respecto de una circunferencia (ninguno de los cuales pertenezca a ella) y el polo R de la recta que los une son vértices de un triángulo PQR , llamado *autopolar* porque cada uno de sus lados es polar del vértice opuesto.



IV. Toda recta r no tangente a la circunferencia es base de una *involución* de puntos conjugados respecto de ella. Para obtener el homólogo de cada punto A de esta involución, basta hallar la intersección A' de su polar a con r .



Los puntos dobles de esta involución, cuando existen, son los de intersección de la recta con la circunferencia.

Todo punto R no perteneciente a la circunferencia es vértice de una involución de rectas conjugadas cuyos rayos dobles, cuando existen, son las tangentes a la circunferencia desde R . Basta, en efecto, proyectar desde este punto R la

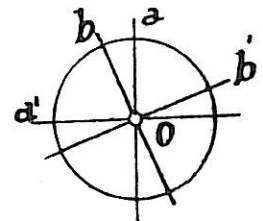
involución de puntos conjugados situada sobre su polar r .

V. La polar del centro de la circunferencia es la recta del infinito del plano.

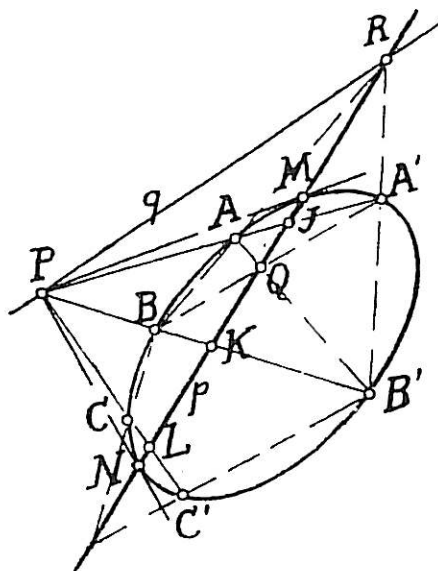
El polo de cada diámetro es el punto impropio definido por la dirección perpendicular.

La involución de rectas conjugadas con vértice en el centro es la involución rectangular.

La involución de puntos conjugados respecto de la circunferencia en la recta impropia es la involución cíclica.



2. Polaridad respecto de una cónica.—Obsérvese que todos los conceptos «estar en», «pasar por», «secante», «tangente», «separación armónica», «involución», utilizados en el párrafo anterior son invariantes en toda homología. Por consiguiente, podemos aplicar las propiedades I a IV a toda transformada homológica de la circunferencia y decir:



I. Dada una cónica proyectiva y un punto cualquiera P de su plano, no situado en ella, los puntos J, K, L, \dots armónicamente separados de P respecto de los AA', BB', CC', \dots de intersección de la cónica con las secantes que pasan por P están en una recta p llamada polar de P . El punto P se llama polo de p .

La construcción más sencilla de la polar de un punto es la que se deriva de la propiedad del cuadrivértice. Trazadas dos secantes AA', BB' , por P , éste es un punto diagonal del cuadrivértice $AA'BB'$; los otros dos puntos diagonales QR determinan la polar de P , por ser armónicas las cuaternas $PAJA'$ y $PBKB'$.

Llamaremos igualmente *polo* y *polar* recíprocos a todo punto de la cónica y a su tangente en él.

II. Llamaremos *polaridad* o *sistema polar* respecto de la cónica, a la co

respondencia obtenida haciendo corresponder a cada punto del plano de la cónica su polar y a cada recta su polo.

Esta correspondencia tiene la siguiente propiedad esencial:

III. POLARIDAD RECÍPROCA.—Si un punto Q está en la polar de otro P , P está asimismo en la polar de Q . Los puntos P y Q se llaman conjugados y sus polares p y q también se llaman conjugadas.

La propiedad puede enunciarse así:

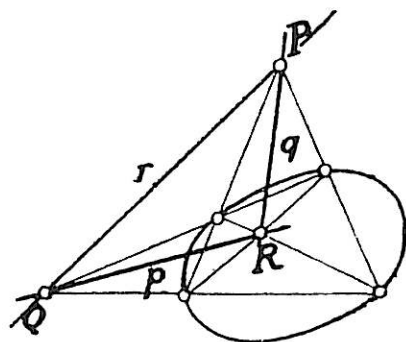
Si un punto Q está sobre una recta p , su polar q pasa por el polo P de esta recta.

En particular, la polar de un punto exterior pasa por los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde este punto.

Esta correspondencia es, pues, una correlación (v. lec. 23, §1) y aplicándole el § 7 de la lección anterior podemos enunciar:

La figura polar de una cónica respecto de otra es también cónica.

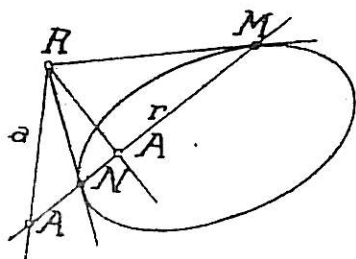
Todo punto de la cónica es conjugado con todos los de la tangente en él, y en particular es conjugado de sí mismo. Toda tangente es conjugada de sí misma y de todas las rectas que pasan por el punto de contacto.



III' TRIÁNGULOS AUTOPOLARES.—Dos puntos conjugados P y Q (ninguno de los cuales pertenezca a la cónica) y el polo R de la recta que los une son vértices de un triángulo llamado *autopolar*, porque cada uno de sus vértices es polo del lado opuesto (polaridad recíproca). En particular, de la anterior construcción de la polar se desprende: Los tres puntos diagonales de un cuadrivértice inscrito en una cónica son vértices de un triángulo autopolar respecto de ella.

3. Involución de puntos conjugados y de rectas conjugadas respecto de una cónica.—De la propiedad IV de la circunferencia (§ 1) se desprende asimismo:

IV. Toda recta r no tangente a la cónica es base de una involución de puntos conjugados respecto de ella.



Para obtener el conjugado A' de cada punto A en esta involución, basta hallar la intersección de su polar a con r . Los puntos dobles de esta involución, cuando existen, son los M, N de intersección de la cónica con r .

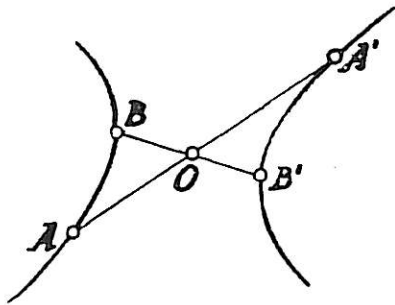
En particular en la recta impropia, supuesta no tangente (elipse e hipérbola), existe una involución de direcciones conjugadas, cuyos elementos dobles son las direcciones de los puntos impropios de la cónica cuando existen (hipérbola).

Todo punto R no situado en la cónica es vértice de una involución de rectas

conjugadas respecto de la cónica. Se obtiene proyectando desde R la involución de puntos conjugados situada sobre la polar.

Las rectas dobles de esta involución son las tangentes a la cónica trazadas por R (si existen).

4. Centro, diámetros, asíntotas y ejes de una cónica como elementos del sistema polar.—Llamaremos centro O de una elipse o de una hipérbola proyectivas al polo de la recta impropia.



Las cuerdas AA' , BB' , ... que pasan por el centro O son, pues, bisecadas por él, puesto que, por definición de polar, O está armónicamente separado por AA' , BB' , ... del punto impropio de cada secante.

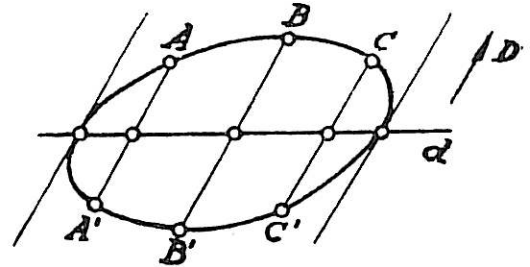
La polar de un punto impropio D (no perteneciente a la cónica) se suele llamar diámetro conjugado d de la dirección D (*).

El diámetro conjugado de una dirección pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas a dicha dirección.

Pues esos son los puntos armónicamente separados de D por los extremos de las cuerdas AA' , BB' , ... paralelas a ella. Como D está en la recta impropia, su polar pasará por el polo de ésta, es decir, por el centro (polaridad recíproca).

Todo diámetro pasa por el centro.

Las tangentes en los extremos de un diámetro d tienen la dirección conjugada, puesto que pasan por su polo D .

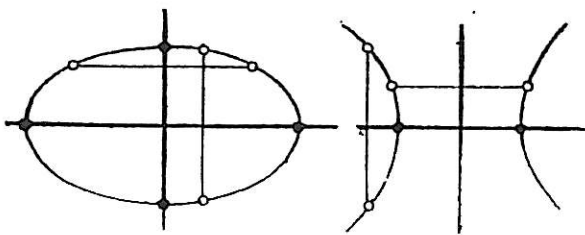


Aplicando la propiedad IV (§ 3) al centro, resulta:

El centro es vértice de una involución de diámetros conjugados. Los rayos dobles de esta involución, si los hay, son las tangentes en los puntos impropios de la cónica, puesto que proyectan desde el centro (polo) las intersecciones de la cónica con la recta (polar) impropia (III). Son las llamadas asíntotas.

Los rayos rectangulares de dicha involución se llaman ejes de la elipse o

de la hipérbola proyectiva y son, por tanto, ejes de simetría de la curva por bisecar cada uno las cuerdas perpendiculares al mismo. Sus intersecciones con la cónica se llamarán vértices.



Puesto que todo haz en involución tiene siempre dos rayos rectangulares (lección 20, § 3), toda cónica con centro tiene dos ejes, a menos que sea cir-

confuencia, en cuyo caso todos los diámetros son ejes, por ser rectangular la involución que forman.

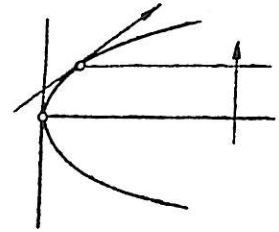
(*) Transcribimos esta denominación habitual, aunque imperfecta. Más propio sería llamarle diámetro polar de la dirección D .

De lo dicho antes se desprende que la tangente en todo vértice es perpendicular al eje que pasa por él, por tener la dirección conjugada.

Cuando se trata de una parábola proyectiva subsiste la definición de *diámetro* como polar de un punto impropio, pero el polo de la recta impropia es su punto común con la parábola y ya no se llama centro. Es un punto impropio que marca la dirección de todos los *diámetros*, pues por él pasarán las polares de todos los puntos de la recta impropia. Resulta así:

Todos los *diámetros* de una parábola proyectiva son paralelos, siendo la dirección conjugada a cada uno de ellos la de la *tangente* en el punto propio de intersección del diámetro con la parábola.

Existe un solo *diámetro normal* a su *dirección conjugada*, que se llama *eje* de la parábola y lo es de simetría por bisecar las cuerdas perpendiculares a él. Para hallarlo basta trazar la tangente a la parábola, de dirección normal a sus diámetros. Por el punto de tangencia *A*, llamado *vértice*, pasará el eje buscado.



5. Determinación de los centros, ejes y asíntotas de la cónica homológica de una circunferencia.—Supongamos definida una cónica proyectiva como homológica de una circunferencia γ dada, en una cierta homología; y

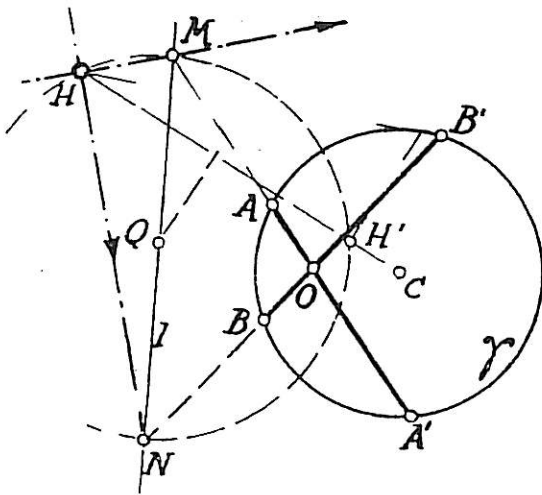
tratemos de construir en la figura de la circunferencia los homólogos o imágenes del centro, ejes y asíntotas de la cónica.

La imagen del centro será el polo O de la recta límite l (homóloga de la impropia como perteneciente a la figura plana de la cónica).

Si la tal recta límite l es exterior a la circunferencia, en ella existe una involución i de puntos conjugados respecto de la circunferencia, que se proyectará desde el centro de homología H según la involución proyectante de las direcciones conjugadas respecto de la

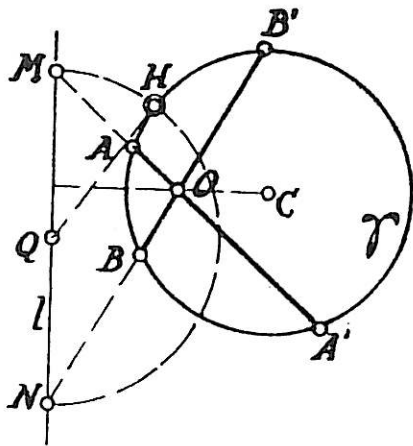
cónica, y para hallar las direcciones de los ejes bastará hallar los rayos rectangulares de dicha involución, lo que puede hacerse como se indicó en § 3, lección 20, previa construcción de dos pares de elementos conjugados. Se abrevia la construcción del siguiente modo:

Puesto que los puntos conjugados de i son extremos de diámetros de circunferencias ortogonales a γ (Tomo I, lec. 27, § 1), el problema equivale a hallar una circunferencia de centro en l que pase por H y sea ortogonal a γ . Uniendo H con el centro C de γ , sea H' el punto armónicamente separado de H respecto de γ en la recta HC . La circunferencia que tiene su centro I y pasa por H y H' es la pedida (Tomo I, lec. 25, § 3). Sus intersecciones M y N con l , unidas con H dan las direcciones HM y HN de los ejes; OM y ON son



las imágenes de dichos ejes; sus intersecciones $AA'BB'$ con la circunferencia son las imágenes de los vértices; sus homólogos en la homología darán los cuatro vértices de la elipse homóloga de la circunferencia.

En la figura no se han hallado tales homólogos, ni se ha dado siquiera el eje de homología (innecesario hasta aquí), por ser las construcciones que faltan puro ejercicio de aplicación de la teoría de la homología. El lector las completará fácilmente suponiendo dado un eje de homología (paralelo a l).

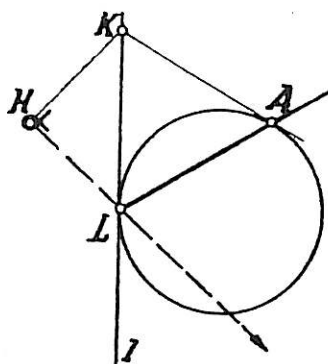
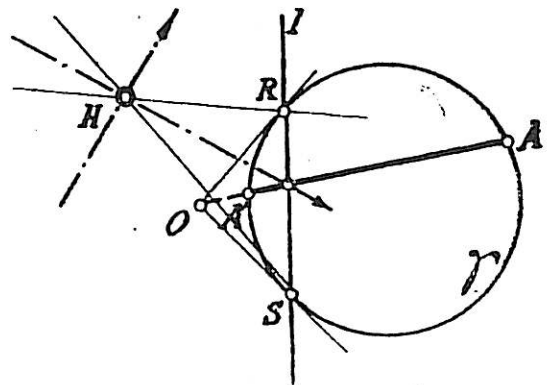


Si el centro de homología H está sobre la circunferencia (como ocurre en las homologías definidas en el § 3 de la lec. 31), la construcción se simplifica notablemente, pues la circunferencia ortogonal por H tiene su centro en la tangente por H . La intersección de esta tangente con l da el centro Q de ella.

La figura indica la construcción simplificada, con las imágenes AA' y BB' de los ejes.

En el caso de la hipérbola las direcciones de las asíntotas son las que proyectan desde el centro de homología H los puntos R, S de intersección de la circunferencia con la recta límite.

Sus bisectrices darán las direcciones de los ejes. Se tiene, pues, más fácilmente que en el caso de la elipse, la imagen O del centro, las imágenes AA' de los vértices y las direcciones de los ejes, así como de las asíntotas.

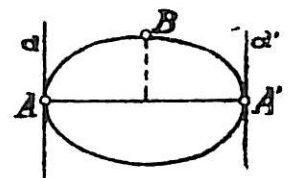


En el caso parábola, la dirección del eje es la recta HL que une el centro de homología H con el punto L común a la recta límite y a la circunferencia. El punto impropio correspondiente a la dirección perpendicular tiene su imagen en K (HK perpendicular a HL); la segunda tangente desde K da la imagen de la tangente en el vértice, y la imagen de éste es el punto de contacto A . La recta LA es, finalmente, la imagen del eje.

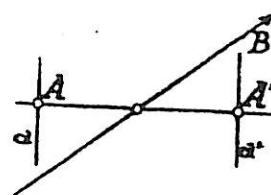
6. Identidad entre las cónicas definidas métrica y proyectivamente.—

Los teoremas y construcciones anteriores permiten hallar:

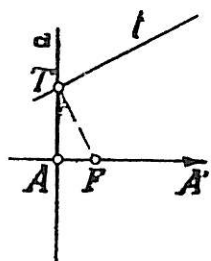
1. En una elipse proyectiva, tres vértices $AA'B$ y las tangentes aa' en dos de ellos. Ahora bien, hay una sola cónica métrica que tiene estos mismos elementos, la cual es también cónica proyectiva en virtud de lo dicho en la lección 31, § 1, y existe una sola cónica proyectiva que pasa por tres puntos $AA'B$ dados y tiene en dos de ellos AA' tangentes dadas (lec. 32, § 1). Por tanto, ambas cónicas coinciden.



II. En una hipérbola proyectiva podemos hallar los dos vértices AA' , las tangentes en ellos a, a' y una asíntota, es decir, un punto impropio B . Evidentemente, no hay más que una cónica métrica con estos elementos, y razonando como en el párrafo anterior coincide con la cónica proyectiva en cuestión.



III. En una parábola podemos hallar el vértice A , la tangente en él a y otra tangente cualquiera t , con lo que se conocen tres tangentes que son la recta impropia, a , y t y los puntos de contacto de las dos primeras, que son A' y A . Existe una parábola métrica con estos elementos, puesto que su eje es la perpendicular a a por A , y el foco viene unívocamente determinado por ser la intersección del eje con la normal a t por su punto T de intersección con a (lec. 29, § 6). Pero esta parábola es cónica proyectiva; y como sólo hay una cónica proyectiva dada por tres tangentes y dos puntos de contacto coincide con dicha parábola.

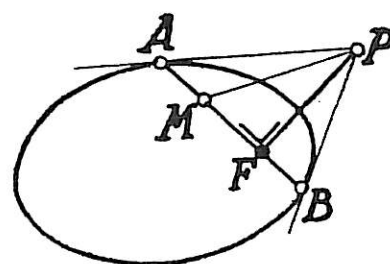


Vimos en la lección 31, § 1, que toda cónica métrica es cónica proyectiva; hemos visto ahora que, recíprocamente, toda cónica proyectiva es cónica métrica.

En resumen, TODAS LAS DEFINICIONES QUE HEMOS DADO PARA LAS CÓNICAS, TANTO MÉTRICAS COMO PROYECTIVAS, SON EQUIVALENTES, con lo que resulta ya innecesaria toda distinción (*).

7. Focos y directrices como elementos del sistema polar.—Los focos son vértices de una involución de rectas conjugadas rectangular.

En efecto, vimos en el § 3 de la lección 29 que las tangentes en los extremos A, B de toda cuerda focal se cortan en un punto P (polo) situado en la perpendicular FP por el foco a la cuerda, de donde resulta que las rectas AB y FP son conjugadas y perpendiculares.

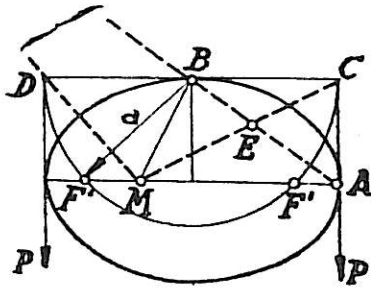


Se demuestra que sólo los focos cumplen esta condición y, por tanto, que la propiedad enunciada sirve para definirlos.

En efecto, para todos los demás puntos de la recta de la cuerda focal considerada (fig. anterior), la involución no es rectangular, puesto que la recta conjugada de MF que pasa por M , es MP , no perpendicular.

Para todo punto M no situado en el eje focal, podemos repetir el razonamiento considerando una cuerda focal MF que pase por él.

(*) La demostración de la equivalencia entre las definiciones métricas y proyectivas (que resulta fácil de establecer con los recursos superiores de la Geometría analítica) no es tan cómoda con simples recursos elementales y, quizás por ello, suele omitirse en muchos libros que tratan las cónicas desde ambos puntos de vista. Ello origina una confusión y falta de rigor en las demostraciones, que no escapa incluso a los escolares de cierta profundidad crítica. Después de distintos ensayos nos ha parecido este camino el más sencillo a seguir con los conocimientos hasta aquí desarrollados.

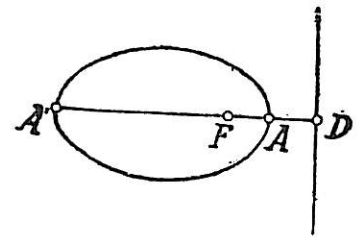


Para los puntos del eje focal, el razonamiento no es válido por ser P impropio y MP precisamente perpendicular. Pero es fácil probar que sólo pueden haber en este eje dos puntos que cumplan la condición exigida. Por ejemplo, para la elipse, uniendo M con los vértices C, D del rectángulo circunscrito (fig.), obtenemos MD y MC armónicamente separados por MB y MA (B punto medio de DC), lo que prueba que MD pasa por el polo de MC (situado en BA y armónicamente separado de E por A y B), es decir, MD y MC son conjugadas. Los únicos puntos que cumplen la condición $DMC = \text{recto}$ son, pues, los de intersección de la circunferencia de diámetro DC con el eje focal, y éstos son precisamente los dos focos.

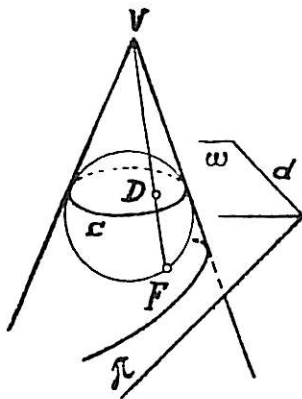
Para la hipérbola y la parábola se demuestra de modo parecido.

La directriz correspondiente a un foco es su polar.

En efecto, pasa por el polo del eje focal (dirección perpendicular) y por el punto D armónicamente separado de F por los extremos A y A' del eje focal, toda vez que las razones de distancias $AF:AD, A'F:A'D$ son iguales en valor absoluto (segunda definición métrica de cónica, lec. 27, § 4).



Esta caracterización proyectiva de los focos y directrices se desprende también de la sección del cono de revolución y de la consideración de la polaridad respecto de la esfera inscrita tangente al plano de la cónica sección. Recordemos que se llamó *foco* al punto F de tangencia, y *directriz* correspondiente, a la sección del plano π de la cónica con el ω que contiene la circunferencia c de contacto de la esfera con el cono.



Pues bien, en la polaridad respecto de la esfera, la recta d tiene como polar la que une los polos V y F de los planos ω y π .

La recta VF corta, pues, al plano ω en D , polo de d respecto de c , y se proyecta sobre π en F , polo de d .

Además, las rectas que unen F con puntos conjugados de d son conjugadas respecto de la cónica y al mismo tiempo tangentes polares respecto de la esfera y, por tanto, *ortogonales* entre sí.

EJERCICIOS

1. Demostrar que toda serie de puntos es proyectiva con el haz de sus polares.
2. Toda serie de puntos r es proyectiva con la serie de sus puntos conjugados situados en otra recta s no conjugada de la base r de la serie.
3. Si las rectas r y s del teorema anterior concurren en un punto P de la cónica, sin ser tangentes a ella, las series en cuestión son perspectivas. El centro perspectivo es el punto de concurso de las tangentes en los puntos de intersección de r y s con la cónica, distintos de P .
4. Si ABC es un triángulo inscrito en una cónica, toda recta conjugada de uno de sus lados corta a los otros dos en puntos conjugados respecto de la cónica (Seydewitz-Staudt). Aplíquese el teorema anterior.
5. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo circunscrito a una elipse son diámetros conjugados de la misma.
6. Demostrar proyectivamente que las cuerdas que unen puntos de una elipse o de una hipérbola con los extremos de un diámetro tienen direcciones conjugadas.

7. Demostrar que el lugar de los puntos medios de las cuerdas focales de una elipse es una elipse homotética.

8. Sea M un punto de una elipse o hipérbola, sea P su proyección ortogonal sobre uno de los ejes e , sea p la polar de P . Las rectas MA MA' que unen M con los extremos del eje e cortan a p en dos puntos simétricos respecto de dicho eje.

9. Dado un punto P cualquiera de la parábola consideremos la tangente en él y la perpendicular al eje por P , y formemos un triángulo cortando estas rectas por una paralela cualquiera al eje (que no pase por P). Demostrar que el vértice de la parábola está en la mediana que pasa por P .

10. Deducir de la propiedad anterior la propiedad de la subtangente.

11. Deducir de la misma propiedad la construcción del vértice de una parábola de la que se conocen dos puntos y las tangentes en ellos.

12. Demostrar que la cuaterna de rayos que proyecta desde un punto de una cónica los extremos de un eje y los de una cuerda perpendicular es armónica.

13. Demostrar que la suma de los recíprocos de las distancias de una recta p a los pares de puntos de una cónica alineados con su polo P es constante (igual al doble del recíproco de la distancia pP).

14. Demostrar que todo par de rectas conjugadas rectangulares cortan al eje focal en dos puntos armónicamente separados por los focos.

15. Si M y M' son las intersecciones de una tangente cualquiera con las tangentes en los extremos AA' del eje focal de una elipse o hipérbola, la circunferencia de diámetro MM' pasa por los focos.

16. Demostrar que las rectas OM y OM' que proyectan M y M' (ejercicio anterior) desde el centro son conjugadas.

17. Hallar el lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de M' sobre OM .

18. Las rectas que unen el pie de una directriz con los extremos de una cuerda focal trazada por el foco correspondiente son simétricas respecto del eje focal.

19. El segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y una directriz se ve desde el foco correspondiente bajo un ángulo recto.

20. Sea M y M' los puntos de intersección de una tangente cualquiera a una elipse (hipérbola), con las tangentes en los extremos del eje focal A y A' . Estudiar el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas AM' y $A'M$.

21. Lugar geométrico de los puntos de intersección de las perpendiculares por A y A' (vértices del eje focal de una elipse o hipérbola) a las rectas AM y $A'M$ que unen A y A' con un punto cualquiera M de la curva.

22. Lugar geométrico de los puntos de intersección de las perpendiculares trazadas desde los focos de una elipse o hipérbola a dos diámetros conjugados.

23. Demostrar que el producto de una polaridad respecto de una circunferencia por la simetría respecto del centro constituye un sistema polar que carece de elementos dobles.

24. Demostrar que toda sección plana de un cono de revolución se proyecta sobre un plano perpendicular al eje según una cónica que tiene un foco en dicho eje.

25. Un plano corta a una esfera según una circunferencia y a un cono circunscrito a la misma según una cónica. Demostrar que la recta en que se cortan el plano en cuestión y el que contiene la circunferencia de contacto del cono tiene el mismo polo respecto de la cónica y de la circunferencia sección. Probar que es base de una involución de puntos conjugados común asimismo a ambas secciones.

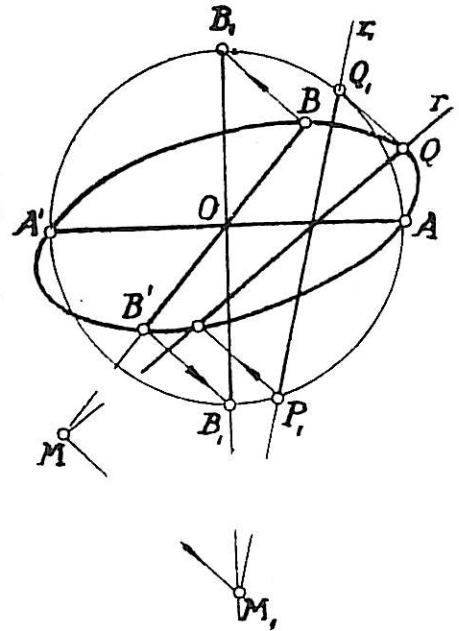
26. La figura polar recíproca de una circunferencia C respecto de otra γ es una cónica que tiene por foco F el centro de γ y por directriz correspondiente la polar del centro O de C respecto de γ . La excentricidad es el cociente OF : radio de C .

27. Demostrar que todas las cónicas que tienen un mismo foco y una misma directriz cortan a una recta en pares de puntos conjugados en una misma involución. (Hállese una transformación por polares recíprocas respecto de una circunferencia que transforme el haz de cónicas en haz de circunferencias.)

LECCIÓN 34.—PROPIEDADES MÉTRICAS DEDUCIDAS DE LAS PROYECTIVAS

1. Transformaciones afines de una elipse en circunferencia.—Toda afinidad transforma una cónica en otra de la misma especie (elipse, hipérbola o parábola), por ser doble en la afinidad la recta impropia.

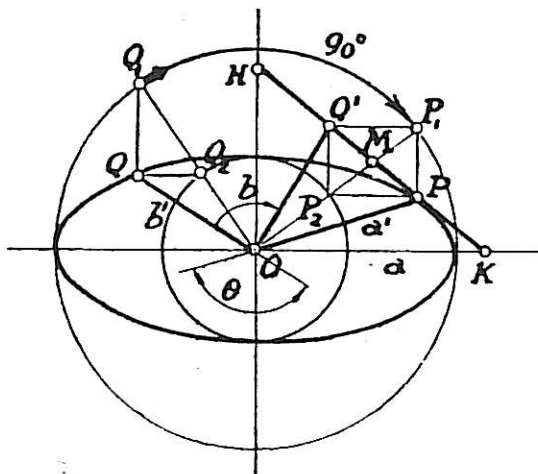
Sean dados dos diámetros conjugados AA' y BB' de una elipse, y transformémosla mediante la homología afín de eje AA' en la que B tenga por homólogo el punto B_1 situado en la mediatriz OB_1 de AA' y a distancia $OB_1 = OA$. Obtenemos así otra cónica de especie «elipse» con dos semidiámetros conjugados OA, OB_1 perpendiculares entre sí (semiejes) y además iguales; es decir, resulta una *circunferencia*.



Podemos, pues, realizar cómodamente construcciones en la elipse, efectuándolas en su transformada afín, la circunferencia. En la figura se han hallado, por ejemplo, las intersecciones de la recta r con la elipse, hallando su homóloga r_1 (M_1 homólogo de M) y transformando los puntos de intersección P_1Q_1 de r_1 con la circunferencia.

A todo par de diámetros ortogonales de la circunferencia corresponde un par de diámetros conjugados de la elipse. Los rayos rectangulares de la involución que estos constituyen darán los ejes. Pero es más sencillo, para determinarlos, aplicar la construcción que se indica en el párrafo siguiente.

2. Determinación de los ejes de una elipse dada por dos diámetros conjugados.—Aplicando la afinidad del párrafo anterior al eje focal de la elipse, se recae en la construcción por puntos expuesta en el § 8 de la lección 30 y en la interpretación de la elipse como proyección ortogonal de la circunferencia (lec. 30, § 6).



Sean H, K las intersecciones de la diagonal PQ' con estos ejes.

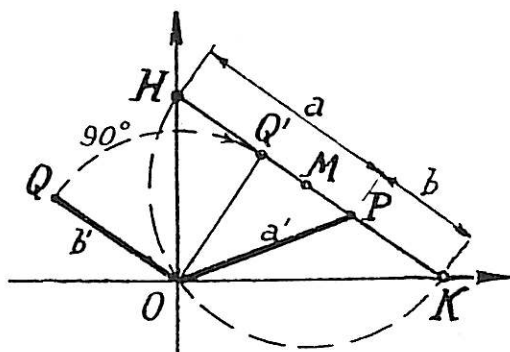
Consideremos dos puntos P, Q de la elipse, correspondientes a otros dos P_1, Q_1 de la circunferencia principal, situados en los extremos de radios perpendiculares. Los segmentos $OP = a'$ y $OQ = b'$ serán, pues, semidiámetros conjugados de la elipse. Si giramos el radio OQ_1 hasta coincidir con OP_1 arrastrando en el giro al triángulo Q_1QQ_2 , éste después del giro, completará con su igual P_1PP_2 un rectángulo P_1PP_2Q' de lados paralelos a los ejes.

De la simetría del rectángulo respecto de sus paralelas medias resulta

$$PH = OP_1 = a \quad PK = OP_2 = b$$

con lo que recaemos en la generación de la elipse por un punto P de una varilla de longitud fija $HK = a + b$ deslizándose entre dos ejes rectangulares.

Además la figura nos proporciona la reconstrucción de los ejes conocidos en magnitud y posición los semidiámetros conjugados OP y OQ . Girado, en efecto OQ de 90° alrededor de O hasta OQ' (en el sentido QOP), y hallado el punto medio M de PQ' , por ser $MH = MO = MK$ (simetrías citadas), la circunferencia de centro M y radio MO dará los puntos H y K en la recta QP' . Las direcciones de los ejes serán OK y OH y los semiejes respectivos son $PH = a$ y $PK = b$.



3. Teoremas de Apolonio en la elipse.—Esta construcción nos proporciona, además, una demostración del teorema de Apolonio que se expresa por la siguiente igualdad:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

En efecto, aplicando al triángulo OPQ' la propiedad de la suma de cuadrados de dos lados de un triángulo (Tomo I, lec. 22, § 7), se tiene

$$a'^2 + b'^2 = 2 \overline{MP}^2 + 2 \overline{MO}^2 = 2 \frac{(a-b)^2}{4} + 2 \frac{(a+b)^2}{4} = a^2 + b^2$$

Por otra parte, imaginando la elipse como proyección de la circunferencia principal (lec. 30, § 6), el paralelogramo construido sobre los dos semidiámetros conjugados $a'b'$ es proyección del cuadrado construido, en la circunferencia principal, sobre los dos radios homólogos perpendiculares. Pero el área de este cuadrado es constante al variar el par de diámetros considerado; luego también lo es el área del paralelogramo $a'b' \operatorname{sen} \theta$ (θ ángulo $a'b'$); y como para $a' = a$, $b' = b$ es $\theta = 90$, resulta

$$a' b' \operatorname{sen} \theta = ab$$

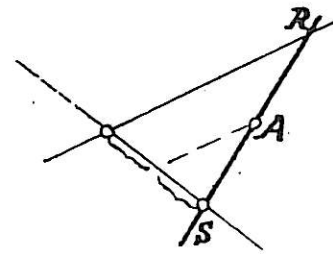
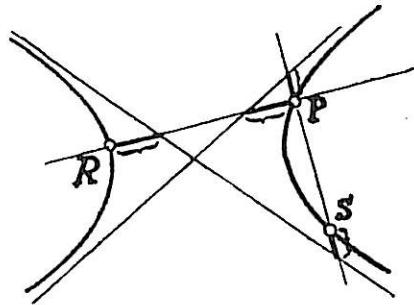
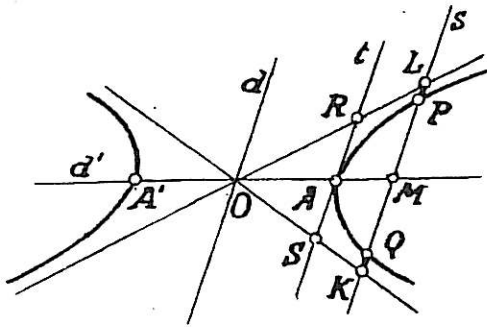
En resumen: *En toda elipse es constante la suma de los cuadrados de dos diámetros conjugados así como el área del paralelogramo construido sobre ellos.*

4. Diámetros conjugados y asíntotas de una hipérbola.—Puesto que

las asíntotas son rayos dobles de la involución de diámetros conjugados, separan armónicamente cada par de ellos. Trazada una secante cualquiera s y considerando el diámetro d paralelo a ella, la recta diametral d' conjugada, pasará por el punto medio M del segmento LK interceptado por s entre las asíntotas. Como también M es punto medio de la cuerda PQ , interceptada en la hipérbola (lección 33, § 5), resulta $LP=KQ$. Por tanto:

Los segmentos de una secante cualquiera comprendidos entre las asíntotas y la curva son iguales.

Si se dan, pues, las dos asíntotas y un punto P de una hipérbola, esta propiedad permite construir cuantos puntos de ella R, S, \dots se deseen (v. fig.).



El mismo razonamiento aplicado a la tangente t en un punto A conduce a la consecuencia siguiente:

El punto de contacto de una tangente cualquiera a una hipérbola biseca el segmento RS interceptado en ella por las asíntotas, lo que permite una sencilla construcción de la tangente en un punto de la curva cuando se conocen sus asíntotas (v. fig.).

5. Hipérbolas conjugadas.

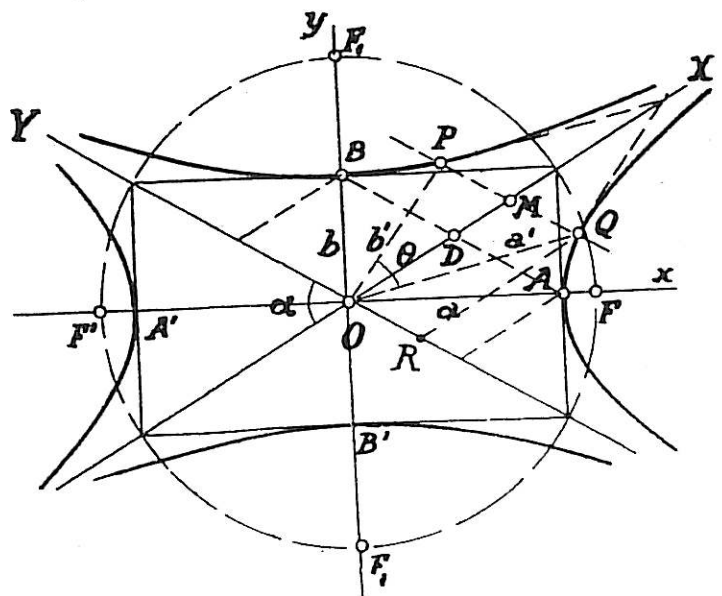
Llámanse *conjugadas* dos hipérbolas que tienen las mismas asíntotas y tales que el eje transverso BB' de la una es eje focal de la otra y viceversa.

Si una de ellas tiene por ecuación referida a sus ejes,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la ecuación de la otra referida a estos mismos ejes será

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



Ambas tienen la misma distancia focal $2c$ ($c^2 = a^2 + b^2$).

Al tener las mismas asíntotas, ambas tienen la misma involución de diámetros conjugados. Dos diámetros conjugados respecto de una hipérbola lo son también respecto de su conjugada.

Si respecto de las asíntotas comunes OX, OY (v. fig.) como ejes cartesianos de referencia, la ecuación de una de ellas es (lec. 30, § 10) $X \cdot Y = k$, la de la otra será $X \cdot Y = -k$. En efecto, los puntos A, B , situados en una paralela a OY , tienen la misma abscisa OD y ordenadas opuestas DB y DA . Lo mismo ocurrirá, pues, con los restantes pares de puntos P, Q de abscisa común OM , es decir:

Al cortar ambas hipérbolas por una paralela PQ a una asíntota, el punto M en que corta a la otra equidista de los puntos P, Q de intersección con las hipérbolas.

6. Teoremas de Apolonio en la hipérbola.—El resultado que acabamos de obtener indica que OP y OQ están armónicamente separados por las asíntotas, es decir, son rectas conjugadas respecto de ambas hipérbolas. Los segmentos $OQ = a', OP = b'$ se llaman asimismo *semidiámetros conjugados*, por consiguiente podemos enunciar:

El paralelogramo construido sobre dos semidiámetros conjugados tiene como diagonal por O una de las asíntotas. La otra asíntota es paralela a la segunda diagonal. Esto permite construir fácilmente las direcciones de las asíntotas y de los ejes de una hipérbola dada por dos diámetros conjugados. Las magnitudes de estos ejes se desprenden de las relaciones que siguen.

En el triángulo OPQ (Tomo I, lec. 26, § 7) se verifica

$$a'^2 - b'^2 = 4 \cdot \overline{OM} \cdot \overline{MP} \cos \alpha = 4 XY \cos \alpha = 4 k \cos \alpha \text{ (constante)}$$

y, por tanto, valdrá lo mismo para los semidiámetros conjugados a y b

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \tag{1}$$

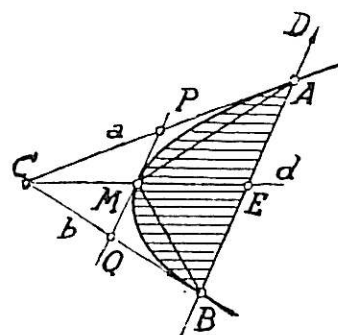
Por otra parte, siendo θ el ángulo $a'b'$, el área del triángulo OPQ vale $\frac{1}{2} a'b' \sin \theta$ constante por ser igual al área del paralelogramo $OMQR$ limitado por las asíntotas y las paralelas a ellas por Q (lección 30, § 10). Su valor coincide, pues, con el que resulta de aplicarlo a los ejes, es decir, $\frac{1}{2} ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2} ab$ y podemos escribir

$$a'b' \sin \theta = ab \tag{2}$$

Las relaciones [1] y [2] constituyen los *teoremas de Apolonio* en la hipérbola, análogos a los de la elipse, y permiten hallar a y b conocidos a', b' y θ .

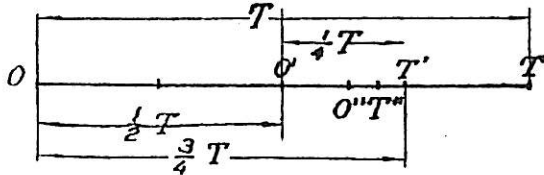
7. Propiedades métricas de cuerdas y tangentes en la parábola.—Si se conocen dos puntos A y B de una parábola y las tangentes a y b en ellos, el punto C en que éstas se cortan es polo de la recta AB . La polar del punto impropio D de esta recta es, pues, la recta d que une C con el punto medio de AB . Obtenemos así el diámetro conjugado a la dirección de la cuerda.

Sea M el extremo propio de dicho diámetro; por estar armónicamente separado del extremo impropio respecto



de la cuerda y su polo, M es punto medio de CE y la tangente en M pasa por D , es decir, es la paralela media del triángulo ABC .

8. Área del segmento parabólico.—El área del segmento parabólico ABM se halla comprendida entre la del triángulo ABM y la del trapecio $ABQP$; es decir, entre $\frac{1}{2}T$ y $\frac{3}{4}T$, llamando T al área del triángulo ABC



La diferencia $(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})T = \frac{1}{4}T$ entre estas áreas es la suma de dos triángulos AMP y BMQ , y, a su vez, el área de cada uno de los segmentos parabólicos limitados por las cuerdas AM y BM está comprendida en $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de las de dichos triángulos.

El área del segmento parabólico ABM es, pues, un número comprendido en una sucesión de intervalos OT , $O'T'$, $O''T''$, ... indicados gráficamente en la figura, cada uno de los cuales es $\frac{1}{4}$ del anterior, o sea, es límite común de dos sucesiones monótonas convergentes. La inferior se traduce en la progresión geométrica $OO' + O'O'' + \dots = \frac{T}{2} + \frac{T}{8} + \frac{T}{32} + \dots = \frac{2}{3}T$.

El área del segmento parabólico AMB es $\frac{2}{3}$ del área del triángulo circunscrito ACB limitado por la cuerda y las tangentes en los extremos.

EJERCICIOS

Demostrar que:

1. En una elipse o hipérbola, dos diámetros conjugados cualesquiera determinan sobre una tangente fija dos puntos variables cuyo producto de distancias al punto de contacto es constante.
2. En una elipse o hipérbola, dos tangentes paralelas cortan a una tangente fija en dos puntos que tienen la misma propiedad anterior.
3. Si se prolonga una cuerda cualquiera MN de una cónica hasta cortar en L a una directriz, la recta LF (F foco correspondiente) y la polar de L son las bisectrices del ángulo MFN y de su adyacente.
4. Sea g una recta concurrente y coplanaria con dos ejes rectangulares. Las superficies cónicas de revolución engendradas por g al girar alrededor de uno u otro eje son cortadas por un plano paralelo a dichos ejes según dos hipérbolas conjugadas.
5. Los dos segmentos de una secante comprendidos entre dos hipérbolas conjugadas son iguales.
6. Calcular el ángulo que forman entre sí dos diámetros conjugados iguales en una elipse de semiejes a y b .
7. Transformar por afinidad una hipérbola dada por dos diámetros conjugados en una hipérbola equilátera.
8. Envolvente de las rectas que forman con otras dos fijas un triángulo de área constante

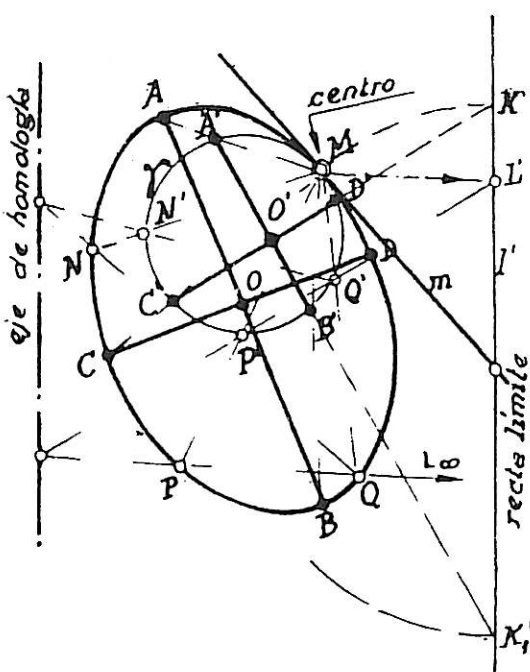
LECCIÓN 35.—CONSTRUCCIÓN DE CÓNICAS

1. Construcción de una cónica unívocamente definida por puntos y tangentes incidentes.—Para evitar repeticiones, entenderemos de una vez para todas que los puntos dados de una cónica no están tres a tres alineados y que las tangentes no son concurrentes tres a tres.

En la lección 32, § 1, hemos visto que una cónica queda unívocamente determinada con los siguientes datos:

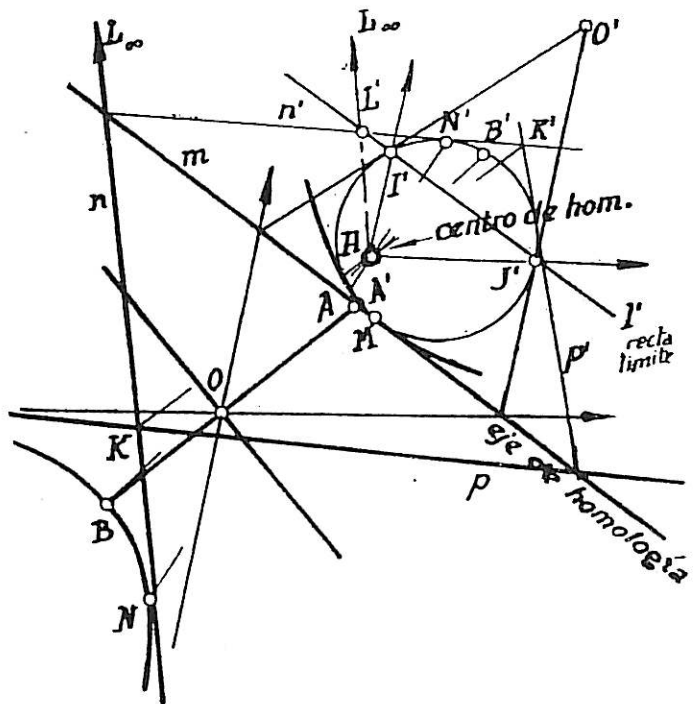
- | | |
|---|--|
| I. Cinco puntos M, N, P, Q, R . | I'. Cinco tangentes m, n, p, q, r . |
| II. Cuatro puntos M, N, P, Q y la tangente m en uno de ellos, M . | II'. Cuatro tangentes m, n, p, q , y el punto de contacto M de una de ellas, m . |
| III. Tres puntos M, N, P y las tangentes m, n en dos de ellos, M, N . | III'. Tres tangentes m, n, p y los puntos de contacto M, N de dos de ellas, m, n . |

EJEMPLO.—(Léanse antes las consideraciones generales de la página siguiente):



Datos: Puntos M, N, P, Q . Tangente m en M .

Construcción: P', Q', N' , homólogos de P, Q, N en una circunferencia γ y tangente al m en M (centro de homología). Con estos tres pares de puntos homólogos se halla el eje y la recta límite l' (de la figura γ). Se construyen: O' polo de l' en γ ; $K'K_1$, puntos conjugados respecto de γ en l' , tales que MK' y MK_1 (no trazadas) son perpendiculares (paralelas a los ejes). Uniendo O' con $K'K_1$, se obtienen A', B', C', D' , imágenes de los vértices. Se construyen sus homólogos A, B, C, D , y se tienen los vértices de la cónica.



Datos: Tangentes m, n, p . Puntos de contacto M (de m), N (de n).

Construcción: Elegida una circunferencia γ y tangente a m en M , se trazan las tangentes n', p' homólogas de n, p (m eje de homología). Con los elementos homólogos KK', NN', nn' se halla el centro H de homología y la recta límite l' . Por cortar ésta a γ en I', J' , la cónica es hipérbola; las homólogas de las asíntotas son las tangente en I', J' , lo que permite construir dichas asíntotas y sus bisectrices los ejes.

El teorema de Pascal o el de Brianchon permiten hallar en los casos y l' la tangente en M o el punto de contacto m (v. lec. 32). Conocemos así en todos los casos un punto M y su tangente m .

Podemos construir una circunferencia homológica tomando M como centro de homología en los casos de la izquierda y m como eje en los de la derecha, y hallar, respectivamente, el eje y el centro por aplicación de lo dicho en el § 3, lección 31.

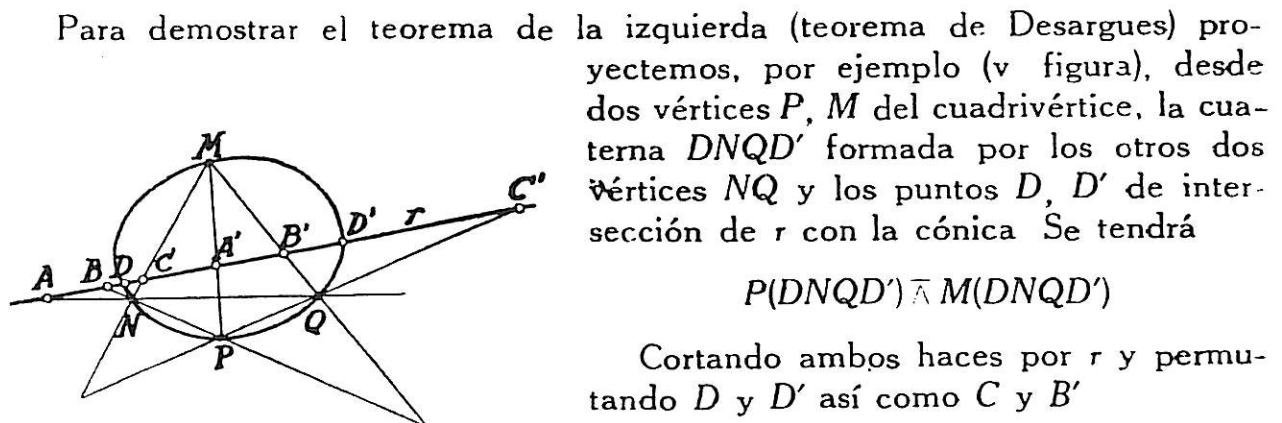
Definida la homología que transforma la cónica en circunferencia, construiremos todos los elementos que se deseen: centro, ejes, asíntotas, hallando sus imágenes en dicha circunferencia por aplicación de lo dicho en § 6, lección 33.

En las figuras se ha hecho aplicación del método a los casos II y III' con las construcciones precisas.

2. Teorema de Desargues.—La determinación de una cónica mediante puntos y tangentes no incidentes *ya no es unívoca*, y para hallar las soluciones nos valdremos de los siguientes teoremas:

Dada una cónica y un cuadrivértice inscrito en ella, toda recta r que sea secante a la cónica, sin pasar por ninguno de los vértices del cuadrivértice, corta a la cónica y a los lados opuestos del cuadrivértice en pares de puntos homólogos en una misma involución.

Dada una cónica, un cuadrilátero circunscrito a ella y un punto P exterior, no situado en ninguna diagonal del cuadrilátero, las tangentes a la cónica desde dicho punto y los pares de rectas que proyectan desde él los vértices opuestos del cuadrilátero son rayos homólogos en una misma involución.



Para demostrar el teorema de la izquierda (teorema de Desargues) proyectemos, por ejemplo (v figura), desde dos vértices P, M del cuadrivértice, la cuaterna $DNQD'$ formada por los otros dos vértices NQ y los puntos D, D' de intersección de r con la cónica. Se tendrá

$$P(DNQD') \bar{\wedge} M(DNQD')$$

Cortando ambos haces por r y permutando D y D' así como C y B'

$$DBC'D' \bar{\wedge} DCB'D' \bar{\wedge} D'B'CD$$

La relación entre la primera y la última cuaterna indica que en la proyectividad en la que son homólogos $DD', BB', C'C$ se corresponden D y D' *doblemente*, es decir, se trata de una involución.

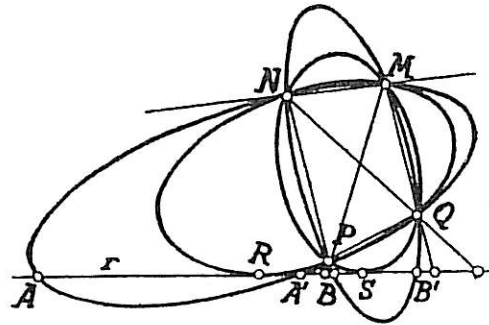
Proyectando análogamente desde P y N la cuaterna $DMQD'$ se comprueba que A y A' son homólogos en la misma involución DD', CC'

Si la recta r pasa por alguno de los puntos diagonales, este punto será doble de la involución (*).

El lector demostrará, análogamente, el teorema correlativo

3. Propiedad del haz de cónicas que pasa por cuatro puntos.—Todas las cónicas que pasan por cuatro puntos $MNPQ$, se dice que constituyen un haz. Consideremos una recta r que no pase por ninguno de los cuatro puntos. Del teorema anterior se desprende:

Los pares de puntos AA' BB' , ... de intersección de una recta r con las cónicas de un haz que pasan por cuatro puntos $MNPQ$ (no incidentes con r) pertenecen a una misma involución, la determinada en r por los pares de lados opuestos del cuadrivértice $MNPQ$ (**).



Los puntos dobles R, S de esta involución (si existen) serán, pues, puntos de contacto de las cónicas del haz, tangentes a r ; eventualmente puede ser alguno de ellos o ambos puntos R, S , diagonales del cuadrivértice $MNPQ$ si r pasa por alguno de ellos o por ambos, en cuyo caso la cónica tangente correspondiente degenera en el par (los pares) de rectas que concurren en dicho punto (o puntos).

Correlativamente: Todas las cónicas tangentes a cuatro rectas m, n, p, q constituyen un haz. Hallando los rayos dobles de la involución que resulta de proyectar los pares de vértices opuestos del cuadrilátero m, n, p, q desde un punto R (no situado en ninguna diagonal) se obtienen las tangentes a las cónicas del haz que pasa por R ; eventualmente diagonales del cuadrivértice si R está en ellas.

4. Determinación y construcción de una cónica dada por cuatro puntos y una tangente, o cuatro tangentes y un punto.— Los interesantes resultados que acabamos de obtener nos indican el modo de resolver los dos problemas

IV. Construir una cónica dados cuatro puntos M, N, P, Q y una tangente r , no incidente con ellos.

Los lados opuestos del cuadrivértice $MNPQ$ definirán sobre r una involución cuyos puntos dobles, si existen, R, S , darán cada uno un nuevo punto y por tanto una cónica solución.

IV' Construir una cónica dadas cuatro tangentes m, n, p, q y un punto R , no incidente con ellas.

Los vértices opuestos del cuadrilátero m, n, p, q se proyectan desde R , según una involución cuyos rayos dobles r, s , si existen, darán cada una, una nueva tangente, y por tanto, una cónica solución.

(*) Si r pasa por dos puntos diagonales, recaemos en la propiedad armónica del cuadrivértice y en la construcción de la polar.

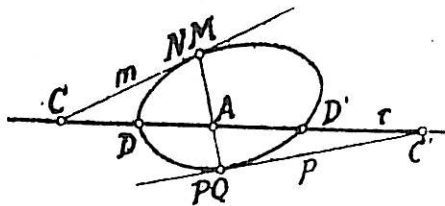
(**) Cada par de lados opuestos es también, al fin, una cónica degenerada del haz.

Este problema se reduce así a los anteriores, y tiene *dos soluciones o ninguna*.

Si la recta dada pasa por algún punto diagonal del cuadrivértice, una de las soluciones es la cónica degenerada formada por los dos lados que pasan por él.

Si el punto dado está en alguna diagonal del cuadrilátero, una de las soluciones es el conjunto de los dos haces con vértices en los extremos de dicha diagonal.

5. Caso límite del teorema de Desargues.—Si en el cuadrivértice del teorema de Desargues (v. fig. § 2), el punto N se confunde con M , y Q se confunde con P , los puntos A, A', B, B' se confunden en uno A , intersección de la recta r con MP , los otros dos lados opuestos MN y PQ se convierten en las tangentes en M y P , y resulta:



Dada una cónica, las tangentes en dos de sus puntos, M y P y una secante r que no pase por M ni P , las intersecciones de r con la cónica (D, D') y con las tangentes (C, C') definen una involución, uno de cuyos puntos dobles es el A

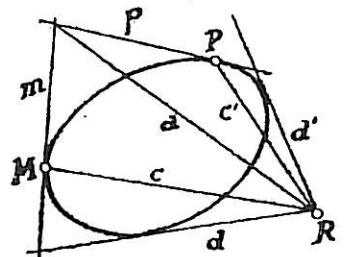
de intersección de MP con la recta r .

Demostración directa: En la proyectividad entre los haces generadores de la cónica con vértices M y P se verifica

$$M(PCDD') \bar{\wedge} P(C'MDD')$$

y, cortando por r , $ACDD' \bar{\wedge} C'ADD' \bar{\wedge} AC'D'D$, que demuestra el enunciado.

Correlativamente: Dada una cónica, dos puntos M, P de tangentes m, p y un tercer punto exterior R , las tangentes dd' por R a la cónica, y las rectas $c \equiv MR, c' \equiv PR$ definen una involución cuyo rayo doble es la recta a que une R con mp .

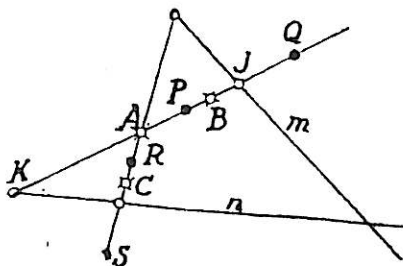


6. Determinación y construcción de una cónica dada por tres puntos y dos tangentes, o por tres tangentes y dos puntos.—Construir una cónica dados:

V. Tres puntos A, B, C y dos tangentes m, n .

V' Tres tangentes y dos de sus puntos de contacto.

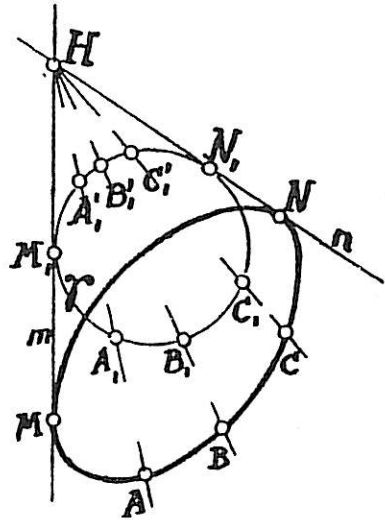
Para resolver el problema de la izquierda, consideremos la secante AB y sus intersecciones J, K con m, n . En virtud del teorema anterior, por uno de los puntos dobles P, Q de la involución AB, KJ (si los hay) pasará la cuerda de contactos. Razonando de igual modo con la secante AC , hallamos los puntos dobles R, S (si los hay) de la involución sobre ella. La cuerda de contactos podrá ser, pues, una de las cuatro rectas PR, QS, PS, QR . Cada una de ellas



dará dos puntos de contacto, con lo que tendremos definida la correspondiente cónica y reducida la construcción a los casos I, II o III.

El problema puede, pues, tener cuatro soluciones o ninguna.

Resulta, sin embargo, más breve hallar directamente una homología que transforme la cónica en circunferencia, como sigue. Tómese como centro de homología el punto $H \equiv mn$, trácese una circunferencia γ tangente a m, n y situada en el ángulo (proyectivo) que comprende A, B y C (*). Las rectas HA, HB, HC determinan en γ los pares de puntos $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$. Elegidos uno de cada par, por ejemplo A_1, B_1, C_1 , la homología en que esta terna es homóloga de ABC transforma la cónica en γ . Basta, en efecto, imaginar la cónica engendrada por los haces M, N de vértices en los puntos de contacto de m y n y sus homólogos M_1N_1 generadores de la circunferencia. Una vez hallado el eje de homología (por intersección de los pares de rectas homólogas $AB, A_1B_1, AC, A_1C_1, \dots$) la construcción de los ejes de la cónica se efectúa hallando sus imágenes en la circunferencia, como se dijo en § 6, lección 33.



Siendo libre la elección de homólogos $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$ existen ocho homologías posibles, pero sólo cuatro cónicas. En efecto, aplicando a γ la homología involutiva de eje M_1N_1 y centro H la terna $A_1B_1C_1$, por ejemplo, se transforma en $A'_1B'_1C'_1$; γ se transforma en sí misma y sigue siendo, por tanto, homológica (teorema de las tres homologías) de la cónica hallada con la terna $A_1B_1C_1$. En resumen, las ternas $A_1B_1C_1$ y $A'_1B'_1C'_1$ dan (con homologías diferentes) la misma cónica solución. Análogamente $A_1B_1C'_1$ y $A'_1B'_1C_1, A_1B'_1C_1$ y $A'_1B_1C'_1, A_1B'_1C'_1$ y $A'_1B_1C_1$.

Por otra parte, si sustituimos la circunferencia auxiliar γ por otra γ' , también tangente a mn en el mismo ángulo, y relacionamos homotéticamente γ y γ' , a toda homología entre γ' y la cónica Γ buscada corresponde una homología entre Γ y γ , y recíprocamente (por ser doble en ambas transformaciones el haz H); por tanto, las soluciones son las mismas, es decir, independientes de la circunferencia elegida.

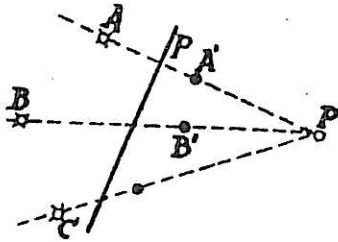
El problema V' se resolverá correlativamente.

7. Determinación de cónicas por elementos homólogos o conjugados en la polaridad.—Para no hacer interminable la enumeración de casos, nos limitaremos a hacer unas observaciones generales y a indicar diversos recursos utilizables, aplicándolos a algunos problemas particulares y dejando a la iniciativa del lector su adaptación o la improvisación de otros recursos en los casos no tratados.

1. *Dar un polo P y su polar p equivale a dar un punto y su tangente.*

Veamos, por ejemplo, cómo puede completarse la determinación de la cónica si suponemos dados además tres puntos de ella A, B, C

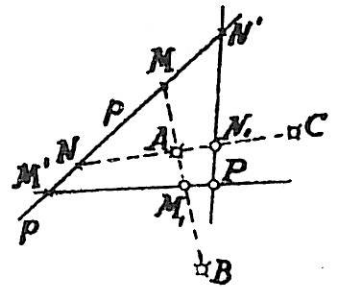
(*) Dos puntos de una cónica no pueden estar separados por dos tangentes de ella (por no ocurrir tal hecho en la circunferencia y conservarse la separación en la proyección).



Nos bastará trazar las secantes PA, PB, PC y determinar los segundos puntos A', B' y C' de intersección con la cónica (conjugados armónicos de A, B y C en las rectas, respecto de P y los puntos de la polar), hallando así elementos suficientes para aplicar las construcciones anteriores.

II. *Dar una involuación i de puntos conjugados equivale a dar dos puntos de la cónica.*

Si la involuación tiene puntos dobles, esos serán de la cónica. Si no los tiene (recta exterior), para completar la determinación de la cónica, dados además tres puntos A, B, C , por ejemplo, de ella, se puede construir fácilmente la polar del punto M de intersección de AB y la base p de la involuación, uniendo su homólogo M' en i con el punto M_1 separado armónico de M respecto de AB . Análogamente se halla la polar $N'N_1$ del punto N intersección de AC con p . La intersección de ambas polares será el polo P de p , y estamos en el caso anterior.



Correlativamente: *Dar una involuación de rectas conjugadas equivale a dar dos tangentes.* En particular: *Dar un foco es dar una involuación de rectas conjugadas (rectangulares) y por tanto, equivale a dar dos tangentes.*

PUNTOS Y RECTAS IMAGINARIOS DE UNA CÓNICA.—Esta y otras consideraciones, que no podemos desarrollar aquí con la amplitud debida, inducen a decir que una recta exterior a una cónica tiene DOS PUNTOS IMAGINARIOS comunes con ella y a definirlos mediante la involuación de puntos conjugados de que es base la recta en cuestión, y análogamente a definir como tangentes imaginarias a una cónica desde un punto interior, a la involuación de rectas conjugadas con el vértice en él. Con esto se pueden unificar muchos enunciados, dándoles la debida generalidad.

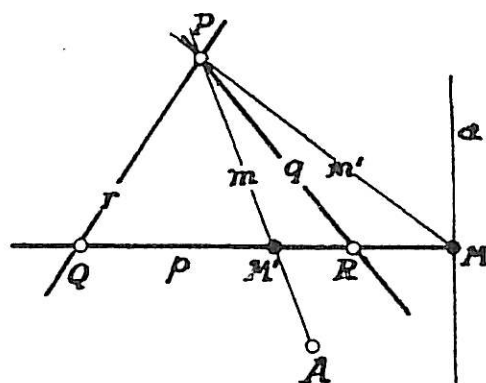
III. *Dar un triángulo autopolar PQR equivale a dar tres puntos.* Para completar la determinación de la cónica dados, además, dos puntos de ella, basta aplicar lo dicho en (I), a los vértices y lados opuestos.

IV. *Dar dos puntos conjugados MM' equivale a dar un punto.* Demos, por ej., además, cuatro puntos $ABCD$ de la cónica. Los lados opuestos del cuadrivértice $ABCD$ determinan en la recta MM' una involuación i (de puntos de intersección de las cónicas del haz $ABCD$). Los puntos R, S , de esta involuación armónicamente separados por MM' serán las intersecciones de la recta MM' con la cónica buscada. La construcción de R, S se efectuará proyectando la serie MM' sobre una circunferencia. La recta que una el centro I de la involuación i_1 (imagen circular de i) con el punto C de concurso de las tangentes en $M_1M'_1$ (imágenes de MM') es eje de una nueva involuación circular i'_1 cuyos puntos dobles, si existen (intersecciones de IC con dicha circunferencia), darán las imágenes R_1S_1 de los puntos buscados; y si tales intersecciones no existen, esta involuación i'_1 proyectada de nuevo sobre la recta MM' dará la involuación de puntos conjugados respecto de la cónica buscada, aplicándose el caso II.

8. Construcción directa de los ejes de una cónica mediante su sistema polar.—Veamos ahora la utilidad que presta, en ocasiones, la consideración del sistema polar definido por la cónica.

Siempre que se conozca un triángulo autopolar PQR respecto de una cierta cónica, un polo A (no situado en sus lados) y su polar a, podremos construir la polaridad, es decir, podremos hallar la polar correspondiente a cualquier polo, y viceversa.

En efecto, la polar de $M \equiv ap$ es $m \equiv AP$. La intersección $M' \equiv mp$ es el punto conjugado de M en p , quedando así definida la involución de puntos conjugados QR, MM' sobre p ; y, proyectando desde P , la de rectas conjugadas $rqm'm$ con vértice P



Análogamente definiremos las involuciones sobre los demás lados y vértices del triángulo, lo que permitirá construir fácilmente las polares de todos los puntos de los lados y los polos de todas las rectas que pasan por los vértices. Finalmente, la polar de un punto cualquiera N , se obtendrá uniendo los polos de dos rectas PN y QN .

Con esto podemos hallar la involución de puntos conjugados sobre cualquier recta, y la de rectas conjugadas con vértice en cualquier punto. Los puntos dobles de la primera darán las intersecciones de la recta con la cónica; los puntos dobles de la segunda, las tangentes desde el vértice considerado.

Según las definiciones dadas en el § 5, lección 33, podremos así construir directamente el centro, pares de diámetros conjugados, la involución de ellos y sus rayos dobles (asíntotas) y rectangulares (ejes) y las intersecciones de éstos con la cónica (vértices), si se trata de una elipse o hipérbola.

En el caso parábola podremos hallar un diámetro cualquiera, una cuerda perpendicular y su mediatriz, que será el eje.

9. Tercera definición proyectiva de cónica. Concepto de cónica imaginaria.—Se vió en la lección 33 que toda cónica define un sistema polar. Acabamos de ver que, recíprocamente, construido de algún modo este sistema polar, queda determinada la cónica que puede definirse como el lugar geométrico de los PUNTOS DOBLES del sistema polar, es decir, de los puntos situados sobre sus polares. Esta es la definición proyectiva de cónica más conveniente, por su generalidad.

La correspondencia entre cónica y sistema polar induce a seguir hablando de una cónica doble imaginaria aun cuando tales puntos dobles no existan, y a definirla precisamente mediante el tal sistema polar. La justificación de este tecnicismo se funda en la generalidad y unidad que imprime a ciertos enunciados.

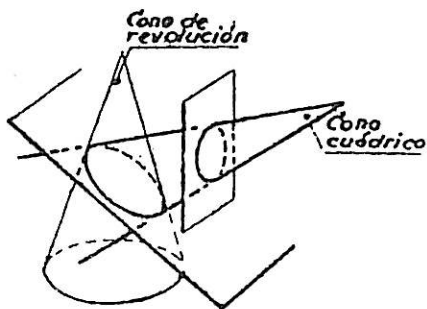
Es fácil ver la existencia de sistemas polares planos sin elementos dobles. Basta, por ejemplo, cortar por un plano la polaridad definida en cualquier radiación por las rectas y planos perpendiculares a ellas o efectuar el producto de una polaridad respecto de una circunferencia por la simetría respecto del centro.

En los cursos de Geometría proyectiva se demuestra con toda generalidad la existencia de un sistema polar y uno sólo (tenga o no cónica doble), definido mediante un triángulo autopolar, un polo y su polar en la forma supuesta en § anterior.

(V Ejercicios al final de la lección siguiente.)

LECCIÓN 36.—LIGERAS NOCIONES SOBRE CUÁDRICAS Y CONOS CUÁDRICOS

1. **Conos y cilindros cuádricos.**—Por analogía con la definición dada para las cónicas, llamaremos *cono cuádrico* a todo cono *perspectivo* de un cono de revolución. Si el homólogo del vértice es un punto impropio resulta como caso particular un *cilindro cuádrico*. Como las secciones de un cono de revolución son cónicas y se transforman proyectivamente en cónicas, resulta: *Todas las secciones de un cono cuádrico producidas por planos que no contengan el vértice son cónicas.*



Para que este enunciado sea general, conviene llamar *cónica impropia* al conjunto de los puntos impropios de las generatrices de un cono

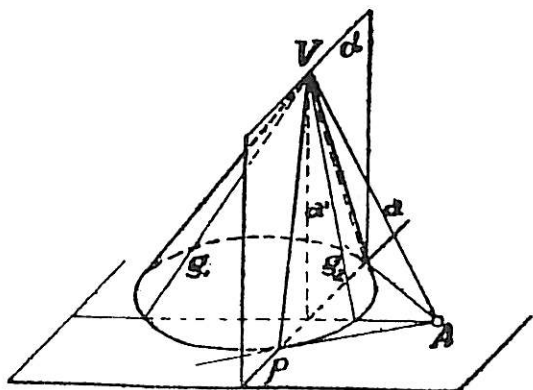
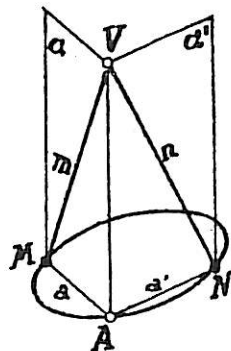
cuádrico, o sea el lugar común al cono y al plano impropio.

Ya que toda cónica propia puede ser considerada como sección de un cono de revolución, podemos decir también: *Cono cuádrico es la figura radiada que resulta de proyectar una cónica propia desde un punto exterior.* Todas las propiedades proyectivas de las cónicas se transformarán, por simple proyección, en propiedades proyectivas de los conos cuádricos. Veamos las más importantes. Proyectando los haces generadores de una cónica sección, resulta:

El lugar geométrico de las rectas de intersección de los pares de planos homólogos de dos haces de planos proyectivos, de aristas distintas, no perspectivos, de una misma radiación, es un cono cuádrico. Lo que da una generación proyectiva directa del mismo, análoga a la de Steiner para las cónicas.

Todo plano que pasa por el vértice contiene a lo sumo dos generatrices del cono, en cuyo caso se llama *secante*. Si tiene una sola, el plano se llama *tangente*. Si no tiene ninguna, se llama *exterior*.

Todos los rayos a' armónicamente separados de un rayo a , no situado en la superficie, respecto de los g_1, g_2 de intersección del cono cuádrico con los planos secantes que pasan por él, están en un plano α que se llama *plano polar* de a . Llamando, asimismo, a cada plano tangente plano polar de la generatriz de contacto, podemos establecer una correspondencia entre rectas y planos de la radiación, de tal modo que a cada recta corresponde su plano polar respecto el cono cuádrico y

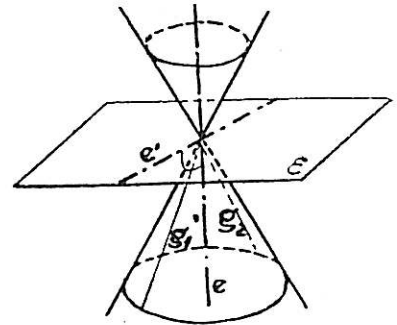


recíprocamente. Dicha correspondencia, llamada *polaridad*, resulta de proyectar la que existe entre polos y polares en el plano de una cónica sección, y tiene, por tanto, las mismas propiedades proyectivas que la polaridad en el plano. En particular: Si una recta está en un plano, su plano polar pasa por la polar de dicho plano, y recíprocamente:

Un cono cuádrico puede, pues, definirse de manera similar a una cónica (§ 9, Lección anterior) como el lugar de las rectas (o cono envolvente de los planos) incidentes con sus homólogos en un sistema polar radiado

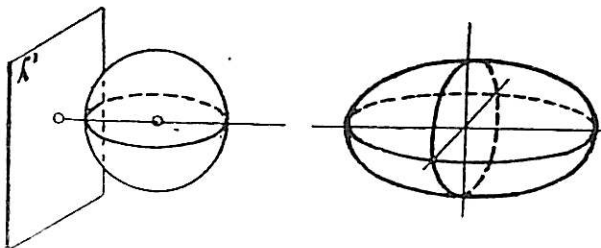
2. Ejes de un cono cuádrico.—Entre los elementos homólogos en la polaridad respecto de un cono cuádrico, los más importantes, desde el punto de vista métrico, son los ortogonales entre sí.

Si una recta e es perpendicular a su plano polar ϵ , recibe el nombre de *eje* del cono cuádrico, y es *eje de simetría* del mismo, porque al ser armónica la cuaterna de rayos $e e' g_1 g_2$ contenidos en un plano secante cualquiera al cono por e , formada por e el rayo ortogonal e' , situado en ϵ , y las generatrices $g_1 g_2$ del cono contenidas en dicho plano, éstas estarán simétricamente colocadas respecto de e y e' ; por tanto, el plano ϵ polar de e es también *plano de simetría* del cono, y se llama *plano principal*.



Si el cono es de revolución, son planos de simetría todos los que pasan por el eje de revolución y el perpendicular a éste por el vértice, y ejes de simetría todas las rectas perpendiculares a ellos por el vértice. Si no es de revolución, se demuestra, en los tratados especiales, que existen tres ejes y sólo tres y, por tanto, también tres planos de simetría, que son los determinados por dichos ejes dos a dos de modo que los tres ejes y los tres planos de simetría en cuestión forman un triedro trirectángulo autopolar respecto del cono cuádrico, es decir, un triedro en el que el plano de cada cara es polar de la arista opuesta.

3. La cuádricas no regladas.—Llamaremos *cuádrica no reglada* a toda superficie transformada homológica de una superficie esférica

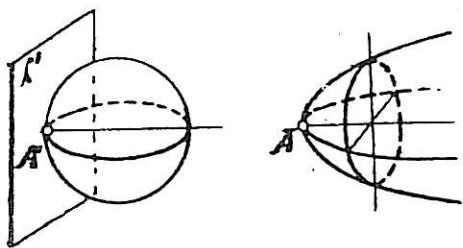


Las secciones planas de una cuádrica no reglada, serán, pues, transformadas homológicas de secciones circulares de la esfera y, por tanto, *cónicas*

Si el plano límite λ' del espacio que contiene la esfera (es decir, el plano homólogo del plano impropio considerado como perteneciente al espacio de la cuádrica) es exterior a

dicha esfera, su homológica, la cuádrica, no tendrá puntos comunes con el plano impropio. Todos los puntos de la cuádrica son propios y se llama *elipsoide*. Sus secciones no pueden ser más que elipses

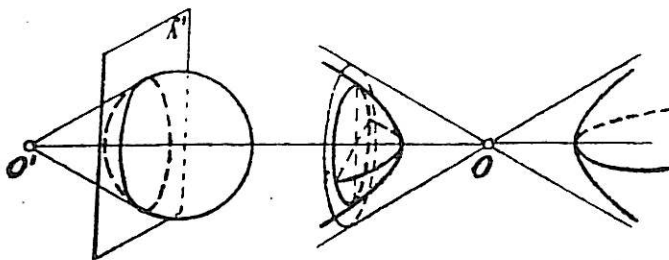
Si el plano límite λ' en cuestión, es tangente a la esfera, la cuádrica tiene un solo punto en el plano impropio, y se llama *paraboloide elíptico*. Sus secciones pueden ser *parábolas* o *elipses*, según que pasen o no por dicho punto impropio



Si el plano límite λ' corta a la superficie esférica (según una circunferencia que llamaremos límite), la cuádrica tiene una cónica impropia (homóloga de la circunferencia límite), y se llama *hiperboloide ordinario* o de

dos hojas. El cono homólogo del tangente a lo largo de la circunferencia límite se llama *cono asintótico* de la cuádrica.

La polaridad respecto de la esfera (lección 49, Tomo I) se transforma, mediante la homología, en una correspondencia entre puntos, rectas y planos del espacio de la cuádrica, llamada *polaridad respecto de la cuádrica*, por tener idénticas propiedades que la polaridad respecto de la esfera, ya que dichas propiedades son de carácter proyectivo y se conservan en la homología.



Así pues: El *plano polar* de un punto A no situado sobre la cuádrica contiene los puntos armónicamente separados de A respecto de todos los de intersección de ésta con las secantes que pasan por A .

El plano polar de un punto de la cuádrica es el plano tangente en él. Si un punto A está en un plano β , su plano polar α pasa por el polo B de dicho plano. Si el plano polar de un punto P corta a la cuádrica, el cono proyectante desde P , de la cónica sección γ , es tangente a la cuádrica a lo largo de γ .

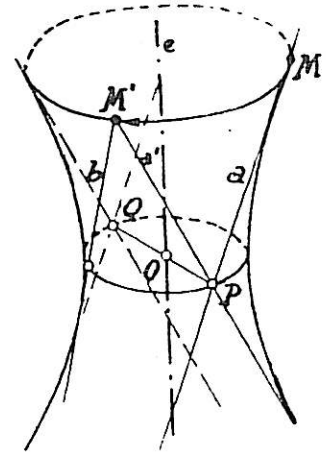
4. Propiedades proyectivas del hiperboloide de revolución.—Las propiedades del párrafo anterior no son privativas de las cuádricas *no regladas*. Existen otras superficies que no pueden ser homológicas de una esfera, por el hecho de contener rectas y que, sin embargo, cumplen propiedades proyectivas idénticas a las de la esfera.

Estudiemos la más sencilla de tales superficies ya mencionadas en el tomo I, lección 43, § 5, el *hiperboloide de revolución*. Recuérdese que fué definido como la superficie de revolución engendrada por una recta (generatriz) que se cruza con el eje e .

Las distintas posiciones de la generatriz las concebimos ahora como un sistema S_1 de generatrices rectilíneas de la superficie. Pero toda superficie de revolución es simétrica respecto de cualquier plano que pasa por el eje. Elegido uno de ellos, π , obtenemos así otro sistema S_2 de generatrices rectilíneas de la superficie, simétrico del sistema anterior respecto a dicho plano. Este sistema S_2 es independiente del plano meridiano π elegido, porque el producto

de dos simetrías respecto de los planos secantes π y π' es un giro respecto de la recta de intersección (Tomo I, lec. 43), es decir, los dos sistemas de generatrices simétricas de S_1 respecto de π y π' , se pueden deducir uno de otro por un giro, alrededor de e , y por tanto, constituyen un mismo sistema.

Consideremos el segmento OP , que mide la distancia mínima entre el eje y una generatriz cualquiera. El extremo P de este segmento, situado sobre la generatriz, describe, al girar, una circunferencia que llamaremos *circunferencia de garganta* del hiperboloide. Por cada punto P de ella pasan dos generatrices a, a' de distinto sistema, simétricas respecto del plano eP . Todo par de puntos simétricos M y M' de ellas pueden hacerse coincidir mediante un giro alrededor de e , el cual transformará una de las generatrices a en otra b secante a la a' en M' , y recíprocamente: todo giro de a la transforma en una secante a a' , excepto el giro de 180° , que transforma a en la paralela a a' . Resulta de ahí, en todo caso: *Toda generatriz de un sistema es coplanaria con cada una de las del otro.*



Consideremos los planos determinados por una generatriz variable g' de un sistema con dos generatrices a, b fijas del otro. Obtenemos así dos haces de planos de aristas a y b , cuyas secciones por el plano de la circunferencia de garganta son dos haces proyectivos de rectas A y B .

Se desprende de ahí que los dos haces de planos son, a su vez, proyectivos, y como por cada punto G de la circunferencia de garganta no pasa más que una generatriz de cada sistema y no hay más que una recta g' de intersección de los planos aG y bG , podemos enunciar:

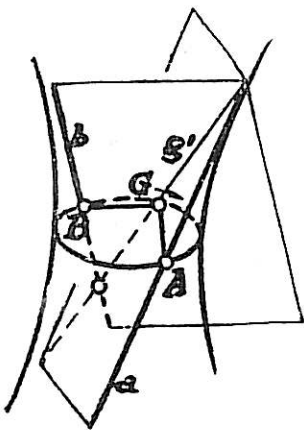
El hiperboloide de revolución es el lugar geométrico de las rectas de intersección de los planos homólogos de los haces proyectivos obtenidos proyectando los puntos de la circunferencia de garganta desde dos generatrices de un mismo sistema.

De esta generación se desprenden fácilmente las propiedades proyectivas de la superficie.

En primer lugar: *Toda sección del hiperboloide de revolución producida por un plano que no contiene ninguna generatriz, es una cónica*, pues cortará a los dos haces de planos generadores según dos haces de rectas proyectivos cuyos rayos homólogos se cortarán en los puntos de una cónica, que son los comunes al plano secante considerado y a la superficie.

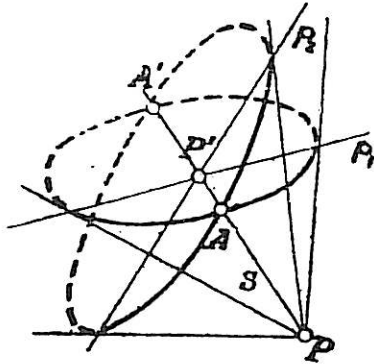
Si el plano de la sección es paralelo a dos generatrices rectilíneas, la cónica sección tendrá dos puntos impropios y será *hipérbola*. Si es paralela a una sola generatriz, será la sección *parábola*. Si corta a todas las generatrices, será *elipse*.

De aquí resulta que una recta puede tener con la superficie las siguientes posiciones: 1.º) Pertener por entero a ella. 2.º) Tener dos puntos comunes con ella (propios o impropios) y se llama *secante*. 3.º) Tener un solo punto



común, y se llama *tangente*. 4.º) No tener punto alguno común, y se llama *exterior*.

Si trazamos ahora por un punto P , no situado en la superficie, una secante s a ella en A y A' , y por s dos planos α_1 y α_2 , las polares p_1 y p_2 de P respecto de las dos cónicas sección producidas por estos planos, pasarán por el punto P' armónicamente separado de P por A y A' . Repitiendo el razonamiento para nuevas secantes situadas en α_1 y α_2 , podemos obtener así infinidad de polares de P respecto de las cónicas secciones producidas en la superficie por planos, pasando por P y no por P' , las cuales se cortarán dos a dos sin pasar por un mismo punto, es decir, estarán en un plano que llamaremos *polar* de P en resumen:



Los puntos armónicamente separados de uno P (no perteneciente al hiperboloide de revolución) respecto de los de intersección de la superficie con las secantes que pasan por P , están en un plano π llamado *polar* de P , que puede definirse asimismo como lugar de las polares de P respecto de las cónicas sección producidas por planos que pasan por P . Un punto cualquiera P' de una de estas polares tendrá, por lo tanto, su plano polar pasando por la polar de P' en la sección correspondiente, y por tanto, contendrá P ; es decir, la correspondencia entre cada punto y su plano polar verifica la propiedad de polaridad recíproca. Fácilmente complementariamos esta correspondencia haciendo corresponder a cada punto A de la superficie, el plano determinado por las generatrices que pasan por él y que se llama *tangente* en A y también *polar* de A .

Abreviando: *El hiperboloide de revolución tiene propiedades proyectivas idénticas a las de la esfera, excepto el hecho de contener rectas.*

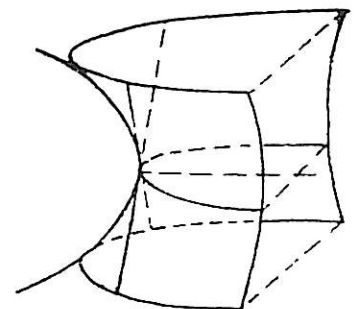
En particular se demuestra sin dificultad que el cono proyectante desde un punto P de la cónica sección γ producida en el hiperboloide por el plano polar de P , tiene a lo largo de γ los mismos planos tangentes que el hiperboloide, llamándose por esta razón cono tangente o circunscrito a lo largo de γ .

5. Las cuádricas regladas.—El estudio de las propiedades proyectivas del hiperboloide de revolución nos pone en condiciones de definir ahora las cuádricas regladas.

Llamaremos *cuádrica reglada* a toda superficie transformada homológica del hiperboloide de revolución.

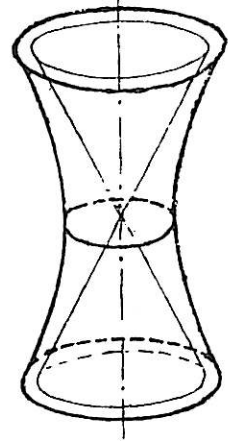
Si el plano límite de la homología (más concretamente, el plano homólogo del impropio considerado como perteneciente al espacio de la cuádrica) es tangente al hiperboloide, es decir, tiene dos generatrices comunes con él, la cuádrica homológica será tangente al plano impropio, tendrá dos generatrices en él, y se llama *paraboloide hiperbólico*.

Sus secciones planas sólo pueden ser parábolas o hipérbolas, según que



el plano secante corte a aquellas dos generatrices en puntos distintos o en uno mismo.

Si el plano límite es secante al hiperboloide de revolución (exterior no es posible por tener todas las generatrices rectilíneas algún punto común, propio o impropio, con el plano) la cuádrca tendrá una cónica impropia y se llama *hiperboloide alabeado*. Sus secciones pueden ser hipérbolas, parábolas o elipses, según la posición que ocupe la recta impropia del plano secante respecto de la referida cónica impropia de la cuádrca.



Al sistema polar antes hallado en el hiperboloide, corresponde un sistema polar en toda cuádrca reglada transformada por homología y cuyas propiedades es obvio volver a repetir.

Cuando el plano límite no es tangente al hiperboloide de revolución, el cono proyectante de la sección desde su polo es tangente al mismo y tiene por homólogo el llamado cono *asintótico* del hiperboloide transformado.

De la generación del hiperboloide de revolución por intersección de planos homólogos de dos haces proyectivos se desprende: *Toda cuádrca reglada puede considerarse como el lugar geométrico de las rectas de intersección de dos haces de planos proyectivos de aristas cruzadas.*

6. Centros, diámetros y ejes de las cuádricas.—Llámase *centro de una cuádrca*, no tangente al plano impropio, al polo de dicho plano. Por tanto, sólo admiten centro el elipsoide y los dos hiperboloides.

Llámase *plano diametral conjugado* de una dirección, al plano polar del punto impropio que marca esta dirección, cuando no pertenece a la cuádrca.

Desde un punto de vista métrico, tienen interés los planos diametrales π perpendiculares a su dirección conjugada, P_∞ , los cuales se llaman *planos principales* de la cuádrca, y son planos de simetría especular de la misma.

En efecto, la figura armónica

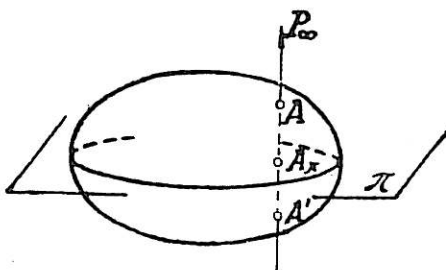
$$(AA' A_\pi P_\infty) = AA_\pi : A' A_\pi = -1$$

indica que

$$A_\pi A = - A_\pi A'$$

En los tratados especiales se demuestra que existen en las cuádricas con centro tres planos de simetría perpendiculares que pasan por él y, por tanto, tres ejes de simetría (sus intersecciones dos a dos), a menos que se trate de cuádricas de revolución, en cuyo caso existen infinitos planos de simetría que pasan por el eje de revolución y el perpendicular a él por el centro; y si se trata de una esfera son planos de simetría todos los diametrales.

Para las cuádricas sin centro se demuestra la existencia de dos planos de simetría perpendiculares entre sí, o todos los que pasan por una recta si se trata de un paraboloides de revolución.



EJERCICIOS (De todo el Capítulo)

1. Demostrar que las cuerdas que unen los pares de puntos homólogos de dos series proyectivas en una cónica, envuelven a su vez otra cónica (punto si la proyectividad es involutiva).
2. Propiedad correlativa de la anterior.
3. Supongamos dos series proyectivas sobre una tangente t a una cónica. Desde cada dos puntos homólogos A y A' tracemos las tangentes a y a' distintas de t . Hallar el lugar de los puntos de intersección de a y a' .
4. Lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve una parábola bajo un ángulo fijo, no recto. (Aplíquese el ejercicio anterior tomando t en la recta impropia, y A y A' direcciones formando el ángulo fijo en cuestión.)
5. Determinar las secciones circulares de un cono cuádrico supuestos conocidos sus planos de simetría.

Construir una parábola dados:

6. Cuatro tangentes.
7. Tres tangentes y un punto de contacto.
8. Tres tangentes y un punto no incidente
9. Dos tangentes y sus puntos de contacto.
10. Dos tangentes y dos puntos, uno de ellos de contacto.
11. Dos tangentes y dos puntos no incidentes con ellas.
12. Una tangente y tres puntos. Caso en que uno sea de contacto.
13. Cuatro puntos.
14. Un polo, su polar y dos puntos.
15. Un polo, su polar y dos tangentes. Idem un punto y una tangente
16. Un triángulo autopolar y un punto o una tangente.

Construir una parábola dados:

17. Las dos asíntotas y una tangente o un punto.
18. Las dos asíntotas y dos puntos conjugados o dos rectas conjugadas.
19. Una asíntota y tres puntos.
20. Una asíntota, dos puntos y una tangente no incidente con ellos.
21. Una asíntota, un punto, una tangente y su punto de contacto.
22. Una asíntota, dos tangentes y uno de los puntos de contacto
23. Una asíntota, dos tangentes y un punto no incidente con ellas.
24. Una asíntota y tres tangentes.
25. Una asíntota, un polo y su polar, y un punto o una tangente.
26. Una asíntota y un triángulo autopolar.
27. Una asíntota, una directriz, su foco y un punto o tangente.
28. Construir una hipérbola equilátera que pase por cuatro puntos.
29. Construir una elipse o hipérbola dada una directriz, una tangente y dos puntos, uno de ellos de contacto de la tangente.

Intersección de cónicas.—La determinación de los puntos comunes a dos cónicas del plano no es problema resoluble, en general, con la regla y el compás, pues siendo de segundo grado las ecuaciones de una y otra, la resultante de ellas es de cuarto. Esto no obsta para que en posiciones particulares la construcción sea posible, del mismo modo que existen ecuaciones de cuarto grado particulares que se resuelven fácilmente mediante dos de segundo (ecuaciones recíprocas, bicuadradas, ...). Más abajo proponemos algunos de estos casos sencillos.

Por otra parte, cuando se conocen dos de los puntos comunes A y B (reales o imaginarios), los otros dos dependen de una ecuación de segundo grado y se construyen fácilmente. En particular si A y B son reales, basta proyectar sobre una de las cónicas los haces de vértices A y B que engendran la otra. Los puntos dobles de la proyectividad resultante son los buscados.

30. Intersección de una cónica con una circunferencia de centro en un foco
31. Intersección de una cónica con una circunferencia concéntrica
32. Intersección de una cónica con una circunferencia que pasa por los focos
33. Intersección de dos cónicas confocales. (Hállense previamente dos directrices y las excentricidades.)

Apéndice I

SOBRE LA IRRESOLUBILIDAD DE ALGUNOS PROBLEMAS

A lo largo de esta obra y especialmente en el tomo I, hemos hecho referencia a algunos problemas irresolubles, como el de la cuadratura del círculo, trisección del ángulo, duplicación del cubo, etc. Suponemos en el lector estudioso la natural curiosidad por saber cómo es posible afirmar su irresolubilidad.

Los problemas de solución negativa suelen ser los más arduos de la Matemática. En todos ellos la evolución ha sido la misma: Siglos enteros de múltiples intentos para resolverlos; cuantos más fracasos acumulados más intenso el estímulo y el afán de gloria por resolverlos. Con frecuencia, al impulso de ese afán y al margen del problema central estimulante han surgido teorías enteras de fecundidad insospechada, premio acaso providencial a tanto esfuerzo mal dirigido. Hasta que al fin un genio ha sabido penetrar más profundamente en la esencia de la cuestión, descubriendo o demostrando la imposibilidad de la solución perseguida.

Nos ha parecido que el modo más sugestivo de epilogar la rápida excursión por el campo de la Geometría elemental contenida en esta obra, era brindar, al lector curioso e iniciado, algunas muestras de cómo el ingenio de los matemáticos ha logrado vencer tales dificultades, esforzándonos en poner de relieve, en forma lo más clara posible, los puntos esenciales de sus razonamientos.

Los conocimientos indispensables para entender este apéndice son los corrientes en un primero y segundo curso universitario de Análisis matemático, y, en especial: Los teoremas generales sobre divisibilidad de polinomios y las propiedades de las funciones simétricas de las raíces de una ecuación algebraica (para los artículos 1.º, 2.º y 3.º); la fórmula de Euler y algunos conocimientos sobre series (para el artículo 4.º).

Para su redacción nos han servido de guía provechosa las siguientes obras:

REY PASTOR: «Lecciones de Algebra».

KLEIN: «Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire».

ENRIQUES: «Questione riguardante le Matematiche elementari». Tomo II.

DÖRRIES: «Triumph der Mathematik».

ARTÍCULO I.—GENERALIDADES SOBRE CAMPOS DE RACIONALIDAD

1. Campos de racionalidad.— Llámanse *campo de racionalidad* a un conjunto de números que contiene la suma, diferencia, producto y cociente de dos cualesquiera de ellos. El campo de racionalidad más sencillo es el constituido por todos los números racionales, y le designaremos por R . Cualquier otro contiene a éste, puesto que contiene la unidad como cociente de dos números iguales, los enteros como suma o diferencia de unidades, y los racionales como cocientes de enteros.

2. Ecuaciones reducibles e irreducibles en un campo.— Una ecuación algebraica $f(x)=0$, de coeficientes pertenecientes a un cierto campo de racionalidad C , se llamará *reducible* o *irreducible* en dicho campo según que $f(x)$ se pueda o no descomponer en producto de polinomios de coeficientes pertenecientes al campo (*).

Toda ecuación $f(x)=0$ reducible, es decir, de la forma $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)=0$ se resolverá mediante las de grado menor $f_1(x)=0, f_2(x)=0, \dots, f_n(x)=0$. Los problemas de resolubilidad de ecuaciones en ciertos campos se hallan, pues, íntimamente ligados a los de reducibilidad de sus primeros miembros en dichos campos, de aquí el interés que tiene el estudio de condiciones de reducibilidad.

3. Teorema de Abel.— Si una ecuación $F(x)=0$ de coeficientes pertenecientes a un cierto campo C , admite una raíz de otra ecuación $f(x)=0$, irreducible en dicho campo (de coeficientes pertenecientes asimismo a él) admite todas las demás raíces. De otro modo: $F(x)$ es divisible por $f(x)$.

En efecto, por hipótesis, los polinomios $F(x)$ y $f(x)$ tendrán un máximo común divisor de grado ≥ 1 , el cual ha de coincidir (salvo factor constante) con $f(x)$; pues de lo contrario $f(x)$ sería divisible por él, y ya no sería irreducible la ecuación $f(x)=0$.

Corolarios:

I. Ninguna raíz de una ecuación $f(x)=0$ irreducible en un campo C puede satisfacer a otra de menor grado y de coeficientes en C . De otro modo:

II. Si una raíz de la ecuación, irreducible en C , $f(x)=0$ satisface a $F(x)=0$ de coeficientes en C y grado menor, $F(x)$ es idénticamente nulo. Por anularse para más valores que indica su grado.

III. Si dos ecuaciones $f(x)=0$ y $F(x)=0$, ambas irreducibles en C , tienen una raíz común, las tiene todas, es decir, son equivalentes.

4. Ampliación de un campo de racionalidad.— Ampliar un campo C por adjunción de un cierto número α , no perteneciente a él, es formar otro campo C_1 , combinando mediante las operaciones racionales los números de C con α . Le designaremos más expresivamente por $C_1 [C, \alpha]$.

(*) La distinción de *reducible* o *irreducible* en un campo sólo se aplica a las ecuaciones cuyos coeficientes pertenecen al mismo, pues si los coeficientes de una ecuación no pertenecen a un campo C es claro que no puede ser reducible en él. Al hablar, pues, de ecuaciones irreducibles en un campo C daremos por sobreentendido que sus coeficientes pertenecen a C .

Así, por ejemplo, combinando racionalmente todos los números racionales del campo R con la $\sqrt{2}$, se obtiene un nuevo campo $R_1 [R, \sqrt{2}]$ al que pertenecen, por ejemplo, los números

$$\sqrt{8} - \sqrt{50} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2}; \quad \frac{3\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2})^3}; \quad \text{etc.}$$

Podemos ampliar ahora C_1 por adjunción de un nuevo número β no perteneciente a él (y, por tanto, tampoco a C), obteniéndose un campo que designaremos por $C_2 [C, \alpha, \beta]$; y luego adjuntar γ formando análogamente $C_3 [C, \alpha, \beta, \gamma]$, y así sucesivamente; pero recalquemos nuevamente que α no debe pertenecer a C , ni β a C_1 , ni γ a C_2 , etc.; de otro modo la ampliación sería ilusoria.

Así, por ejemplo, el campo $R_2 [R, \sqrt{2}, \sqrt{3}]$ no se amplía por adjunción de $\sqrt{6}$ por ser $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, es decir, función racional de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, y por tanto perteneciente a R_2 .

5. Irracionales cuadráticos.—Supongamos, como en el ejemplo anterior, $\alpha = \sqrt{c}$, siendo c perteneciente a C ; $\beta = \sqrt{c_1}$, c_1 perteneciente a C_1 ; $\gamma = \sqrt{c_2}$ perteneciente a C_2 , y así sucesivamente. Resultan así campos ampliados cada uno de ellos con la raíz cuadrada de un número perteneciente al campo anterior (pero no perteneciente ella misma a dicho campo). Todos los números pertenecientes a estos campos ampliados (y no al C) se llamarán *irrationales cuadráticos* respecto a C . Cuando no se especifique el campo C de partida se entenderá que se trata de un *irracional cuadrático* con relación al campo R de los números racionales.

Si queremos poner de manifiesto el número n de radicales agregados al campo primitivo expresaremos el irracional cuadrático que los contenga por $C_n [C, \sqrt{c}, \sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_{n-1}}]$ y le llamaremos irracional cuadrático de orden n . Para indicar que ninguna raíz pertenece al campo de racionalidad de las precedentes diremos que dichas raíces son *racionalmente independientes*.

Todos los irracionales cuadráticos respecto de C son, en definitiva, resultados de combinar (en número finito de veces) los números de C mediante las cuatro operaciones racionales y la extracción de la raíz cuadrada.

6. Campo obtenido por adjunción de una raíz de ecuación irreducible. Adjuntemos a un campo C de racionalidad, una raíz α de una ecuación $f(x)=0$ *irreducible* en dicho campo, es decir,

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \equiv (x - \alpha) f_1(x);$$

por tanto, α no pertenece a C .

Todo número h del campo ampliado será, pues, una función racional de α de coeficientes pertenecientes a C , es decir, de la forma $\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$. Sustituyamos en los polinomios $p(\alpha)$ y $q(\alpha)$ las potencias $\alpha^n, \alpha^{n+1}, \alpha^{n+2}, \dots$, en función de las

$n-1$ primeras potencias, cosa posible, ya que por ser α raíz de $f(x)=0$ se tendrá:

$$\alpha^n = -a_1 \alpha^{n-1} - a_2 \alpha^{n-2} - \dots - a_{n-1} \alpha - a_n,$$

y multiplicando esta igualdad por $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$ expresaremos análogamente las potencias sucesivas en función de las $n-1$ anteriores, y por tanto también en función de las $n-1$ primeras.

Quedará así: $k = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$, donde P y Q son polinomios de grado $< n$, y de

coeficientes pertenecientes a C .

Ahora bien, por el corolario I del § 3, $f(x)$ y $Q(x)$ no pueden tener raíz alguna común, y al ser primos entre sí es posible obtener dos polinomios $r(x)$ y $s(x)$ cuyos coeficientes pertenecen a C tales que se verifique $rf + sQ \equiv 1$. (Véase Nota al final del artículo.) Esta identidad da para $x = \alpha$, $s(\alpha) Q(\alpha) \equiv 1$, con lo que es posible poner en forma entera la expresión de $k = P(\alpha) s(\alpha)$ y, por tanto, aplicando nuevamente la reducción anterior, podremos expresar k en la forma que llamaremos *normal*

$$k = c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + \dots + c_{n-1} \alpha^{n-1}$$

donde $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ son números de C .

Todo número k del campo $C_1[C, \alpha]$, ampliado del C por la adjunción de una raíz α de una ecuación de grado n irreducible en él puede expresarse como polinomio de grado $n-1$ en α y de coeficientes pertenecientes a C .

Esta expresión es única. En efecto, si se tuviera

$$c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + \dots + c_{n-1} \alpha^{n-1} = c'_0 + c'_1 \alpha + c'_2 \alpha^2 + \dots + c'_{n-1} \alpha^{n-1}$$

resultaría:

$$(c_0 - c'_0) + (c_1 - c'_1) \alpha + (c_2 - c'_2) \alpha^2 + \dots + (c_{n-1} - c'_{n-1}) \alpha^{n-1} = 0$$

y por ser α raíz de la ecuación $f(x)=0$ irreducible de grado n se tendrá (corolario II, § 3):

$$c_0 - c'_0 = 0, \quad c_1 - c'_1 = 0 \quad \dots \quad c_{n-1} - c'_{n-1} = 0$$

es decir, ambos polinomios son idénticos (*).

7. Forma normal de un irracional cuadrático.—Sea c un número del campo C , pero cuya raíz cuadrada no pertenece a él. La ecuación $x^2 - c = 0$ tiene como única descomposición factorial posible $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$; por consiguiente, es irreducible en C , y aplicando el resultado anterior resulta

(*) Este resultado y la demostración que a él conduce son de la mayor importancia por cuanto en él se resuelve de un modo general la reducción a la forma normal de un cociente de polinomios ordenados según potencias de un número o expresión irracional, problema de uso frecuente en Análisis (irracionalidades cuadráticas, reducción de hiperelípticas, racionalización de denominadores, ...).

Todo número del campo $C_1(C, \sqrt{c})$, es decir, todo irracional cuadrático de primer orden en C , puede expresarse en la forma

$$a + b\sqrt{c}, \quad [1]$$

donde a y b son números pertenecientes a C .

La propiedad se puede aplicar a todo irracional cuadrático de orden n . La expresión [1], llamada forma *normal* del irracional cuadrático, tendrá entonces coeficientes pertenecientes al campo anterior, es decir de orden $n-1$.

8. Reducibilidad por adjunción.—Ya ha quedado establecido por definición que los conceptos de reducibilidad e irreducibilidad de una ecuación son *relativos a un campo*. Por ejemplo: la ecuación $x^2-3=0$, irreducible en el campo de los números racionales, es reducible en el que resulta de ampliarlo por adjunción de $\sqrt{3}$, puesto que es equivalente a $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$.

Traducido un problema geométrico en un sistema cartesiano mediante una ecuación algebraica (si ello es posible) su resolubilidad mediante la regla y el compás implica, como veremos en seguida, la reducibilidad de dicha ecuación en el campo de sus coeficientes o en los que resultan de ampliarlo sucesivamente mediante un número finito de adjunciones de radicales cuadráticos. La resolubilidad mediante radicales de una ecuación algebraica en general, implica análogamente su reducibilidad en los campos que resultan de ampliar el de sus coeficientes mediante radicales de un orden cualquiera. Para nuestro propósito de demostrar la no resolubilidad de ciertos problemas entre los mencionados, bastará hallar condiciones necesarias de reducibilidad y ver que no se cumplen en los ejemplos de que se trata.

Empecemos, pues, estudiando la siguiente cuestión: *Hallar una condición necesaria para que una ecuación $f(x)$ de grado primo p , irreducible en un campo C , sea reducible en el $C_1[C, \alpha]$ que resulta de ampliar C mediante la adjunción de una raíz α de otra ecuación irreducible en C , $g(x)=0$, de grado q .*

Supongamos, pues, que se pueda descomponer $f(x)$ en dos factores polinomios en x , f_1 y f_2 , de coeficientes pertenecientes al campo ampliado C_1 , coeficientes que, según lo visto en el § anterior, son a su vez polinomios en α .

Escribamos, pues, para poner de manifiesto la dependencia de tales coeficientes,

$$f(x) = f_1(x, \alpha) f_2(x, \alpha)$$

y consideremos esta igualdad como una ecuación en α que se satisface para todo valor de x , y en particular para los valores de x pertenecientes al campo C . Aplicando a esta ecuación en α el teorema de Abel, resulta que se satisfará asimismo para las restantes raíces α' , α'' , ... de $g(x)=0$, con lo que escribiremos:

$$f(x) = f_1(x, \alpha') f_2(x, \alpha')$$

$$f(x) = f_1(x, \alpha'') f_2(x, \alpha'')$$

.....

y al multiplicar obtenemos, por ser q el grado de $g(x)$,

$$f(x)^q = F_1(x) F_2(x) \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} F_1(x) = f_1(x, \alpha) f_1(x, \alpha') \dots (q \text{ factores}) \\ F_2(x) = f_2(x, \alpha) f_2(x, \alpha') \dots (» \quad » \quad) \end{cases}$$

igualdad que al verificarse para todo valor de x en C , se verifica asimismo para cualquier valor de x (principio de identidad).

Pero los productos F_1 y F_2 son funciones simétricas enteras de las raíces de $g(x)$ y, por tanto, sus coeficientes son funciones racionales de los coeficientes de g y en consecuencia números del campo C (*).

Ahora bien, la irreducibilidad de $f(x)$ en C exige que los factores de F_1 y F_2 en que se descompone $f(x)^q$ sean cada uno de ellos ciertas potencias de $f(x)$, es decir, $F_1(x) = f(x)^k$, $F_2(x) = f(x)^l$, siendo $k+l=q$.

Pero si m es el grado de f_1 (el cual es menor que p por ser f_1 factor de f), el grado de F_1 será mq , mientras el grado de $f(x)^k$ será pk . De la igualdad $pk = mq$ se desprende que el número primo p debe dividir a mq y, por tanto, a q . En resumen:

Para que una ecuación $f(x)=0$ irreducible en un campo C de grado primo p , sea reducible por adjunción a C de una raíz de $g(x)=0$ también irreducible en C , es condición necesaria que el grado de g sea múltiplo de p , o igual a él.

Corolario: Si el grado q de $g(x)$ es también primo, es condición necesaria que sea $p=q$.

9. Irreducibilidad de la ecuación cúbica por adjunción de radicales cuadráticos.—La primera consecuencia interesante que obtenemos del teorema anterior es que:

Una ecuación cúbica irreducible en el campo C al que pertenecen sus coeficientes no puede reducirse por adjunción al mismo de la raíz cuadrada de un número c de dicho campo.

En efecto, si \sqrt{c} pertenece a C , no hace falta demostrar el teorema, pues no hay ampliación de campo. Si \sqrt{c} no pertenece a C , significa que la ecuación $x^2=c$ es irreducible en C . Por tanto, aplicando el teorema anterior, para que la ecuación cúbica fuese reducible en el campo ampliado debería ser $2=3$.

10. Irresolubilidad de una ecuación cúbica irreducible, mediante irracionales cuadráticos.—En el caso de una ecuación cúbica la irreducibilidad en un campo C exige que ninguna de sus raíces x_1, x_2, x_3 pertenezca a C , y recíprocamente, ya que la agrupación en dos factores de $(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)$ implicaría que uno al menos de ellos fuese uno de los paréntesis.

Ahora bien, si esta ecuación es irreducible en el campo C de sus coeficientes, seguirá siéndolo (en virtud de lo anterior) en el C_1 que resulta de ampliarlo mediante la adjunción de un radical \sqrt{c} (c en C). Como los coeficientes de la ecuación pertenecen a C , pertenecen asimismo a C_1 , y, aplicando nueva-

(*) Véase, por ejemplo, REY PASTOR: *Lecciones de Álgebra*, Cap. V.

Por tanto, dicho algoritmo permite obtener:

1.º El máximo común divisor de los polinomios a y b , cuyos coeficientes serán funciones racionales de los de a y b . Dicho m.c.d. es el último divisor que da resto nulo. Si tal divisor es una constante, los polinomios a y b se llaman primos entre sí.

2.º El desarrollo de a/b en fracción continua de coeficientes polinómicos, cuyos coeficientes son asimismo expresiones racionales de los coeficientes de a y b .

3.º En el caso de que a y b sean primos entre sí, es decir, carezcan de divisor común algebraico, podemos obtener análogamente dos polinomios en x , $r(x)$ y $s(x)$ tales que sea $ra+sb\equiv 1$. Basta tomar para ello el numerador de la diferencia entre la última y penúltima reducida; por tanto, los coeficientes de r y s son también combinaciones racionales de los coeficientes de a y b .

ARTÍCULO 2.—IRRESOLUBILIDAD DE ALGUNOS PROBLEMAS CLÁSICOS CON REGLA Y COMPÁS

1. Carácter algebraico de los problemas resolubles con regla y compás.

Sean dados varios segmentos de medidas m, n, p, \dots . Hemos visto en el tomo primero (*) que, mediante sumas, restas, división en partes iguales, construcción de terceras y cuartas proporcionales, podemos construir con regla y compás todo segmento cuya medida sea una expresión racional cualquiera en m, n, p, \dots (Si no es homogénea de primer grado se introducen los factores o divisores iguales al segmento unidad, necesarios para lograr que lo sea.) Es decir, podemos construir cualquier segmento cuya medida pertenezca al campo C que resulta de combinar racionalmente $1, m, n, p, \dots$

Añadiendo a las construcciones anteriores la construcción de medias proporcionales, vimos asimismo que es posible construir raíces cuadradas de expresiones racionales en $1, m, n, p, \dots$; por tanto:

Toda expresión racional o irracional cuadrática de los datos puede obtenerse mediante construcciones efectuadas con regla y compás.

Recíprocamente, vimos (**) que: Todos los problemas resolubles con regla y compás se pueden resolver algebraicamente (refiriendo los datos a un sistema cartesiano), mediante una sucesión finita de ecuaciones de primero y segundo grado; de donde resulta que las coordenadas de los puntos y los segmentos (distancias) obtenidos en la construcción son expresiones racionales o irracionales cuadráticas de los datos (distancias, abscisas, ...).

De este resultado y del anterior se desprende: *Los problemas resolubles con la regla y compás son aquellos y sólo aquellos cuyos resultados son expresables mediante funciones racionales o irracionales cuadráticas de los datos.*

Recordando lo dicho en la lección anterior, se obtiene como corolario inmediato:

Todo problema geométrico cuya solución sea raíz de una ecuación cúbica de coeficientes pertenecientes al campo de racionalidad de los datos e irreducible en dicho campo, es irresoluble con la regla y el compás.

(*) Lección 22, § 10 y nota.

(**) Tomo I, lección 36, § 8.

En efecto, si fuera resoluble, la ecuación admitiría por raíz un irracional cuadrático respecto de dicho campo, en contradicción con lo afirmado en el § 10 de la lección anterior.

Esta interesante consecuencia nos va a permitir demostrar, con gran sencillez, la imposibilidad de resolver algunos problemas clásicos famosos.

2. Irresolubilidad de la duplicación del cubo.—Entre los problemas que excitaron el ingenio de los geómetras griegos, por su aparente sencillez y el fracaso de todos sus intentos para resolverlo, figura el de la duplicación del cubo, también llamado de Dehlos por una leyenda tejida a su alrededor (*), y que consiste en: *Hallar con la regla y compás la arista de un cubo de volumen doble de otro de arista dada.*

Sea a la medida de la arista dada y x la de la incógnita. Esta tiene que verificar la ecuación $x^3 = 2a^3$ cuya única raíz real $a \cdot \sqrt[3]{2}$ no pertenece al campo de racionalidad de a . Es, pues, una ecuación irreducible en dicho campo y, por tanto, el problema es irresoluble con la regla y el compás.

Lo mismo podemos decir de la cubatura de un ortoedro de dimensiones a, b, c ; cuando la $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ no pertenezcan al campo de racionalidad de a, b, c .

3. Irresolubilidad de la trisección del ángulo.—Estudiemos el problema de la división de un ángulo dado φ en tres partes iguales. Sabemos por Trigonometría (**) que $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha)$, o sea, poniendo $3\alpha = \varphi$,

$$4 \cos^3 \frac{1}{3} \varphi - 3 \cos \frac{1}{3} \varphi - \cos \varphi = 0.$$

Elegido un segmento unidad, dar φ equivale a dar el segmento que tenga por medida $\cos \varphi$ y hallar el ángulo $\frac{1}{3} \varphi$ con la regla y el compás, equivale a hallar $\cos \frac{1}{3} \varphi$ y, por tanto, a resolver la ecuación

$$4x^3 - 3x - \cos \varphi = 0.$$

Ahora bien, es fácil hallar infinidad de ángulos φ , es decir, de valores de $\cos \varphi$, para los cuales esta ecuación no tiene raíces en el campo de sus coeficientes. Pongamos, por ejemplo, $\cos \varphi = 1/2$; el campo de los coeficientes de la ecuación resultante

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

es el de los números racionales, y no puede esta ecuación tener por raíz la fracción irreducible p/q , pues, sustituyendo, se habría de cumplir $8p^3 - 6pq^2 = q^3$, igualdad imposible por ser el primer miembro múltiplo de p y el segundo no. Análogamente para $\cos \varphi = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Podemos afirmar, pues: *La trisección del ángulo no es problema resoluble, de un modo general, mediante la regla y el compás.* Lo cual no excluye que existen ángulos particulares trisecables como son 180° ($\cos \varphi = -1$), 90° ($\cos \varphi = 0$), $133^\circ 23' 2'' . 9$ ($\cos \varphi = -\frac{11}{16}$)...

Este es otro de los célebres problemas en que fracasaron, naturalmente, los

(*) Véase Tomo I, lección 56, notas.

(**) Lección 8.^a, § 9.

geómetras de la antigua Grecia. El tercer problema clásico famoso de la antigüedad es el de la cuadratura del círculo; pero la demostración de su irresolubilidad exige otra clase de recursos que expondremos más adelante.

4. Inscripción de polígonos regulares.—Según vimos en la lección 9.^a la inscripción de un polígono regular de n lados en la circunferencia es equivalente a la obtención gráfica de las n raíces n ésimas de la unidad, o sea a la resolución de la ecuación binomia $x^n - 1 = 0$. Dividiéndola por el factor $x - 1$ correspondiente a la raíz real 1 queda la ecuación recíproca, llamada *ciclotómica*,

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0. \quad [1]$$

Así, por ejemplo, para $n=7$ nos queda $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, que a su vez mediante el cambio $z = x + \frac{1}{x}$ se reduce a la ecuación cúbica

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0.$$

Se ve fácilmente, de modo análogo a lo hecho antes, que esta ecuación carece de raíces racionales, es decir, es irreducible en el campo de sus coeficientes; en consecuencia:

No es posible inscribir el heptágono regular en una circunferencia con la regla y el compás.

Análogamente se demuestra que *no es posible la inscripción del polígono regular de nueve lados (eneágono)*. En cambio son inscriptibles, además de los conocidos del lector (triángulo, pentágono, y los de doble, cuádruple número de lados, ...), el polígono regular de 17 lados, el de 257 lados, ... ¿Cuáles son, pues, los polígonos regulares inscriptibles con regla y compás? Esta cuestión, una de las más difíciles de la Geometría elemental, fué resuelta por Gauss en sus «Disquisitiones arithmeticae» (1801).

La solución, ya indicada en el tomo primero (lección 15, § 9), es la siguiente: *Los únicos polígonos regulares inscriptibles con regla y compás son aquellos cuyo número n de lados admite una descomposición en factores primos de la forma*

$$n = 2^k (2^{2^{\alpha_1}} + 1) (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \dots (2^{2^{\alpha_s}} + 1)$$

Demostraremos aquí solamente que esta condición es necesaria, viendo la razón por la que n tiene esta forma tan singular.

Obsérvese ante todo que si sabemos dividir la circunferencia en un cierto número p de partes, sabremos dividirla en $n = 2^k p$ por bisecciones sucesivas de los arcos. Esto explica la presencia del factor 2^k del que ya podemos prescindir.

Obsérvese, además, que si sabemos dividir la circunferencia en p y q partes iguales separadamente, y p y q son primos entre sí, sabremos dividirla en pq partes. En efecto, por las propiedades recordadas en la lección anterior (Nota), si p y q son primos entre sí existen dos números enteros r y s tales que $rp + sq = 1$, es decir $\frac{r}{q} + \frac{s}{p} = \frac{1}{pq}$, con lo que se obtiene la fracción $\frac{1}{pq}$ de circunferencia por combinación lineal (de coeficientes enteros) de las fraccio-

nes $1/p$ y $1/q$. Así, por ejemplo, de los números 3 y 5, se obtiene fácilmente la siguiente combinación $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$, o sea $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$, y se podrá obtener $\frac{1}{15}$ de circunferencia restando tres quintas de dos terceras partes.

Recíprocamente, si sabemos dividir la circunferencia en pq partes sabemos dividirla en p y en q partes, uniendo las divisiones de q en q o de p en p .

El problema que nos ocupa queda así reducido a la división de la circunferencia en números de partes que sean primos, distintos de 2.

Probaremos a continuación la necesidad de que estos números primos sean de la forma $2^n + 1$, omitiendo la demostración de la suficiencia de esta condición, que nos llevaría demasiado lejos.

Para ello seguiremos la siguiente línea de razonamientos: demostraremos:

1.º *Todo irracional cuadrático es raíz de una ecuación de grado igual a una potencia de dos y, recíprocamente: Toda ecuación irreducible que admita entre sus raíces un irracional cuadrático tiene un grado igual a una potencia de dos 2^n .*

2.º *Toda ecuación ciclotómica cuyo grado aumentado en una unidad es primo, es irreducible. Por tanto, entre las ecuaciones ciclotómicas que cumplen tal condición sólo admitirán raíces irracionales cuadráticas, es decir, sólo serán resolubles con la regla y compás las ecuaciones ciclotómicas de grado 2^n , y en consecuencia: Sólo se podrá dividir la circunferencia en un número primo p de partes si es $p = 2^n + 1$.*

3.º Finalmente: Si un número primo es de la forma $2^n + 1$, el exponente n no admite más divisor primo que 2, o sea $n = 2^k$. En efecto, si n fuese divisible por un número impar $n = k(2m + 1)$ sería $p = (2^k)^{2m+1} + 1$ divisible por $2^k + 1$ y ya no sería primo. En resumen, decir que p debe ser de la forma $2^n + 1$ es tanto como afirmar que puede ponerse en esta otra $2^{2^k} + 1$, con lo que queda justificada la naturaleza de los factores de Gauss.

Procedamos ahora a la demostración de los puntos pendientes 1.º y 2.º

5. Grado de una ecuación irreducible resoluble por radicales cuadráticos.—*Todo irracional cuadrático respecto a un campo C de racionalidad es raíz de una ecuación algebraica de coeficientes pertenecientes a dicho campo y cuyo grado es de la forma 2^n .*

En efecto, si n es el número de raíces racionalmente distintas que contiene dicho irracional $x_1 = c_n [C, \sqrt{c}, \sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_{n-1}}]$ y cambiamos de signo dichas raíces de todos los modos posibles, obtendremos irracionales $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ en número $\nu = 2^n$. La ecuación de grado ν

$$F(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\nu) = 0$$

a la que satisface x_1 es simétrica en las x_i y no se altera al cambiar de signo el último radical agregado, pues ello supone una simple permutación en las x_i . Así, pues, $F(x)$ es función par del último radical agregado, es decir, no contiene dicho radical, y reiterando el razonamiento tampoco contendrá el penúltimo, antepenúltimo, etc. En una palabra, los coeficientes de $F(x)$ pertenecen al campo C , como queríamos demostrar.

Analicemos ahora, recíprocamente, el grado de cualquier ecuación irreducible $f(x)=0$ que admita por raíz un irracional cuadrático. Para ello demostraremos:

I. Si la ecuación $f(x)=0$ de coeficientes pertenecientes a un campo C admite como raíz el irracional cuadrático $x_1 [C, \sqrt{c}, \sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_{n-1}}]$ admite asimismo como raíces los irracionales x_2, x_3, \dots, x_v , ($v=2^n$), que resultan al combinar de todos los modos posibles los signos de los radicales de x_1 .

En efecto, al sustituir en el primer miembro de la ecuación $f(x)=0$ x por x_1 obtendremos un irracional cuadrático de orden n expresable en forma normal $A+B\sqrt{c_{n-1}}$, donde A y B son irracionales de orden $n-1$ (en $\sqrt{c}, \sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_{n-2}}$). Ahora bien, la anulación de

$$f(x_1) \equiv A + B\sqrt{c_{n-1}} = 0$$

exige que sea $B=0$ (de lo contrario sería $\sqrt{c_{n-1}} = -A : B$ expresable racionalmente en función de los radicales anteriores, en contra de lo supuesto) y por tanto también $A=0$. Recíprocamente, la anulación de A y B supone la de $f(x_1)$.

Pero, a su vez, la anulación de A y B puestos en sus respectivas formas normales

$$A_1 + A'_1 \sqrt{c_{n-2}} = 0, \quad B_1 + B'_1 \sqrt{c_{n-2}} = 0$$

equivale a la de $A_1=0, A'_1=0, B_1=0, B'_1=0$; y repitiendo el razonamiento, veremos que la anulación de $f(x_1)$ equivale a la de un conjunto de expresiones racionales en C y, por tanto, independientes de los signos de los radicales que intervienen en x_1 , es decir, que no alteran al sustituir x_1 por x_2, x_3, \dots, x_v . En consecuencia, $f(x)$ se anulará también para x_2, x_3, \dots, x_v como queríamos demostrar.

II. Si $f(x)$ es además irreducible, dividirá (Teorema de Abel) al polinomio

$$F(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_v) (*)$$

y se tendrá

$$F(x) \equiv f_1(x) f(x),$$

pero $f_1(x)$, al anularse para alguna raíz de $F(x)$, tendrá esta raíz común con $f(x)$ y será igualmente divisible por $f(x)$, es decir,

$$F(x) \equiv f_2(x) \overline{f(x)}^2$$

y, repitiendo el razonamiento, llegamos a la consecuencia $F(x) \equiv \overline{f(x)}^r$, de donde $2^n = mr$ (m grado de f) y por tanto m debe ser también de la forma $m=2^k$.

En resumen: Toda ecuación $f(x)=0$ irreducible en C que admita como raíz un irracional cuadrático, es necesariamente de grado igual a una potencia de dos.

Demostremos ahora algunos teoremas conocidos.

(*) Obsérvese que este polinomio puede tener factores iguales, pues puede ocurrir que se tenga $x_i = x_j$ si al variar los signos de algún radical no altera el irracional, por ejemplo,

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

ejemplo, fuera $b_r \neq \dot{p}$ sería $c_s = \dot{p}$ y pasando a la igualdad anterior también habría de ser $c_{s-1} = \dot{p}$, y análogamente, retrocediendo, habría de ser $c_{s-2} = \dot{p}$, etcétera. En resumen: serían múltiplos de p todas las c . Pero entonces las igualdades 1.ª, 2.ª, 3.ª, ... exigen sucesivamente que sean asimismo \dot{p} todas las b , contra lo supuesto.

Puesto que debe ser simultáneamente $b_r = \dot{p}$, $c_s = \dot{p}$ será a_m múltiplo de p^2 .

COROLARIO.—De este teorema y del de Gauss resulta:

Para que una ecuación $f(x)=0$ de coeficientes enteros, el primero igual a la unidad y los demás múltiplos de un número primo p , sea reducible en el campo racional, es condición necesaria que el término independiente sea múltiplo de p^2 . (También llamado Teorema de Schoenemann.)

8. Irreducibilidad de una ecuación ciclotómica.—*Toda ecuación ciclotómica $\frac{x^p-1}{x-1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x^2 + x + 1 = 0$, cuyo grado aumentado en 1 es primo (p), es irreducible en el campo racional.*

En efecto, si esta ecuación fuese reducible, lo sería igualmente su transformada substituyendo x por $x+1$

$$\frac{(x+1)^p-1}{x} \equiv x^{p-1} + px^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2!}x^{p-3} + \dots + \frac{p(p-1)}{2!}x + p$$

lo que contradiría el teorema anterior por ser múltiplos del número primo p todos los coeficientes a partir del segundo y no ser múltiplo de p^2 el último.

NOTAS

I. *Queda, pues, demostrada, dentro de la finalidad de este Apéndice, la irresolubilidad del problema de la inscripción de polígonos regulares que no cumplan la condición de Gauss.*

La resolución y la construcción efectiva de los que la cumplan es problema aún de mayores dificultades y no nos detendremos en él.

II. Los primeros números primos de la forma $2^{2^a} + 1$ son

$$2^{2^0} + 1 = 3; \quad 2^{2^1} + 1 = 5; \quad 2^{2^2} + 1 = 17; \quad 2^{2^3} + 1 = 257; \quad 2^{2^4} + 1 = 65537$$

La inscripción del triángulo y del pentágono fué resuelta por los griegos.

La inscripción del polígono de 17 lados fué resuelta por Gauss (*), quien atacó genialmente el problema general iniciando con sus métodos la posterior teoría general de grupos de Galois.

El polígono de 257 lados fué estudiado en un considerable trabajo por Richelot «Journal de Crelle» (1832).

El de 65537 lados ocupó durante diez años la atención del prof. Hermes, quien publicó sus trabajos en «Göttinger Nachrichten» (1894 (**)).

(*) Véase una elegante construcción simplificada en REY PASTOR: *Lecciones de Algebra*.

(**) Datos tomados de KLEIN: *Lecciones sobre ciertas cuestiones de Geometría elemental*.

ARTÍCULO 3.—IRRESOLUBILIDAD POR RADICALES DE LA ECUACIÓN GENERAL DE GRADO SUPERIOR AL CUARTO

El material algebraico acumulado en los dos artículos anteriores permite, con poco esfuerzo más, demostrar un teorema importantísimo en la historia del Algebra, el llamado de Ruffini-Abel, que niega la posibilidad de la resolución general de las ecuaciones de grado superior al cuarto mediante radicales, solventando así una cuestión que excitó grandemente la emulación de los matemáticos desde que se resolvieron con éxito las ecuaciones de 3.º y 4.º grado en los siglos XVI y XVII.

Aunque se trata de un problema de Algebra, su importancia, su carácter afín con los tratados y la proximidad en que nos hallamos de alcanzarle, nos invita a tratarlo aquí (*), sin que su lectura sea precisa para el artículo siguiente.

1. Irreducibilidad de la ecuación binómica.—*La ecuación $x^p = a$, de grado p primo, es irreducible en el campo racional de a , salvo si a es potencia p -sima perfecta en dicho campo.*

Sean $\varepsilon = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = \varepsilon^2 \dots \varepsilon_{p-1} = \varepsilon^{p-1}$ las raíces p -simas de la unidad.

Si $\alpha = \sqrt[p]{a}$ es la raíz p -sima aritmética de a , las demás serán:

$$\alpha_1 = \varepsilon\alpha, \quad \alpha_2 = \varepsilon^2\alpha \quad \dots \quad \alpha_{p-1} = \varepsilon^{p-1}\alpha$$

y la ecuación se puede descomponer así:

$$(x - \alpha) (x - \varepsilon\alpha) (x - \varepsilon^2\alpha) \dots (x - \varepsilon^{p-1}\alpha) = 0.$$

Veamos que si a no es potencia perfecta, no es posible agrupar estos factores en dos productos parciales $\varphi(x) \psi(x)$ de coeficientes pertenecientes al campo de a .

Los términos independientes en φ y ψ habrían de ser, en efecto, de la forma $b = \varepsilon^p a^r, c = \varepsilon^q a^s$.

Pero r y s , cuya suma es p (primo), no pueden tener divisor común alguno, es decir, su m.c.d. es 1. Por tanto, existen dos enteros k, l tales que $kr + ls = 1$.

De aquí resulta que el producto

$$\mu = b^k \cdot c^l = a \varepsilon^{k\rho + l\sigma}$$

que pertenecería al campo de a por pertenecer a él b y c , tendría una potencia p -sima también en dicho campo, pero dicha potencia valdría a^p (ya que $\varepsilon^{k\rho + l\sigma}$ es una de las raíces p -simas de 1). Resultaría, pues, $\mu^p = a^p = a$, es decir, a igual a la potencia p -sima de un número del campo, contra lo supuesto.

(*) Seguiremos la exposición de DÖRRIES en su *Triumph der Mathematik*.

2. Condición de reducibilidad por adjunción de un radical.—Recordando § 8, artículo 1.º, resulta:

Si $f(x)=0$ de grado n primo, es irreducible en un campo C , sólo podrá reducirse por adjunción a C de una raíz $\alpha = \sqrt[p]{a}$ de un número a de C (no potencia n^{a} perfecta en C) si p es múltiplo de n . En el caso en que p sea primo es preciso que sea $p=n$.

3. Concepto de resolubilidad algebraica.—Recordando los procesos de resolución de las ecuaciones de 2.º, 3.º y 4.º grado se justifica la siguiente definición general:

Diremos que una ecuación $f(x)=0$ es *resoluble por radicales* cuando sus raíces son expresables algebraicamente por una sucesión en número finito de operaciones racionales y radicaciones efectuadas a partir de sus coeficientes. Más concretamente, cuando toda raíz x_i de $f(x)=0$ se puede obtener mediante una sucesión de operaciones del siguiente carácter:

1.º Cálculo de una raíz $\sqrt[p]{c}$, siendo c un número del campo de racionalidad C de los coeficientes de $f(x)$, supuesto no potencia p -sima perfecta en dicho campo.

2.º Cálculo de otra raíz $\sqrt[p_1]{c_1}$, siendo c_1 un número del campo $C_1[C, \sqrt[p]{c}]$, obtenido por adjunción de $\sqrt[p]{c}$ al campo C , y que no sea potencia p_1 -sima perfecta en dicho campo ampliado.

3.º Cálculo de otra raíz $\sqrt[p_2]{c_2}$, siendo c_2 un número del campo $C_2[C_1, \sqrt[p]{c}, \sqrt[p_1]{c_1}]$, obtenido por adjunción de $\sqrt[p_1]{c_1}$ al campo C_1, \dots , y así sucesivamente

$$C_k [C, \sqrt[p]{c}, \sqrt[p_1]{c_1}, \sqrt[p_2]{c_2}, \dots, \sqrt[p_{k-1}]{c_{k-1}}]$$

al que pertenece x_i ; es decir, x_i expresable racionalmente en función de los coeficientes de $f(x)$ y de los radicales

$$\sqrt[p]{c}, \sqrt[p_1]{c_1}, \dots, \sqrt[p_{k-1}]{c_{k-1}}$$

Según esta definición $f(x)$ es *reducible en el último campo ampliado*, por ser divisible por $x-x_i$.

Sin mermar la generalidad de los razonamientos, podemos suponer los índices $p, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ de las raíces, números primos, ya que toda raíz de índice compuesto puede expresarse por radicales superpuestos de índices iguales a sus factores primos.

4. Expresiones de las raíces de una ecuación de grado primo, irreducible en el campo racional y resoluble por radicales.—Supongamos la ecuación $f(x)=0$ de coeficientes racionales, de grado n primo y con una raíz x_1 expresable por radicales en la forma que acabamos de indicar. Vamos a de-

mostrar que *las restantes raíces* x_2, x_3, \dots, x_n *son también expresables por radicales* y vamos a relacionar sus expresiones con la expresión de x_1 .

Sea $C_{k-1}[C \sqrt[p_{k-2}]{c}, \dots, \sqrt[p_{k-2}]{c_{k-2}}]$ el último campo ampliado de la cadena, en el que $f(x)=0$ es irreducible. Sea $\gamma = \sqrt[p_{k-1}]{c_{k-1}}$ (c_{k-1} perteneciente a C_{k-1}) la raíz cuya adjunción al campo C_{k-1} proporciona el nuevo campo C_k en que $f(x)$ es ya reducible, es decir, descomponible en los factores siguientes, *irreducibles* en C_k ,

$$f(x) \equiv f_1(x, \gamma) f_2(x, \gamma) \dots f_s(x, \gamma) \quad [1]$$

factores que son funciones enteras en γ , ya que, por ser γ raíz de la ecuación $x^{p_{k-1}} = c_{k-1}$ irreducible en C_{k-1} (p_{k-1} supuesto primo, v. § anterior y § 1) los coeficientes de x en f_1, f_2, \dots, f_s (que pertenecen al campo C_k y no a C_{k-1}) pueden expresarse (§ 6, art 1.º) mediante polinomios en γ de grado $p_{k-1} - 1$ y coeficientes pertenecientes a C_{k-1} .

Por otra parte, según el § 2, debe ser $p_{k-1} = n$.

Esto sentado, consideremos uno de los factores $f_1(x, \gamma)$ y expresemos todas las raíces de la ecuación binómica $x^n = c_{k-1}$

$$\gamma_1 = \gamma, \quad \gamma_2 = \varepsilon \gamma, \quad \gamma_3 = \varepsilon^2 \gamma, \quad \dots \quad \gamma_n = \varepsilon^{n-1} \gamma$$

($\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$ raíces de la unidad).

Puesto que la ecuación en γ [1] se satisface (para todo valor de x , y en particular para todo valor de x en C_{k-1}) para una raíz γ_1 de la ecuación $x^n = c_{k-1}$, irreducible en C_{k-1} , se satisfará asimismo para las restantes raíces $\gamma_2 \dots \gamma_n$. (Teorema de Abel. Art. 1.º)

En consecuencia, $f(x)$ es divisible por $f_1(x, \gamma_1) f_1(x, \gamma_2) \dots f_1(x, \gamma_n)$.

Además:

1.º *Todos estos factores son irreducibles en C_k , pues si fuera*

$$f_1(x, \gamma) = u(x, \gamma_i) \cdot v(x, \gamma_i)$$

razonando como antes, sería también (Teorema de Abel)

$$f_1(x, \gamma) = u(x, \gamma) \cdot v(x, \gamma)$$

contra lo supuesto de ser $f_1(x, \gamma)$ irreducible en C_k .

2.º *Todos los factores $f_1(x, \gamma_i)$ son distintos, pues si fuera*

$$f_1(x, \varepsilon^\mu \gamma) \equiv f_1(x, \varepsilon^\nu \gamma)$$

sustituyendo γ por $\gamma \varepsilon^{n-\mu}$, se tendría

$$\begin{aligned} \text{(llamando } \varepsilon^{n-\mu} = \varepsilon') \quad & f_1(x, \gamma) = f_1(x, \gamma \varepsilon') \\ \text{y sustituyendo } \gamma \text{ por } \gamma \varepsilon' & f_1(x, \gamma \varepsilon') = f_1(x, \gamma \varepsilon'^2) \\ \text{y análogamente} & f_1(x, \gamma \varepsilon'^2) = f_1(x, \gamma \varepsilon'^3) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Todas serían, pues, iguales a $f_1(x, \gamma)$ y podríamos escribir

$$f_1(x, \gamma) = \frac{1}{n} [f_1(x, \gamma) + f_1(x, \gamma \varepsilon') + \dots + f_1(x, \gamma \varepsilon^{n-1})]$$

y, por tanto,

$$(k_0 - \bar{k}_0) + (k_1 - \bar{k}_1) \gamma_1 + (k_2 - \bar{k}_2) \gamma_1^2 + \dots + (k_{n-1} - \bar{k}_{n-1}) \gamma_1^{n-1} = 0$$

ecuación de grado $n-1 < n$, de coeficientes en C_{k-1} que, por verificarse para el valor γ_1 raíz de la ecuación $x^n = c_{k-1}$ en C_{k-1} irreducible tiene todos sus coeficientes nulos (Art. 1.º, § 3, Corolario II), es decir,

$$k_0 = \bar{k}_0, \quad k_1 = \bar{k}_1, \quad \dots, \quad k_{n-1} = \bar{k}_{n-1}$$

Al ser en [3] reales los coeficientes, todas las restantes raíces x_i de $f(x)=0$ se podrán expresar análogamente por [3] sustituyendo γ_1 por γ_i .

Pero, por ser las restantes γ_i dos a dos imaginarias conjugadas también lo serán los restantes polinomios x_i [3], y por tanto:

En el caso I $f(x)=0$ tiene una sola raíz real y las restantes imaginarias conjugadas.

II. En este caso, adjuntemos a C_{k-1} además de $\gamma = \sqrt[n]{c_{k-1}}$ la raíz conjugada

$\bar{\gamma} = \sqrt[n]{\bar{c}_{k-1}}$. Al campo ampliado pertenece el número real $\gamma\bar{\gamma} = \Gamma = \sqrt[n]{c_{k-1} \cdot \bar{c}_{k-1}}$. Ahora bien, el campo ampliado $C'[C_{k-1}, \Gamma]$ no es precisamente $C''[C_{k-1}, \gamma, \bar{\gamma}]$ de modo que $f(x)=0$ reducible en $C_k[C_{k-1}, \gamma]$ y, por tanto, en C'' , puede no serlo en C' . Si lo fuera, estaríamos en el caso anterior por ser $c_{k-1} \cdot \bar{c}_{k-1}$ real.

Supongamos, pues, $f(x)=0$ irreducible en $C'[C_{k-1}, \Gamma]$ y sea la raíz real

$$x_1 = k_0 + k_1 \gamma_1 + \dots + k_{n-1} \gamma_1^{n-1}$$

que igualaremos a su conjugada

$$\bar{x}_1 = \bar{k}_0 + \bar{k}_1 \bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{k}_{n-1} \bar{\gamma}_1^{n-1}$$

o sea

$$k_0 + k_1 \gamma_1 + \dots + k_{n-1} \gamma_1^{n-1} = \bar{k}_0 + \bar{k}_1 \left(\frac{\Gamma}{\gamma_1}\right) + \dots + \bar{k}_{n-1} \left(\frac{\Gamma}{\gamma_1}\right)^{n-1} \quad [4]$$

Todas las cantidades de esta ecuación, excepto γ_1 , pertenecen al campo $C'[C_{k-1}, \Gamma]$ (por pertenecer c_{k-1}, \bar{c}_{k-1} al campo C_{k-1} y por tanto, a C').

Como la ecuación [4] en γ se satisface para la raíz γ_1 de la ecuación irreducible $x^n = c_{k-1}$ todas las raíces restantes la satisfarán también (Teor. Abel), y teniendo en cuenta que (*) $\Gamma: \bar{\gamma}_i = \gamma_i$, se tendrá:

$$k_0 + k_1 \gamma_i + \dots + k_{n-1} \gamma_i^{n-1} = \bar{k}_0 + \bar{k}_1 \bar{\gamma}_i + \dots + \bar{k}_{n-1} \bar{\gamma}_i^{n-1}$$

es decir,

$$x_i = \bar{x}_i$$

lo que prueba que *todas las raíces x son reales en el caso II* a menos que se reduzca al primero como hemos dicho.

(*) Γ es el cuadrado del módulo común a todas las γ_i y por eso es el mismo en todas $\Gamma = \gamma_1 \bar{\gamma}_1 = \gamma_2 \bar{\gamma}_2 = \dots$

Queda así demostrado el teorema de Kronecker que expresa una condición *necesaria* de resolubilidad por radicales, de sencilla comprobación y que permite construir fácilmente numerosas ecuaciones que no la cumplan y, por tanto, irresolubles por radicales.

6. Irresolubilidad de ecuaciones de grado superior al cuarto.—La tesis del teorema de Kronecker no la cumple de *un modo general* más que la ecuación de tercer grado que tiene *una sola raíz* real o las tres.

Para las ecuaciones de 5.º grado resulta fácil construir ecuaciones irreducibles con *tres raíces* reales y que, por tanto, no pueden ser resolubles por radicales.

Por ejemplo, en la ecuación $x^5 - ax - b = 0$ bastará elegir a y b de modo que

1.º sea $4^4 a^5 > 5^5 b^4$, con lo que sólo tendrá tres raíces reales (como se comprueba aplicando el teorema de Sturm).

2.º no sea b divisible por el cuadrado de ningún factor primo de a , con lo que se asegura su irreducibilidad (criterio de Eisenstein).

Análogamente, para $x^7 - ax - 1 = 0$ con $6^6 a^7 > 7^7 b^6$, etc. Podemos, pues, enunciar (Ruffini-Abel).

La ecuación general de grado $n > 4$ no es resoluble por radicales.

NOTA.—Dar una condición *necesaria* no es caracterizar las ecuaciones resolubles por radicales. La caracterización de las ecuaciones resolubles por radicales exige recursos más elevados (Teoría de Galois).

Aquí nos hemos limitado a probar la existencia de ecuaciones de grado superior al cuarto no resolubles y, por tanto, a negar la posibilidad de una resolución *general*.

ARTÍCULO 4.—TRASCENDENCIA DE e Y π

En las lecciones anteriores hemos expuesto la solución negativa que el Álgebra ha dado a varios problemas famosos en la historia de la Matemática.

Queda por tratar el problema, no menos famoso, de la *cuadratura del círculo*. Este problema quedó zanjado con la demostración de la trascendencia de π dada por primera vez por Lindemann en 1882. Posteriormente se han dado demostraciones simplificadas.

Procuraremos exponer a continuación una demostración lo más sencilla posible.

Por estar vinculada la trascendencia de π a la de e , demostraremos ambas simultáneamente (*).

1. Lemas preliminares.

LEMA I. Sea $\varphi(x)$ un polinomio cualquiera de grado m y coeficientes enteros

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \quad [1]$$

cuyas raíces x_1, x_2, \dots, x_m supondremos distintas de cero ($a_m \neq 0$) y no todas iguales.

Construyamos el polinomio

$$f(x) = \frac{a_0^\mu x^{p-1}}{(p-1)!} [\varphi(x)]^p \quad [2]$$

de grado $\mu = mp + p - 1$, y cuyo parámetro p entero *elegiremos luego convenientemente*, y demostremos las siguientes propiedades:

1.^a $f'(x_i) = f''(x_i) = \dots = f^{(p-1)}(x_i) = 0$

pues x_i es por lo menos raíz de orden p en $f(x)$.

2.^a $f^{(p)}(x_i), f^{(p+1)}(x_i), \dots, f^{(\mu)}(x_i)$

no son nulas a partir de un cierto orden (que será superior al p° si x_i es raíz múltiple de $\varphi(x)=0$) y *tienen sus coeficientes múltiplos de p* , porque en todos ellos existirán p (o más) factores enteros consecutivos cuyo producto es múltiplo de $p!$ y, por tanto, al dividir por $(p-1)!$ quedarán múltiplos de p .

3.^a $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(p-2)}(0) = 0$

por ser $x=0$ raíz de orden $p-1$

(*) Nos apoyamos de un lado en la demostración de Hurwitz para la trascendencia de e . (simplificada por REY PASTOR en su *Teoría de funciones reales*) y de otro en la demostración de WEBER sobre la trascendencia de π (reproducida en las *Questioni riguardanti de Enriques*) fundiendo, por nuestra cuenta, en una exposición única el tronco común de los razonamientos. Creemos conseguir con ello una notable economía de discurso

4.^a $f^{(p-1)}(0) = a_0^\mu a_m^p$
 por ser $\frac{a_0^\mu a_m^p x^{p-1}}{(p-1)!}$ el término de grado $p-1$.

5.^a $f^{(p)}(0), f^{(p+1)}(0) \dots f^{(\mu)}(0)$

son múltiplos de p , por las mismas razones expuestas en la propiedad 2.^a

LEMA II. Formemos un nuevo polinomio de grado μ sumando $f(x)$ y todas sus derivadas:

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(\mu)}(x) \quad [3]$$

En virtud de lo anterior, este polinomio tiene las siguientes propiedades:

a) Si las raíces x_i de $\varphi(x)=0$ son enteras, los valores $F(x_i)$ son números enteros múltiplos de p (por serlo los sumandos no nulos de que se compone, de la sucesión $f^{(p)}, f^{(p+1)}, \dots, f^{(\mu)}$) de donde:

Si las raíces x_i son enteras toda combinación lineal de las $F(x_i)$,

$$c_1 F(x_1) + c_2 F(x_2) + \dots + c_m F(x_m) \quad [4]$$

de coeficientes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ enteros, es un entero múltiplo de p .

b) Aun cuando x_i no sean enteras, es entera la suma

$$F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_m) \quad [5]$$

por ser función simétrica entera de grado μ de las x_i y, por tanto, función entera de grado μ de $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_m}{a_0}$ (*), y como todos los términos de $F(x)$ tienen el factor a_0^μ que aparece en $f(x)$ [2], la suma [5] es en definitiva función entera de a_0, a_1, \dots, a_m y, por tanto, es un número entero como estos coeficientes. Pero, por lo antes dicho, todos los coeficientes de las $f^{(p)}(x_i), f^{(p+1)}(x_i) \dots f^{(\mu)}(x_i)$ no nulos, que componen $F(x_i)$ son múltiplos de p ; luego:

Cualesquiera que sean las raíces x_i , la suma [5], $\Sigma F(x_i)$, es un número entero múltiplo de p .

c) Por lo visto en las propiedades 3.^a, 4.^a y 5.^a del lema anterior, $F(0)$ constará de varios sumandos nulos, otros múltiplos de p y uno solo

$$f^{p-1}(0) = a_0^\mu a_m^p$$

que no será divisible por p , si elegimos p primo mayor que a_0 y que a_m . Por tanto:

Existe una sucesión ilimitada de valores de p para los cuales $F(0)$ no es múltiplo de p .

(*) V. REY PASTOR: *Lecciones de Algebra*, Cap. V.

LEMA III. *La diferencia*

$$F(x) - e^x F(0) \equiv \varepsilon(x) \tag{6}$$

puede hacerse, para cada valor de x , tan pequeña como se quiera en valor absoluto, eligiendo p suficientemente grande.

Demostración.—Llamando $b_\mu, b_{\mu-1}, \dots$, los coeficientes de $f(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= b_\mu x^\mu + b_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} \\ f'(x) &= \mu b_\mu x^{\mu-1} + (\mu-1) b_{\mu-1} x^{\mu-2} + \dots + p b_p x^{p-1} + (p-1) b_{p-1} x^{p-2} \\ f''(x) &= \mu(\mu-1) b_\mu x^{\mu-2} + (\mu-1)(\mu-2) b_{\mu-1} x^{\mu-3} + \dots + p(p-1) b_p x^{p-2} + (p-1)(p-2) b_{p-1} x^{p-3} \\ &\dots \\ f^{(p-1)}(x) &= \mu(\mu-1)\dots(\mu-p+2) b_\mu x^{\mu-p+1} + \dots + (p-1)! b_{p-1} \\ f^{(p)}(x) &= \mu(\mu-1)\dots(\mu-p+1) b_\mu x^{\mu-p} + \dots + p! b_p \\ &\dots \\ f^{(\mu-1)}(x) &= \mu(\mu-1)\dots 2 b_\mu x + (\mu-1)! b_{\mu-1} \quad \text{(Subrayados los términos independientes cuya suma es } F(0)) \\ f^{(\mu)}(x) &= \mu! b_\mu \end{aligned}$$

Sumando ahora por columnas de abajo a arriba:

$$F(x) = \mu! b_\mu \sum_{s=0}^{\mu-\mu} \frac{x^s}{s!} + (\mu-1)! b_{\mu-1} \sum_0^{\mu-1} \frac{x^s}{s!} + \dots + p! b_p \sum_0^p \frac{x^s}{s!} + (p-1)! b_{p-1} \sum_0^{p-1} \frac{x^s}{s!}$$

pero
$$\mu! \sum_0^\mu \frac{x^s}{s!} = \mu! e^x - x^\mu \left[\frac{x}{\mu+1} + \frac{x^2}{(\mu+1)(\mu+2)} + \dots \right]$$

y análogamente para

$$(\mu-1)! \sum_0^{\mu-1} \frac{x^s}{s!}; \dots; (p-1)! \sum_0^{p-1} \frac{x^s}{s!}.$$

Sustituyendo y pasando al primer miembro la suma

$$e^x (\mu! b_\mu + (\mu-1)! b_{\mu-1} + \dots + (p-1)! b_{p-1}) = e^x F(0)$$

queda

$$\begin{aligned} F(x) - e^x F(0) &= - b_\mu x^\mu \left[\frac{x}{\mu+1} + \frac{x^2}{(\mu+1)(\mu+2)} + \dots \right] - \\ &- b_{\mu-1} x^{\mu-1} \left[\frac{x}{\mu} + \frac{x^2}{\mu(\mu+1)} + \dots \right] - \dots - b_{p-1} x^{p-1} \left[\frac{x}{p} + \frac{x^2}{p(p+1)} + \dots \right] \end{aligned}$$

El módulo de cada corchete es $< 1 + |x| + \frac{|x^2|}{2!} + \dots = e^{|x|}$.

Por tanto:

$$|F(x) - e^x F(0)| < e^{|x|} [|b_\mu| |x|^\mu + |b_{\mu-1}| |x|^{\mu-1} + \dots + |b_{p-1}| |x|^{p-1}] \quad [7]$$

Bastará, pues, demostrar que el polinomio del corchete que llamaremos $\psi(\rho)$, formado sustituyendo en $f(x)$ la variable y los coeficientes por sus módulos, puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo para cada $\rho = |x|$ el número p suficientemente grande.

Se consigue esto sencillamente comparando las funciones

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_0(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_m) \\ \Phi(\rho) &= |a_0|(\rho+\rho_1)(\rho+\rho_2) \dots (\rho+\rho_m) \quad \rho_i = |x_i| \end{aligned}$$

Los módulos de los coeficientes de φ (sumas de productos de x_i por a_0) no son mayores que los de Φ (sumas de productos de $|x_i|$ por $|a_0|$). Lo mismo acontecerá, pues, entre los módulos de los coeficientes de

$$f(x) = a_0^\mu x^{p-1} [\varphi(x)]^p : (p-1)!$$

módulos que son los coeficientes de $\psi(\rho)$, y los de la función:

$$|a_0|^\mu \rho^{p-1} [\Phi(\rho)]^p : (p-1)! = |a_0|^\mu |\Phi(\rho)| \frac{[\rho \Phi(\rho)]^{p-1}}{(p-1)!}$$

y como ésta tiende a cero al crecer p infinitamente, también tenderá a cero $\psi(\rho)$ y, por tanto $|\varepsilon(x)|$, como queríamos demostrar (6) y (7) (*).

Establecidos estos lemas, la demostración de la trascendencia de e y π resulta sencilla.

(*) (Simplificación de HURWITZ.) Para valores de x reales, únicos que se necesitan para demostrar la trascendencia de e , la demostración de este lema puede simplificarse aplicando, con Hurwitz, el teorema de los incrementos finitos a la función $e^{-x}F(x)$ entre 0 y x . Se obtiene, en efecto,

$$e^{-x} F(x) - F(0) = xe^{-\theta x} [F'(\theta x) - F(\theta x)] \quad 0 < \theta < 1$$

que multiplicada por e^x , se convierte en

$$F(x) - e^x F(0) = -xe^{(1-\theta)x} f(\theta x)$$

Ahora bien

$$f(\theta x) = \frac{a_0^\mu (\theta x)^{p-1}}{(p-1)!} [\varphi(\theta x)]^p = a_0^\mu \varphi(\theta x) \frac{[a_0^{\mu+1} \cdot \theta x \cdot \varphi(\theta x)]^{p-1}}{(p-1)!}$$

θ depende de la función F y, por tanto, de p , pero está comprendido entre 0 y 1; en consecuencia, para todo intervalo finito $-l < x < +l$ independiente de p , como es el constituido por la raíz de mayor valor absoluto de $\varphi(x)$ y su simétrica (en el que se hallan todas las demás) es $|\theta x \cdot \varphi(\theta x)| < M$ (acotado) y, por tanto, $f(\theta x)$ podrá hacerse tan pequeño como se quiera en este intervalo eligiendo p suficientemente grande, mientras $xe^{(1-\theta)x}$ se conserva finito, con lo que queda demostrado el lema en el intervalo en que únicamente se aplica (v. § 2).

Desgraciadamente, para demostrar la trascendencia de π hay que razonar en el campo complejo, y por eso hemos dado una demostración aritmética basada en el desarrollo de e^x .

2. Transcendencia de e .—Si e fuese raíz de una ecuación algebraica de coeficientes racionales, lo sería de otra de coeficientes enteros equivalentes, es decir, se verificaría una cierta igualdad de la forma

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \dots + c_m e^m = 0, \quad (c_0 \dots c_m \text{ enteros}) \quad [8]$$

Construiríamos entonces la función $\varphi(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-m)$, es decir, tomando $a_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2 \dots x_m = m$. Acto seguido construiríamos las funciones $f(x)$ y $F(x)$ según [2] y [3] adoptando para valor de p un número primo de la sucesión que verifica el lema II, c), que fuera $>c_0$ y lo suficientemente grande para hacer (lema III) la suma $c_1 \varepsilon(1) + c_2 \varepsilon(2) + \dots + c_m \varepsilon(m)$ en valor absoluto menor que la unidad.

Entonces, aplicando la relación [6] para $x = 1, 2, 3, \dots, m$ y sumando las igualdades resultantes después de multiplicarlas respectivamente por c_1, c_2, \dots, c_m , y teniendo en cuenta [8], resultaría:

$$c_1 F(1) + c_2 F(2) + \dots + c_m F(m) + c_0 F(0) = c_1 \varepsilon(1) + c_2 \varepsilon(2) + \dots + c_m \varepsilon(m)$$

y, por tanto,

$$|c_1 F(1) + c_2 F(2) + \dots + c_m F(m) + c_0 F(0)| < 1$$

lo que es imposible por ser la suma de los m primeros sumandos múltiplo de p (lema II, a), y no serlo el último, dada la elección de p .

3. Transcendencia de π .—Si π es raíz de una ecuación algebraica $P(x) = 0$, de coeficientes racionales, será $i\pi$ raíz de la transformada $\psi_1(z) = 0$ mediante el cambio $z = ix$. Sean z_1, z_2, \dots, z_n sus raíces, entre las que figura $i\pi$. Se sabe que $1 + e^{i\pi} = 0$; por tanto:

$$(1 + e^{z_1})(1 + e^{z_2}) \dots (1 + e^{z_n}) = 0$$

es decir,

$$1 + \sum e^{z_i} + \sum e^{z_i+z_j} + \sum e^{z_i+z_j+z_k} + \dots + 0$$

Las $\frac{n(n-1)}{2}$ sumas $z_i + z_j$ son a su vez raíces de otra ecuación $\psi_2(z) = 0$

cuyos coeficientes serán funciones simétricas de las z_i y, por tanto, números también racionales (complejos) (funciones racionales de los coeficientes de ψ_1).

Análogamente, las $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ sumas $z_i + z_j + z_k$ son raíces de otra ecuación de coeficientes racionales $\psi_3(z) = 0$.

Si π es algebraico se verificará, pues, una igualdad de la forma:

$$1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + \dots + e^{\zeta_h} = 0 \quad [9]$$

cuyos exponentes $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ son las raíces de una ecuación algebraica de coeficientes racionales

$$\psi_1(z)\psi_2(z)\psi_3(z) \dots = 0 \quad [10]$$

Con objeto de simplificar los razonamientos agrupemos en [9] todos los términos correspondientes a las raíces nulas de [10] si las hay. Supongamos que sea $c-1$ el número de ellas y designemos con x_1, x_2, \dots, x_m las raíces restantes. Entonces se verificará la relación:

$$c + e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_m} = 0 \quad (c \text{ entero}) \quad [11]$$

siendo x_1, x_2, \dots, x_m las raíces de la ecuación de coeficientes racionales que resulta de dividir [10] por z^{c-1} ; sea esta ecuación (volviendo a designar por x la variable)

$$\varphi(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad (a_m \neq 0) \quad [12]$$

en ella supondremos ya los coeficientes enteros (por multiplicación conveniente).

En resumen, si π fuese algebraico se verificaría una cierta relación [11], cuyos exponentes son las raíces (reales o complejas) de [12]

Pero en tal caso formaríamos con esta $\varphi(x)$ las funciones $f(x)$ y $F(x)$ según [2] y [3] eligiendo un número primo p de la sucesión que cumple el lema II, c, y además que fuera $>c$ y lo bastante grande para que la suma $\varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2) + \dots + \varepsilon(x_m)$ sea menor que la unidad. (Lema III.)

Entonces, aplicando la relación [6] para $x=x_1, x=x_2, \dots, x=x_m$ y sumando, teniendo en cuenta [11], resultaría:

$$|F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_m) + cF(0)| < 1$$

y, por tanto,

$$|F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_m) + cF(0)| < 1$$

lo que es imposible por ser la suma de los m primeros sumandos un múltiplo de p (Lema II, b) y no serlo el último, $cF(0)$ dada la elección de p

4. Imposibilidad de la cuadratura del círculo.—En resumen, el número π no puede obtenerse como raíz de ninguna ecuación algebraica de coeficientes racionales y, por consiguiente, no será posible obtenerlo como irracional cuadrático (Art. 2.º, § 5), es decir, no será posible construir un segmento de longitud π con la regla y el compás a partir del segmento unidad, o el segmento πr a partir del segmento r .

Con ello queda probado que con la regla y el compás.

1.º No es posible rectificar la circunferencia.

2.º No es posible cuadrar el círculo, es decir, hallar un segmento a que verifique $a^2 = \pi r^2$, pues al ser a racional, o irracional cuadrático respecto de r , habría de serlo asimismo π .

Apéndice II.—SOBRE LA INDEMOSTRABILIDAD DEL POSTULADO DE EUCLIDES

1. Planteamiento de la cuestión.—La primera exposición racional de la Geometría se debe a Euclides. Su sistema de axiomas, aunque imperfecto, marcó la pauta que la escuela moderna no ha hecho más que perfeccionar. Junto a sus defectos, comentados oportunamente en el tomo I, contiene el sistema euclídeo, entre otros, un acierto incommovible: el llamado Postulado del paralelismo, que enunció en la siguiente forma:

Si una línea recta, corta a otras dos, formando ángulos internos del mismo lado, cuya suma sea menor que dos ángulos rectos, estas dos rectas prolongadas por dicho lado se cortan.

Según tuvimos ocasión de probar en el tomo I (lección 10, § 6) este postulado es equivalente al axioma IV del paralelismo:

Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella.

Llamó poderosamente la atención de los seguidores y comentadores de Euclides el carácter menos intuitivo del tal postulado y el parco uso que de él hace, trasluciendo un claro propósito de eludirlo en lo posible (*). Ello induce a pensar si intentaría en vano demostrarlo y se convenciera al fin de su imposibilidad, insertándolo junto a los demás postulados entre los que indudablemente desentona.

Sea como fuere, el hecho excitó el deseo de los Matemáticos posteriores de corregir esta aparente laguna, buscando afanosos una demostración de tal postulado. Más de veinte siglos de historia matemática llenan estos inútiles afanes; al fin se vino a dar la razón a Euclides. Su postulado no tiene demostración posible.

Pero ¿cómo se demuestra que no es demostrable? He aquí lo que brevemente deseamos poner al alcance del lector de este Apéndice. Ante todo, ¿qué es lo que entendemos hoy al decir que el Axioma IV (equivalente el de Euclides) no es demostrable? Sencillamente, que *no puede establecerse como consecuencia lógica estricta de los axiomas restantes, es decir, de los axiomas de incidencia, ordenación, congruencia y continuidad.*

Claro es que si en los razonamientos introducimos implícitamente verdades equivalentes o más complejas que la que se trata de probar, el razonamiento nos devolverá dicha verdad con una apariencia de demostración totalmente falsa. Ese es el sofisma de todas las demostraciones directas que se han intentado, engaño en el que el genio de Euclides no cayó.

A comienzos del siglo XVIII los Matemáticos empezaron a abandonar los propósitos de demostración directa e intentaron la demostración indirecta del

(*) Como lo prueba el hecho de no hacer uso de él hasta la proposición 29, lo que le obliga a demostrar primero que el ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los internos no adyacentes (proposición 16) cuando más tarde prueba (proposición 32) que es igual a su suma.

mismo, es decir, por reducción al absurdo. Con la negación del Postulado de Euclides trataron de llegar a dos proposiciones contradictorias y empezaron a tejer teoremas y más teoremas no euclídeos, sin llegar a contradicción alguna entre los mismos. Se edificaron así, como producto residual de un vano empeño, las Geometrías no euclídeas, conquista del conocimiento humano que un siglo después había de tener aplicaciones.

La indemostrabilidad del Postulado de Euclides se establece precisamente construyendo uno de tales sistemas y comprobando su coherencia lógica. Son varias las demostraciones que en tal sentido se han ideado. En el *Traité de Géométrie*, de Rouché Comberousse, puede ver el lector una elegante demostración debida a la pluma de Poincaré. Por parecernos más rápida y sencilla, nosotros preferimos seguir, con Enriques, la línea de demostración proyectiva fundada en los trabajos de Cayley sobre las propiedades geométricas del plano en relación con una cónica fundamental (o del espacio en relación con una cuádrica) y cuyo nexo con la Geometría no euclídea de Lobatschewski fué visto por Klein. Pero antes conviene decir dos palabras acerca de:

2. El espacio intuitivo y el espacio abstracto.—Cabén dos actitudes intelectuales en la admisión de los axiomas de la Geometría:

Actitud concreta o intuitiva.—Los axiomas se interpretan como propiedades de ciertos entes concretos (puntos, rectas, planos) que, aunque no se definen explícitamente, existen en nuestra intuición como substratum del espacio físico sensible. Los axiomas no hacen más que traducir las propiedades que la intuición nos dicta para los mismos. Desde el primer momento nos referimos a nuestro *espacio intuitivo* y no hacemos más que darle una estructura lógicamente sólida.

Actitud abstracta.—Los entes que los axiomas relacionan están desprovistos, *a priori*, de toda significación intuitiva. Razonamos en un *espacio abstracto*, sin figuras ni imagen intuitiva de ellas. Nos quedamos solamente con el armazón lógico de los razonamientos y de las proposiciones, dejando este armazón apto para ser aplicado a todo conjunto de entes concretos para los cuales se reconozca válido el cumplimiento de los axiomas primeros.

La Geometría abstracta así establecida, contiene en esencia múltiples Geometrías concretas, tantas como interpretaciones podamos dar a los conceptos primitivos en forma que cumplan los axiomas de partida. Se comprende por ello el gran interés que ha tenido razonar con absoluto rigor lógico, es decir, de manera que sólo entraran en juego los referidos axiomas, único modo de asegurar la generalidad del edificio construído. Como premio al celo rigorista obtenemos en esta forma una infinita posibilidad de aplicaciones con una suprema economía de razonamiento.

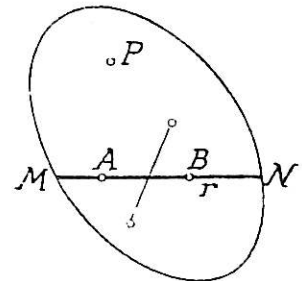
Vamos a colocarnos ahora, sólo por un momento, en esta segunda actitud y a despojar de su significación intuitiva los conceptos primarios, *para darles inmediatamente otra significación concreta* con la que podamos especular con miras al fin propuesto.

3. El plano métrico-proyectivo interior a un cónica.—Razonemos en el espacio proyectivo euclideo construído en el Capítulo IV, lección 13, es decir, el espacio en el que hemos desarrollado la teoría de cónicas. Consideremos una cónica fija en el plano que llamaremos *cónica absoluta* y que para mayor sencillez supondremos elipse, y consideremos el conjunto de todos sus puntos interiores (contorno excluído).

Llamemos a dicho conjunto «plano».

Llamemos «punto» a todo punto perteneciente a dicho conjunto.

Llamemos «recta» a toda cuerda de la cónica excluídos los extremos (*MN* en la figura).



Conservando las nociones de *orden* y *sentido* usadas hasta ahora, es fácil comprobar que en nuestro nuevo «plano» se cumplen las propiedades contenidas en los axiomas de incidencia y ordenación, a saber (v. tomo I):

I, 1.—*Existen infinitos entes llamados «puntos» cuyo conjunto forma el llamado «plano».*

I, 2.—*Por dos «puntos» distintos pasa una «recta» y solo una.*

II, 1.—*La «recta» es un conjunto linealmente ordenado, abierto y denso. Puesto que no hay en ella puntos consecutivos, ni primero ni último punto (por eso se han excluído los extremos).*

La ordenación de los «puntos» de la «recta» nos permite definir como en el tomo I la «semirecta» y el «segmento». Por ejemplo: la «semirecta» *AM* de la figura (segmento *AM* con el extremo *M* excluído); el «segmento» *AB* que no difiere del segmento ordinario.

Se demuestra además sin dificultad:

II, 2.—*Toda «recta» r del «plano» establece una clasificación de los puntos no contenidos en ella en dos regiones tales que: Todo «punto» del «plano» no situado en r pertenece a una u otra de ellas, y el «segmento» que une dos «puntos» de distinta (la misma) región corta (no corta) a r.*

Cada una de dichas regiones, unida a la recta *r*, se llamará *semiplano*. Un «semiplano» es, pues, en nuestro ejemplo, un segmento elíptico con exclusión de los puntos de la elipse límite.

Estamos ahora en condiciones de definir el *ángulo* como interferencia de «semiplanos» o como conjunto de «semirectas» («rayos») partiendo de un «punto», vértice, etc. Repitiendo paso a paso los razonamientos de las tres primeras lecciones del tomo I, podemos dar por establecidas en el nuevo «plano» todas las propiedades en ellas contenidas, en particular las relativas a separación de puntos y rayos, definición de polígonos, etc

Establecidos los conceptos y propiedades de incidencia y ordenación es fácil comprobar que se verifica en nuestro «plano» el *axioma VI de continuidad* (Tomo I, lección 13) que no repetimos por brevedad.

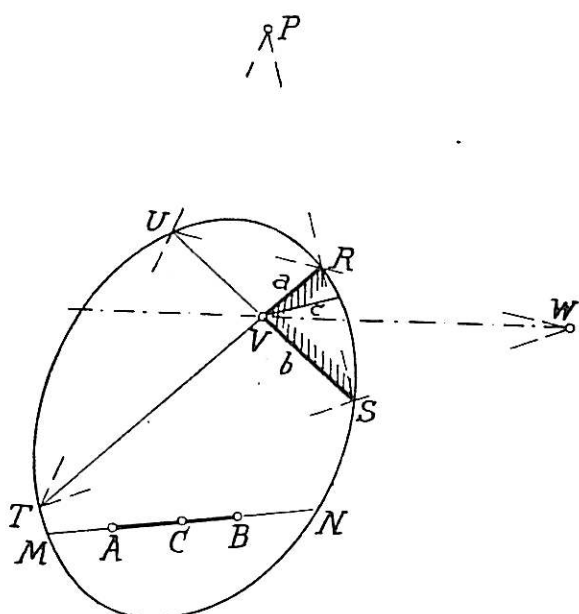
Llamemos ahora *movimiento* en nuestro «plano» a toda *homografía* que transforme la *cónica absoluta* en sí misma, y por tanto el «plano» en sí mismo. Recordando las propiedades de la homografía establecidas en la lección 21

comprobaremos fácilmente que se verifican en la nueva acepción de la palabra «movimiento» las propiedades contenidas en los axiomas III de la lección 4.^a (Tomo I), a saber:

III, 1.—Los «movimientos» del «plano» son transformaciones puntuales biunívocas del mismo.

III, 2.—Todo movimiento conserva las relaciones de incidencia y ordenación de puntos.

III, 3.—Ningún movimiento puede transformar un segmento AB en una parte del mismo BC (C interior a AB), o un ángulo ab en una parte del mismo bc (c interior a ab).



En efecto, en el primer caso, en la homografía que transformara AB en BC se habría de verificar

$$(MABN) = (NBCM) = (MCBN)$$

lo que exige $C \equiv A$.

En el segundo caso, consideremos la homología involutiva cuyo centro es el punto P de intersección de la recta RS que une los extremos de a y b con la que une los extremos T, U de las semirectas opuestas, y cuyo eje es la recta VW que une los otros dos puntos diagonales V, W del cuadrivértice $URST$.

En esta homología la cónica se corresponde consigo misma; a la semirecta a le corresponde la b y al «semiplano» ab le corresponde el ba que

es el bc . Pero, en virtud de lo dicho en §§ 8 y 9, lecc. 32, la correspondencia entre estos elementos basta para definir unívocamente la homografía; de otro modo: no existe más que un «movimiento» en el que se correspondan estos elementos, y como a y b se corresponden doblemente, el homólogo del «ángulo» ab no puede ser otro que ba y no bc .

Finalmente se verifica:

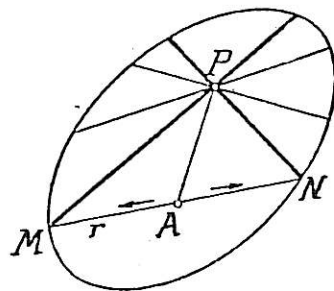
III, 4.—El producto de dos «movimientos» es otro. Puesto que es una homografía que dejará invariante la cónica absoluta.

III, 5.—La transformación inversa de un «movimiento» es también «movimiento».

III, 6.—Existe un movimiento y solo uno que transforma una semirecta r en otra r' y un determinado semiplano α limitado por la recta primera en un determinado semiplano α' limitado por la segunda. (Recuérdese nuevamente lo demostrado en §§ 8 y 9, lecc. 32). Llamaremos *directo* al «movimiento» si conserva el sentido, es decir, si el semiplano α' está del mismo lado de r' que lo está α de r , e *inverso* en caso contrario (v. Tomo I, lecc. 3.^a, § 8).

Vemos en resumen, que los nuevos «movimientos» verifican las mismas propiedades que los movimientos definidos en el tomo I. Por consiguiente, si definimos como *congruentes* o *iguales* dos figuras interiores a la cónica absoluta, cuando son homólogas en una de tales homografías, podrá repetirse, sin más, todo el contenido de las lecciones 5.^a, 6.^a y 8.^a referente a propiedades de las simetrías, perpendicularidad, giros y aun algunas de las propiedades de las traslaciones, pero en cambio el axioma fundamental del paralelismo que da carácter distintivo al grupo de las traslaciones en la geometría euclídea deja de verificarse.

La propiedad: *Por un punto exterior a una recta no se puede trazar más que una recta que no la corte (paralela)*, debe sustituirse aquí por el siguiente conjunto de hechos: Por un punto exterior a una recta podemos trazar infinitas rectas no secantes a ella. Entre dichas no secantes existen dos de significación privilegiada, las que unen P a los extremos de la cuerda MN que define r . Tales rectas PM , PN pueden considerarse como posiciones límites de las que unen P con un punto variable A en r al acercarse dicho punto a los extremos inaccesibles de la misma.



Por tal motivo (siguiendo la denominación de Lobatschewski) llamaremos a dichas rectas *paralelas* a r ; de otro modo: Llamaremos «rectas paralelas» las definidas por dos cuerdas con un extremo común. Con esta definición podemos resumir:

Por un punto P exterior a una recta r se puede trazar dos paralelas a ella e infinitas no secantes.

A partir de este momento comienza la divergencia entre la Geometría que estamos creando ahora en el «plano» interior a la elipse, y la Geometría en el plano euclídeo estudiada en el tomo I, pero si consecuente es la Geometría euclídea, igualmente consecuente consigo misma es la otra.

4. Indemostrabilidad del postulado de Euclides.—Recapitulemos los resultados a que hemos llegado:

Partimos en el tomo I de ciertos elementos llamados *puntos*, *rectas* que verifican un conjunto de axiomas, entre ellos el axioma V de paralelismo, constituyendo un espacio llamado *euclídeo*. Por adjunción a éste de ciertos elementos impropios hemos creado en este tomo el *espacio proyectivo euclídeo*. En este espacio acabamos de descubrir un conjunto de entes que, llamados asimismo *puntos*, *rectas*, siguen cumpliendo todos los axiomas de incidencia, orden, congruencia y continuidad, *pero no el axioma V del paralelismo*.

Ahora bien, si fuese posible demostrar el axioma V como consecuencia lógica de los demás, tal resultado nos llevaría a una flagrante contradicción, es decir, nos llevaría a la consecuencia de que el conjunto de los axiomas restantes es incompatible. El dilema es, pues, éste: o el conjunto de los axiomas restantes es incompatible, o el axioma V es independiente de ellos.

En resumen: *La existencia del espacio euclídeo entraña como consecuencia la coexistencia de espacios no euclídeos*, y en tal sentido queda probada la indemostrabilidad del postulado de Euclides.

NOTA.—Nos hemos limitado á razonar en el plano, pero la Geometría métrico-proyectiva así establecida se generaliza al espacio razonando de modo parecido en el interior de una cuádrlica (Cayley). Se comprueba que el axioma de paralelismo es asimismo independiente de los de incidencia y separación en el espacio, axiomas que no hemos hecho entrar en juego en las consideraciones precedentes para mayor brevedad en los razonamientos.

5. Las simetrías y la perpendicularidad en el plano métrico-proyectivo.

Aunque el propósito fundamental de este apéndice está ya logrado, a título de curiosidad, y con objeto de dar una ligera idea al lector de cómo se desenvuelve la Geometría iniciada, veamos el significado de algunos movimientos especiales en el «plano» que acabamos de crear. Empecemos analizando en qué se convierten aquí las simetrías y la perpendicularidad estudiadas en la lección 5.^a del tomo I.

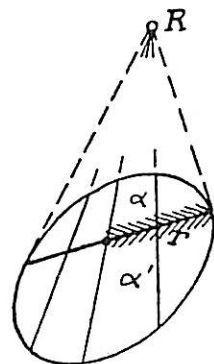
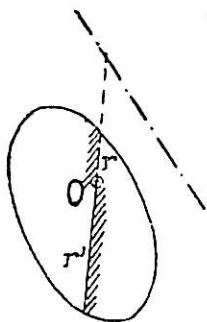
Una «simetría central» se definirá igual que allí, como un «movimiento» directo en el que se corresponden dos semirrectas opuestas Or y Or' . Repitiendo los razonamientos de la lección 5.^a veremos que todas las rectas del haz O son dobles y, por tanto, que dicho «movimiento» es una homología de centro O , y cuyo eje (recta doble) no puede ser otro que la polar de O . Se trata en resumen de una homología involutiva de centro O en la que es doble la cónica en cuestión.

Análogamente definirá el lector la «simetría axial» como «movimiento» inverso que transforma una semirrecta r en sí misma, y un semiplano α en el opuesto α' y comprobará que es la homología involutiva de eje r y centro en su polo R (*).

Todas las rectas que pasan por dicho polo se transforman en sí mismas en dicha simetría y son las «perpendiculares» a r en nuestra nueva Geometría. «Rectas perpendiculares» en la Geometría interior a una cónica, son, pues, «rectas» conjugadas respecto de dicha cónica.

De acuerdo con estas definiciones se llamará aquí *punto medio* de un segmento AB el punto doble, interior a la cónica, en la involución en la que son homólogos A y B , así como los puntos M , N extremos de la cuerda AB , y se llamará *mediatriz* de AB la recta que une el punto medio de AB con el polo de la recta AB . Se llamará *bisectriz* de un ángulo ab al eje de la simetría que lo invierte, es decir, el eje de la homología involutiva que transforma ab en ba , construída en la demostración de III, 3 del § 3. Con esta base dejamos a cargo del lector aplicar las definiciones y generalizar las

(*) La única diferencia entre la simetría central y la axial es, pues, que en la primera el centro de homología es interior y el eje exterior, y en la segunda el centro es exterior y el eje secante.



propiedades contenidas en las lección 4.^a, 5.^a y 6.^a del tomo I, siguiendo paso a paso los razonamientos allí desarrollados.

En particular, de la simetría central se desprende la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice.

6. Giros y traslaciones en el plano métrico-proyectivo.—Análogamente a lo hecho en el tomo I, llamaremos aquí:

Giro alrededor de un punto O , llamado *centro*, a todo «movimiento» con el punto doble O

Traslación a lo largo de una «recta» r , llamada *guía*, a todo «movimiento» con la recta doble r

Pero si es doble $\left\{ \begin{array}{l} \text{un punto} \\ \text{una recta} \end{array} \right\}$ lo es su $\left\{ \begin{array}{l} \text{polar} \\ \text{polo} \end{array} \right\}$ por consiguiente, en nuestro nuevo «plano», tanto los giros como las traslaciones son homografías con un punto doble y una recta doble no incidentes con la cónica y la única diferencia que existe entre unos y otras es que: en los giros el punto doble, *centro*, es interior y la recta doble exterior, mientras en las traslaciones la recta doble, *guía*, es cuerda de la cónica, y el punto doble es exterior.

Todos los giros con el mismo centro O forman grupo, y todas las traslaciones con la misma guía r forman asimismo grupo (como en el plano euclídeo), pero ya aquí *no forman grupo todas las traslaciones* con distintas guías (como lo formaban en el plano euclídeo), del mismo modo que tampoco lo forman todos los giros del plano con centros distintos. Basta, para comprenderlo, multiplicar un giro que transforme la «recta» a en a' por otro de centro distinto que transforme a' en a , obtendremos así una traslación con la guía a , y análogamente multiplicando dos traslaciones, una que transforme un punto A en A' y otra, de distinta guía, que transforme A' en A obtendremos un giro.

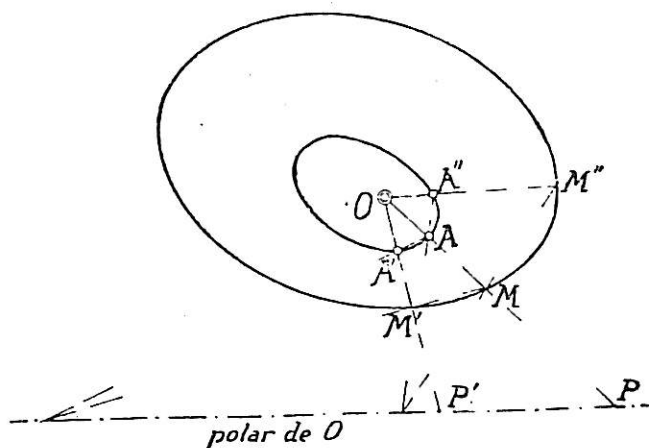
Esta bella simetría entre las propiedades de los giros y de las traslaciones se pierde en el plano euclídeo, debido a la admisión del axioma de paralelismo.

7. Circunferencias e hiperciclos en el plano métrico-proyectivo.—

Puesto que todos los giros con el mismo centro O forman grupo, podemos considerar el concepto *trayectoria* de dicho grupo, es decir, el lugar geométrico de los homólogos A', A'', \dots de un punto A en los infinitos giros del grupo. Por definición de congruencia o igualdad se verificará $OA = OA' = OA'' = \dots$, por ser segmentos homólogos en dichos «movimientos», lo que autoriza a llamar *circunferencias* a dichas trayectorias. Pero en tales movimientos (homografías) se verificará

$$(OAMP) = (QA'M'P') = \dots$$

por ser doble la polar de O (v. fig.); de donde resulta que AA' y MM' concu-

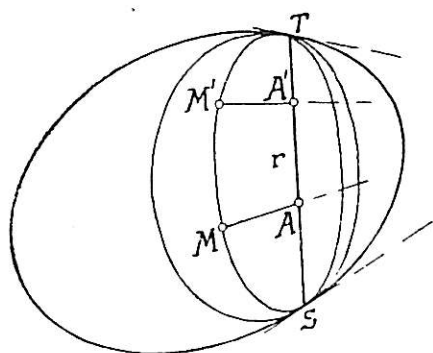


rren con PP' , y lo mismo AA'' y MM'' , ..., es decir, el lugar en cuestión es una cónica homológica de la absoluta en una homología cuyo centro es O y cuyo eje es la polar de O . En resumen:

Las trayectorias del grupo de giros concéntricos en O , son cónicas invariantes en ellos (que llamaremos «circunferencias proyectivas» de centro O), homológicas de la cónica absoluta respecto del centro O y de su polar como eje.

Análogamente: *Las trayectorias del grupo de traslaciones con una misma guía r son cónicas homológicas de la absoluta respecto de la recta r como eje de homología y de su polo R como centro.* Son, por tanto, cónicas tangentes a la absoluta en los extremos T y S de r (bitangentes).

Considerando una de dichas traslaciones AA' , por ejemplo (que transforma

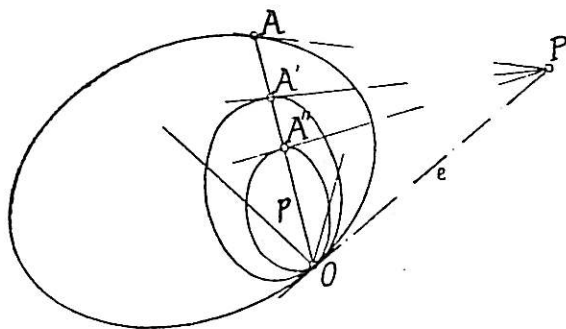


la «semirrecta» AT en $A'T$ conservando los «semiplanos» a uno y otro lado), las perpendiculares RA , RA' a r , homólogas en dicha traslación cortarán a una cualquiera de esas trayectorias en MM' (del mismo lado de r) tales que $MA = M'A'$, por ser dichos segmentos homólogos en la traslación. Las trayectorias aparecen así como lugares geométricos de

puntos equidistantes de la guía (entendiendo por distancia de un punto M a una recta r el segmento de perpendicular MA a ella). Vemos, pues, que en esta nueva Geometría tales figuras ya no son rectas; corresponden a los llamados *hiperciclos* en la Geometría de Lobatschewski y desempeñan respecto de las «traslaciones» papel análogo al que desempeñan las «circunferencias» respecto de los «giros».

8. Los oriciclos.— Junto a las «circunferencias» o hiperciclos obtenidos por transformación homológica de la cónica absoluta respecto de centros y ejes no incidentes con ella, cabe considerar otras cónicas homológicas en homologías que tengan por centro un punto cualquiera O de la cónica y por eje consiguiente la tangente en él.

Para cada centro O y eje e así elegidos tenemos infinidad de cónicas homológicas, con la propiedad de que toda recta p que pase por O (recta que será doble en todas estas homologías) tiene el mismo polo P , situado en e , respecto de todas las cónicas. De otro modo: Todas las tangentes en los puntos A' , A'' , ... correspondientes a uno mismo A de la cónica absoluta son conjugadas de OA en ésta, es decir, son las «perpendiculares» a OA . Tales curvas, perpendiculares en cada punto a las «paralelas» de un haz de vértice O , son las llamadas por Lobatschewski *oriciclos*.

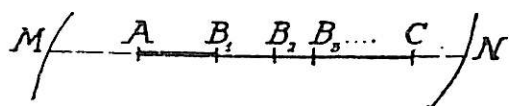


grafía «movimiento» que transforma dicha cónica en sí misma. Pero esta razón doble no tiene la propiedad aditiva, sino la multiplicativa, es decir:

$$(ABMN) \cdot (BCM N) = \left(\frac{AM}{AN} : \frac{BM}{BN} \right) \left(\frac{BM}{BN} : \frac{CM}{CN} \right) = \frac{AM}{AN} : \frac{CM}{CN} = (ACMN)$$

Bastará, pues, adoptar como medida del segmento AB un número proporcional al logaritmo de la razón doble $(ABMN)$.

Al mismo resultado se llega repitiendo paso a paso las operaciones de medida (Tomo I) interpretadas aquí según las nuevas acepciones. Así, por ejemplo, para medir el segmento AC



con el AB_1 tomado como unidad, «traslademos» AB_1 las veces necesarias hasta alcanzar C , es decir, hallemos el homólogo B_2 de B_1 en la traslación AB_1 , luego el B_3 homólogo de B_2 en la misma traslación, ... Si B_n coincide con C diremos que n es

la medida de AC con la unidad AB_1 . Pero por el carácter multiplicativo de la razón doble, se tiene

$$(AB_1MN)(B_1B_2MN)(B_2B_3MN) \dots (B_{n-1}B_nMN) = (AB_nMN) = (ACMN)$$

y, por ser iguales las razones dobles multiplicadas (ya que son características de una misma proyectividad, la definida por la «traslación» $\overline{AB_1}$), será

$$(AB_1MN)^n = (ACMN)$$

La medida n del segmento AC , en este caso entera, es, pues, el exponente a que hay que elevar la razón doble correspondiente al segmento unidad para obtener la razón doble $(ACMN)$ correspondiente al segmento medido; y es, por tanto, proporcional al logaritmo de dicha razón doble en cualquier sistema de logaritmos.

Sin gran dificultad se generaliza este resultado para n no entero.

Una definición análoga se establece para los ángulos. Se obtiene con todo ello un tipo de Geometría no euclídea, idéntica a la que los matemáticos Lobatschewski y Bolyai construyeron (con recíproca independencia) a comienzos del siglo pasado, y llamada, por Klein, Geometría hiperbólica. En esta Geometría, la suma de los «ángulos» de todo «triángulo» es menor que dos rectos.

Y con esto damos por terminado el breve panorama de Geometría métrica en el interior de una cónica, con el cual no hemos pretendido más que evidenciar ante el lector la indemostrabilidad del postulado de Euclides y guiar sus primeros pasos por los espacios no euclídeos.

11. La geometría de la radiación.—Se obtiene una Geometría no euclídea de otro tipo, que cumple todos los axiomas menos el del paralelismo y el carácter abierto de la recta, llamando:

«Plano» a una radiación de vértice propio O .

«Punto» a toda recta de esta radiación.

«Recta» a todo plano de la misma.

«Segmento» a todo ángulo (completo) de ella. (Por el carácter cerrado de la recta no existen en este «plano» semirectas.)

«Ángulo» a todo diedro (completo) de la misma.

«Triángulo» a todo triedro (completo) de vértice O .

«Movimiento» a todo movimiento de la radiación con el punto fijo O Etc.

En tal Geometría es fácil verificar el cumplimiento de todos los axiomas I a IV y VI, excepto el mencionado carácter abierto de la «recta». En cuanto al axioma del paralelismo es palpable su incumplimiento, por cuanto: Dos planos de la radiación («rectas») tiene siempre una recta («punto») común.

No existe en esta Geometría *paralelismo*, dos «rectas» se cortan siempre, y constituye la imagen más sencilla del tipo de Geometría no euclídea estudiada por Riemann y designada por Klein con el nombre de *Geometría elíptica*. En ella la suma de los «ángulos» de un «triángulo» es *mayor* que un llano (recuérdese la suma de los diedros de un triedro).

12. Sistematización de las tres geometrías según Klein.—El estudio sintético comparativo de las tres Geometrías elípticas, hiperbólica y euclídea en una superior unidad de conjunto, establecido a través de la Geometría proyectiva, fué hecho genialmente por Klein, quien demostró con ello la independencia de la Geometría proyectiva del postulado de Euclides. Como dijimos en la lección 13 de este tomo (v. Nota), a Klein se debe la idea de construir el espacio proyectivo al margen de toda noción de paralelismo, postulando axiomas de incidencia y ordenación en una región limitada de espacio y ampliando dicho espacio con la agregación de ciertos «puntos ideales o impropios», definidos por radiaciones de vértice inaccesible. Una vez creado así el espacio proyectivo, si queremos construir una métrica en él, hemos de añadir a los axiomas de partida, los de movimiento, con los cuales se define la perpendicularidad y se establece una correspondencia biunívoca entre todo plano y la radiación de rectas perpendiculares (de vértice propio o ideal), que constituye una polaridad llamada absoluta por conservarse invariante respecto a todos los movimientos. Se demuestra entonces que la cuádrlica doble de dicha polaridad no puede ser sino: 1.º, una cuádrlica real no reglada; 2.º, una cuádrlica imaginaria; 3.º, una cuádrlica degenerada. La Geometría métrica, filial de la proyectiva, aparece así como conjunto de propiedades de las figuras que permanecen invariantes en todas las transformaciones que dejan inalterable la polaridad absoluta, y, según la naturaleza de la cuádrlica doble de dicha polaridad, surgen las tres ramas métricas conocidas:

- 1.ª La métrica de Lobatschewski-Bolyai. Llamada por Klein hiperbólica.
- 2.ª La métrica de Riemann. Llamada por Klein elíptica.
- 3.ª La métrica euclídea. Llamada por Klein parabólica.

13. El mundo físico no euclídeo de Poincaré.—Ya hemos citado al comienzo de este artículo la interpretación dada por Poincaré a la Geometría no euclídea hiperbólica, con objeto de demostrar la indemostrabilidad del postulado de Euclides. La hallará el lector en la Nota II del tomo II del «Tratado de Geometría», de Rouché y Comberousse.

Poincaré considera el espacio interior a una esfera *absoluta* y llama «plano» al casquete interior de toda superficie esférica ortogonal a la absoluta, y «recta»

al arco interior de toda circunferencia ortogonal a la misma. Considera, por fin, en dicho espacio, como transformaciones equivalentes al «movimiento» todas las inversiones en las que permanece invariable la esfera absoluta. Con tales convenios y los que de ellos resultan para los conceptos métricos de igualdad, medida, etc., logra probar la referida indemostrabilidad, construyendo en nuestro espacio euclídeo un nuevo ejemplo de Geometría no euclídea. Pero Poincaré ha completado esta imagen geométrica con una sugestiva interpretación física, que transcribimos por su belleza (*):

Imaginemos, dice, una esfera S y en su interior un medio cuyo índice de refracción y temperatura son variables con la distancia ρ al centro, según las leyes:

$$\text{Temperatura} = R^2 - \rho^2, \text{ índice de refracción} = \frac{1}{R^2 - \rho^2} \text{ (} R \text{ radio de la esfera).}$$

Supongamos sumergido en este medio un mundo poblado de seres inteligentes, de tal suerte que todos los cuerpos tengan el mismo coeficiente de dilatación, y unos movimientos lo bastante lentos y un calor específico lo bastante débil para que se pongan rápidamente en equilibrio con la temperatura del medio. ¿Qué ocurriría a estos seres? No es difícil, en virtud de las hipótesis físicas sentadas, comprobar lo siguiente:

- 1.º Cambiarían de dimensiones al moverse, sin darse de ello cuenta.
- 2.º Creerían que esta esfera es infinita, puesto que sus dimensiones y, por consiguiente sus pasos, tenderían a cero al acercarse a la superficie, sin poder ver tampoco, en virtud de la hipótesis, sobre el índice, lo que ocurriría al exterior.
- 3.º Las líneas para ellos *rectas* serían las circunferencias ortogonales a S , por ser a la vez trayectorias de los rayos luminosos, geodésicas en dicho medio, y lugares geométricos de puntos fijos de cuerpos girando alrededor de dos de sus puntos.

Concluye, por último, Poincaré, que estos seres inteligentes adoptarían la Geometría de Lobatschewski.

(*) *Revue Générale des Sciences pures et appliquées*, t. III, pág. 75, 1892.

ENUNCIADOS DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA
propuestos en los exámenes de Ingreso de distintas
ESCUELAS ESPECIALES DE INGENIERIA

INGENIEROS AERONÁUTICOS (1946-47).

1. Dados el centro S , la recta límite NL' y el eje de homología E , M' polo de L' con relación a una elipse, una tangente $P'Q'$ a esta elipse con su punto de contacto P' . Hallar: 1.º Un par de diámetros conjugados de la figura homológica. 2.º Qué clase de curva es la homológica. 3.º Suponiendo conocido un punto de la elipse, trazar desde él las tangentes a la elipse y a su homológica. 4.º Trazar un triángulo autopolar en la homológica.

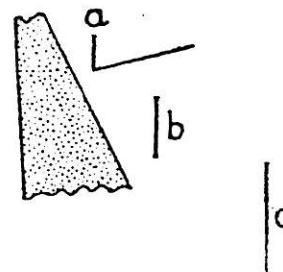
2. Dos circunferencias de radios cuatro y tres metros, se cortan en A y B , siendo la distancia de sus centros cinco metros. En el punto B se trazan las tangentes BD y BC , los puntos de intersección de estas tangentes con las circunferencias son D y C . Hallar el área de la figura $BDACB$.

3. Dada una circunferencia y dos puntos en ella A y B , trazar por los mismos dos cuerdas paralelas del mismo sentido cuyo producto tenga un valor dado. Suponiendo que las cuerdas halladas son de 5 y $5\sqrt{3}$ metros y la distancia entre ellas $2,5(\sqrt{3}+1)$ metros, hallar la longitud de la cuerda media.

4. Se mide la sombra de una torre de 15,385 m. de altura un cierto número de días después del equinoccio de primavera a la hora del mediodía. Se repite la medición el mismo número de días después del equinoccio de otoño a la misma hora. La suma de ambas sombras es 26,68784 metros. Se sabe igualmente que la suma de los ángulos que forman los rayos solares con la torre durante las dos observaciones vale $73^\circ 39' 12''$.

Se desea conocer: 1.º Las declinaciones y las ascensiones rectas del sol los días de observación. 2.º La latitud del lugar. (Se considera la eclíptica con una inclinación de $23^\circ 26' 59''$.)

5. La figura adjunta representa una perspectiva lineal en la que aparecen un trozo de carretera, la cual tiene 10 metros de anchura, así como dos postes, a y b , verticales, clavados sobre una misma recta paralela a la carretera, y la sombra arrojada por el poste a . El segmento de la recta c representa la perspectiva lineal del tablero de un anuncio de carretera formado por un círculo que es tangente al suelo y está contenido en un plano vertical.



Sabiendo que el p. de vista dista 80 metros del pl. del cuadro y que en la perspectiva este plano representa a escala 1: 1.000 a su correspondiente del espacio y suponiendo al suelo plano y horizontal, se pide: 1.º Altura del punto de vista sobre el suelo. 2.º Diámetro del círculo del anuncio. 3.º Sombra arrojada por dicho tablero sobre el suelo.

6. Se da una elipse por sus dos focos y una tangente T_1 . De una elipse afín se conoce la tangente T'_1 y su punto de contacto m' que coincide con el simétrico del foco F de la primera figura respecto a la tangente T_1 . La razón de afinidad es $-\frac{1}{2}$. 1.º Hallar la tangente a la afín paralela a una dirección dada P' . 2.º Definir la elipse por dos diámetros conjugados. 3.º Trazar las tangentes desde m a la afín de la elipse dada.

7.º Dado un cuadrado $ABCD$ de lado 4,2 mts., se trazan dos perpendiculares al plano del mismo en los vértices A y C de $AE = 4,2\sqrt{2}$ y $CF = \frac{2}{3}4,2$ mts. de longitud, respectivamente. 1.º Hallar la superficie del tetraedro $BDEF$. 2.º Hallar el volumen del tetraedro anterior. 3.º Centímetros cúbicos de agua que se precisan para llenar el cuerpo que resulta hasta el vértice F suponiendo el cuadrado horizontal y las verticales sobre el plano del mismo.

8. Dado un círculo de centro O y un punto A (exterior) hallar el polo, polar o polar recíproco del lugar geométrico de los centros de los círculos circunscritos a los infinitos triángulos autopolares de vértice A , con respecto a la homológica de la circunferencia de centro O , en la homología de vértice A , eje polar de A y recta límite de la primera figura la tangente paralela a la polar de A , no comprendida entre este punto y su polar. Polar del punto A respecto a la homológica de la circunferencia.

9. ¿Cuál es la latitud de un lugar de la tierra para el cual una estrella, cuya declinación es $21^{\circ}20'25,2''$, permanece sobre el horizonte durante 14 horas 35 minutos 22,56 segundos?

10. Se da una superficie esférica y un plano P tangente en A , se traza un plano secante que forme con P un ángulo de 30° y tal que las áreas de los casquetes en que queda dividida la superficie esférica, están en la relación $1/3$. Haciendo girar este plano alrededor del diámetro que pasa por A envuelve una superficie cónica de revolución.

Determinar el área de dicha superficie, interior a la esfera, y el volumen común a ambas.

11. a) Trazar los triángulos abc y ABC polares recíprocos respecto a una elipse dada ($2a$, $2c$) y en los que el triángulo abc tenga un ángulo de 30° y los lados de este ángulo pasen por los focos, siendo el abc inscrito en la elipse.

b) Polar recíproco del polar recíproco (ABC) respecto a la curva homológica de la elipse, en la homología de las polares recíprocas abc y ABC .

c) Trazar desde uno de los focos las tangentes posibles a la homológica de la elipse.

12. Dada una recta mn , un punto A sobre ella y dos puntos B y C exteriores. 1.º Hallar por geometría plana, sobre esta recta, un punto X tal que unido a C , la recta XC sea tangente en el punto X a la circunferencia que pase por X y los A y B . 2.º Resolución del primero por formas proyectivas.

INGENIEROS AGRÓNOMOS (1946-47).

1. Por el ortocentro O de un triángulo equilátero ABC se traza una transversal que corta en P , N y P a los lados AB , AC y BC , respectivamente, siendo el vértice C interior al segmento BP . La relación anarmónica ($MNOP$) es igual a $-\frac{1}{2}$ y el área del triángulo $AMN=2 \text{ m}^2$. Calcúlese la longitud del lado del triángulo equilátero ABC .

2. Uno de los ángulos poliedros de un tetraedro es un triedro trirrectángulo, y las aristas que en él concurren tienen las tres una longitud igual a un metro. Se pide calcular la distancia que separa los centros de homotecia directa e inversa de las dos esferas inscritas y circunscrita, respectivamente, en el tetraedro dado.

3. Considérese una superficie esférica S y un plano π tangente a ella, siendo F el punto de contacto. Desde un punto P se traza la superficie cónica circunscrita a S . Dicha superficie cónica es cortada por π según una curva Σ . Se pide: 1.º Naturaleza de la cónica sección según la región del espacio en que se halle P . 2.º Demostrar que F es uno de los focos de la cónica sección. 3.º Lugar del punto P cuando el segundo foco de la cónica es otro punto, F' , fijo en el plano π . 4.º Lugar de P cuando es dada la directriz de Σ correspondiente a F .

4. Un disco circular de papel se divide en 32 sectores iguales. Pliéguese doblándolo por los radios de división en sectores y de modo alternativo, en forma de filtro plegado de caras planas. Aplíquese el filtro así conformado dentro de un embudo cónico cuyo semiángulo en el vértice es de 30° y de tal modo que, tanto los diedros cóncavos hacia el eje del embudo como los convexos, sean iguales entre ellos. Se pide: 1.º Demostrar que no pueden ser iguales los diedros cóncavos a los convexos para ningún ángulo cónico del embudo. 2.º Calcular el valor de ambas clases de diedros en el caso detallado al principio. 3.º Radio que debe ser dado al disco de papel para que, dispuesto el embudo con el eje vertical, el volumen máximo de líquido admitido sea 140 cm^3 .

5. En el triedro $O . XYZ$ en el cual la arista OZ es perpendicular a la cara XOY , siendo el valor de esta última 120° , se toma en su interior un punto P el cual se une con el vértice O del triedro y con dos puntos A y B situados en la cara XOZ .

Las tres rectas PO , PA y PB se proyectan ortogonalmente sobre la cara XOY y designando

por la misma letra minúscula la proyección respectiva de cada punto se tienen los siguientes datos: $\alpha = Opa = 37^{\circ}31'16''2$; $\beta = Opb = 60^{\circ}39'48''5$; $\gamma = Pop = 29^{\circ}41'23''8$; $m = Oa = 5$ cm.; $n = Ob = 12$ cm.

Se pide calcular la distancia del punto P a cada una de las tres caras del triedro.

Nota.—Se exige aproximar los ángulos hasta las décimas de segundo.

6. En un cono de revolución cuya altura es igual al diámetro de la base se traza una recta que corte a la altura en su punto medio M , de modo que la distancia de la intersección T de la recta con el plano de la base al centro de esta última sea igual al diámetro.

Designando por A y B los puntos de intersección de la recta con la superficie cónica, siendo A el punto interior del segmento MT y B el exterior, calcúlese geoméricamente: 1.º La relación anarmónica $(ABTM)$. 2.º La relación de los segmentos TA y AB .

7. Haciendo centro en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero, cuyos lados tengan una longitud de 2 cm., se trazan sendos arcos de círculo con un radio igual al lado dado, arcos que se limitan en los otros dos vértices.

Se construyen dos figuras inversas del triángulo curvilíneo así formado, tomando como orígenes respectivamente uno de los vértices y el centro del círculo circunscrito al triángulo, siendo en ambos casos la potencia igual a 8.

Se pide: 1.º Dibujar a escala natural la menor de las dos superficies limitadas por la intersección de las dos inversas. 2.º Calcular el perímetro de esta figura.

8. En la superficie de una esfera, de centro C , y de radio unidad, hay dos círculos menores exteriores, uno con polo en A y radio esférico $R = 0,7854$, y el otro con polo en A' y radio esférico $R' = 0,3927$.

Por un punto O del arco de circunferencia máxima AA' pasa otro arco de circunferencia máxima que forma con el AA' un ángulo de 40° y corta a la circunferencia de polo A en B y C y a la de polo A' en B' y C' cumpliéndose la condición de ser máximas las áreas de las proyecciones ortogonales IBC e $I'B'C'$ de los triángulos rectilíneos ABC y $A'B'C'$ sobre el plano de su correspondiente círculo menor.

Calcúlense: 1.º Las áreas de los triángulos esféricos ABC y $A'B'C'$. 2.º La distancia esférica AA' .

INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (1946-47).

1. Dados un pentágono, $ABCDE$, cuyos vértices tienen por coordenadas: $A(0; 3)$, $B(0; 2)$, $C(2; 3,5)$, $D(4,5; 2)$, $E(3,5; 0)$; un punto en su interior, $M(2,2; 1,5)$, y otro en uno de sus lados, $N(1,5; 0)$.

Se pide: Dividir gráficamente el pentágono mediante la semirecta MN y otras dos pasando por M en tres partes de áreas proporcionales a 2, 3 y 4. (Escala de representación: un centímetro por unidad.)

2. Dadas dos rectas A y B que se cortan en un punto O , la bisectriz V del ángulo agudo que forman y una circunferencia con centro C situada sobre la recta B , con la condición de que resulte tangente a la bisectriz V .

Se pide: 1.º Determinar analíticamente y asimismo por los métodos de la Geometría pura, el lugar geométrico de los puntos de intersección de las cuerdas interceptadas sobre el círculo C y de los segmentos de recta también interceptados sobre el ángulo agudo AOB por cada una de las circunferencias de centro O que puedan trazarse con distintos radios. 2.º Particularizar el lugar geométrico pedido para el caso en que el ángulo AOB sea de 90° . 3.º Demostrar para el caso particular anterior, que la recta que une el centro C con el punto de la bisectriz V intersección de ésta con la normal a la recta B trazada por el punto en que es cortada por una de las circunferencias de centro O , es normal a la tangente a la curva lugar geométrico en el punto obtenido mediante dicha circunferencia.

3. Representar en perspectiva caballera regular con escala de dibujo natural y con un coeficiente de la perspectiva $\mu = \frac{2}{3}$, dos pirámides de base cuadrada y que tengan por caras triángulos equiláteros en forma tal que las alturas de las pirámides sean comunes y sus bases opuestas, pero de manera que las proyecciones ortogonales de los lados de una de las bases sobre la otra resulten normales a las diagonales de ésta.

La base de una de las pirámides deberá quedar inscrita en el triángulo que forman las trazas sobre los planos XY , XZ , YZ de otro plano que, referido a los tres ejes coordenados rectangulares, corta a estos ejes a las distancias del origen $X=12$ cm.; $Y=9$ cm.; $Z=8$ cm.; y uno de los lados de dicho cuadrado base deberá coincidir con la traza de este último plano con el principal.

La representación se hará de manera que las pirámides queden entre el plano dado sobre el que se apoya la base de una de ellas y el espectador.

Se pide representar el sólido común determinado por las dos pirámides y hallar el volumen de este sólido en función de la arista L de las pirámides y en el caso particular $L=10$ cm

4. Desde un punto, M , de latitud 60° Norte, sale un barco recorriendo el paralelo de M en dirección Este y con velocidad de 14 millas marinas por hora. Al mismo tiempo, de otro punto, P , de latitud $41^\circ 36' 30''$ Norte, y situado en el meridiano de M , parte un aeroplano, volando a ras del mar, según un círculo máximo hacia el Este, con velocidad de 300 kilómetros por hora.

Se pide: Determinar la distancia entre el barco y el aeroplano después de 15 horas 17 minutos 33 segundos y un cuarto de segundo de navegación, sabiendo que entonces el aeroplano se encuentra en un punto, B , sobre el meridiano situado $50^\circ 41' 10''$ al Este del meridiano de partida.

5. Dado un cuadrilátero fijo, $ABCD$, como base de una pirámide de vértice V , para cada posición del punto V existe un sistema de planos que cortan a la pirámide según paralelogramos.

Se pide determinar: 1.º El lugar geométrico de los vértices V de las pirámides cuyas secciones antedichas son rectangulares. 2.º El lugar geométrico de los vértices para que las secciones sean cuadrados. 3.º Para las secciones correspondientes a los planos que pasan por el vértice A del cuadrilátero, los puntos V para los cuales, en el caso segundo, las secciones tienen área máxima y mínima.

6. Determinar el número máximo de puntos intersección de las diagonales de un polígono convexo, de N lados, contenidos en el interior de aquél.

INGENIEROS INDUSTRIALES (1944-47).

1. Resolución trigonométrica de la ecuación $144x^3 - 958,09x + 847,2 = 0$.

2. Calcular el volumen exterior a dos esferas tangentes entre sí comprendido entre ambas y la superficie cónica circunscrita a ella, sabiendo que la potencia del vértice respecto de la menor es 16 cm² y que el radio de ésta es 3 cm.

3. Cuatro esferas iguales van encerradas en una caja cilíndrica, cuyo volumen interior es de $3.685,57$ cm³, de modo que, permaneciendo todas ellas tangentes entre sí dos a dos, tres de ellas son tangentes a la base de la caja y a su superficie lateral, y la cuarta es tangente a la tapa. Calcular el volumen ocupado por dichas esferas.

4. Demostrar que en un triángulo ABC , rectángulo en A , de altura AH , la distancia de A a la línea de los centros de los círculos inscritos en los triángulos AHB y AHC es de valor $AH \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Construir un triángulo conociendo un lado, $a=5$ cm.; el ángulo opuesto $A=45^\circ$, y el diámetro del círculo inscrito, $2r=2$ cm.

Hallar los focos de la hipérbola tangente al lado dado y que tiene por asíntotas los otros dos lados.

6. Una bola esférica, iluminada por el sol a mediodía del día más corto del año, proyecta en el plano horizontal sobre el que está apoyada, una sombra arrojada igual en extensión a su sombra propia, y cuyo valor es de 62832 mm². Se pide: 1.º La excentricidad y la distancia entre directrices de la elipse de sombra. 2.º El volumen del espacio cilíndrico comprendido entre la esfera y su sombra arrojada. 3.º La hora teórica de puesta de sol en dicho día en el lugar de la observación.

(Se tomará $\pi=3,1416$.)

7. Dos tangentes a una parábola por un punto V forman un ángulo de 45° . La bisectriz de este ángulo corta a la parábola en un punto P situado a 5 cm. de V . El segmento de tangente por P , comprendido entre las tangentes anteriores, mide 6 cm. Se pide: 1.º Trazar dicha tangente. 2.º Hallar el foco y la directriz de la parábola. 3.º Hallar el polo de la bisectriz del enunciado y la polar de V respecto de la parábola.

8. En un cuadrilátero de vértices consecutivos A, B, C y D se dan como datos los lados $AB=175$, $BC=96$, $DA=82$, y los ángulos $BCD=115^\circ 30' 30''$ y $CDA=132^\circ 14' 46''$. Determinar trigonómicamente el cuarto lado, las diagonales AC y BD y los ángulos BAD y DBA .

9. Se da en una parábola una cuerda MM' normal a la curva en el punto M y que es vista desde el foco F bajo un ángulo de 90° . Calcular los valores \overline{FM} y $\overline{FM'}$ en función del parámetro p de la curva como única variable.

10. Construir un triángulo dados un lado a , el radio R de la circunferencia circunscrita y la distancia e entre el punto de intersección de sus tres alturas y el centro de dicha circunferencia.

11. Calcular los radios de las esferas inscritas y circunscritas a un poliedro regular convexo en función de la arista a . En el caso particular del icosaedro comprobar que estos valores valen:

$$R = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \quad r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}$$

12. En una esfera de radio a se halla inscrito un cono equilátero. Trazar paralelamente a su base un plano secante tal que el área de la corona interceptada entre la superficie esférica y el cono sea máxima.

13. Se pide la especie de la cónica y dibujarla, definida por los elementos: El foco F , la tangente t y su punto de contacto A , un punto P sobre t y su polar p .

La posición relativa a estos elementos de la cónica es la siguiente: A, F y P son los vértices de un triángulo de lados $AF=30$ mm., $AP=30$ mm. y $FP=50$ mm.; la polar p de P pasa por A y corta al lado opuesto en un punto comprendido entre F y P y distante 33 mm. de F .

14. Una esfera de un metro de radio es cortada por un plano. Sobre la sección se construyen dos conos: uno circunscrito a la esfera y otro cuyo vértice sea el centro de ésta. Determinar la distancia del plano secante al centro para que la suma de los volúmenes de ambos conos equivalga al quíntuplo del de la esfera.

15. Sobre una recta indefinida XX y a partir del punto fijo O de esta recta se toma los dos segmentos OA y OB iguales a las raíces de la ecuación: $ax^2 + 2bx + c = 0$.

Y otras dos longitudes OC y OD iguales a las raíces de la ecuación, $a'x^2 - 2b'x + c' = 0$. Sea I el punto medio de AB y I' el de CD . Se pide: 1.º Calcular OI y AB ; OI' y CD . 2.º Describir dos circunferencias que tengan por diámetro AB y CD respectivamente. Unir los puntos I, I' con el punto de intersección M de aquéllas. Calcular el coseno del ángulo IMI' . 3.º Encontrar la relación que existe entre a, b, c, a', b', c' , para que el ángulo IMI' sea recto; probar en este caso (geoméricamente), que se verifica $IB^2 = IC \cdot ID$.

16. Se considera un triángulo rectángulo ABC , en el cual se traza la altura AD que pasa por el vértice del ángulo recto.

Girando el triángulo alrededor del cateto b engendra cuerpo de volumen V_1 ; girando alrededor del otro cateto, engendra cuerpo de volumen V_2 ; girando el triángulo ACD alrededor de CD , engendra cuerpo de volumen V_3 , y girando el triángulo ADB alrededor de DB , engendra cuerpo de volumen V_4 .

Determinar (sin utilizar tablas) el valor que deberá tener el ángulo B del triángulo para que se verifique:

$$\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} = \sqrt{3}$$

17. La longitud focal de una hipérbola mide 32 cm., y el diámetro de sus círculos directores 44 cm.

1.º Hallar el valor de los segmentos en que divide a la recta que une los focos, la tangente a la curva trazada en un punto de la misma que dista de uno de los focos 18 cm.

2.º Hallar el ángulo bajo el cual se cortan las asíntotas de dicha hipérbola.

18. Un cono equilátero de lado l es cortado por un plano P , normal al meridiano ABC que pasa por B y que forma con el plano H de la base un ángulo de 30° .

Calcular el volumen de la porción de cono que se obtiene al cortar el cono dado por la superficie proyectante de la sección producida por el plano P .

19. En un paralelogramo de área $S=840$, cuya diagonal menor mide $DB=35$ y el perímetro $ABCD=154$, determinar lados y ángulos.

INGENIEROS DE MINAS (1946-47).

1. Construir un triángulo esférico, dado un lado, uno de los ángulos adyacentes a dicho lado y sabiendo que la suma de los otros dos lados vale una semicircunferencia. Discusión. Determinar, en relación al centro de la esfera, el triángulo simétrico del construido y demostrar que ambos triángulos son equivalentes, considerando los diversos casos que pueden presentarse.

2 De seis puntos o , o' , A , A' , B y B' situados en un plano, los o y o' son fijos y centros de inversión de dos sistemas de potencias p y p' . El A se mueve libremente en el plano y los otros tres A' , B y B' cambian de posición de tal manera que A' es constantemente inverso de A en el sistema o , y B y B' lo son de A y A' en el sistema o' .

Demostrar: 1.º, que la recta que une B con B' pasa por un punto fijo; 2.º, que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A , A' , B y B' es una recta fija, cuya dirección debe indicarse.

3. Determinar los ángulos A y B , en un triángulo esférico, conocida su diferencia $B-A=32^\circ 14'$ y los lados opuestos $a=67^\circ 25' 35''$, 2 y $b=143^\circ 44' 46''$.

4. Calcúlense los tres lados de un triángulo plano del que se conocen el ángulo $A=57^\circ 14' 18''$ y las longitudes de la bisectriz AV y la altura AH que parten de su vértice, las cuales miden 2.342 metros y 1.985 metros, respectivamente.

5. En un cuadrilátero alabeado $ABCD$ en el cual los lados opuestos son perpendiculares: 1.º Demuéstrase que sus diagonales son también ortogonales. 2.º Si se hace pasar por AB un plano P y por CD otro plano Q normal al P y se hace girar este último plano alrededor de AB , estúdiense las posiciones que debe tomar Q para que siempre ambos planos sean normales entre sí. 3.º Suponiendo un cuadrilátero alabeado cualquiera, hállese un plano sobre el cual dicho cuadrilátero se proyecte según un paralelogramo. 4.º Demostrar que si un cuadrilátero alabeado está circunscrito a una esfera, los puntos de contacto se encuentran sobre una circunferencia.

6. Se dan dos rectas AB y CD de igual longitud y no situadas en un mismo plano; por los puntos medios de AC y BD se trazan planos perpendiculares a estas longitudes, es decir, los planos mediadores de AC y BD , los cuales se cortan según una recta MN . Se pide:

1.º Demostrar que todo punto P de MN equidista de AB y CD .

2.º Probar que AB y CD forman ángulos iguales con la recta MN .

7. Divídase en dos partes equivalentes el área total de una pirámide regular de base cuadrangular, mediante un plano trazado por una arista de dicha base y estúdiense la posibilidad del problema.

Suponiendo que la pirámide del apartado anterior fuera cualquiera teniendo como base un paralelogramo también cualquiera, trácesela también un plano que pasando por una arista de la base divida su volumen en dos partes equivalentes; hágase la representación gráfica de la solución.

8. Dados los tres ángulos: $A=18^\circ 33' 31''$, $B=30^\circ 42' 21''$ y $C=130^\circ 45' 21''$ de un triángulo esférico sobre esfera de radio $R=6300$ (seis mil trescientos) kilómetros; se desea conocer la longitud del lado a .

Para hacer una determinada comprobación se desea conocer también el lado a de un trián-

gulo rectilíneo de ángulos $B=30^{\circ} 41'56'',67$ y $C=130^{\circ} 44' 56'',67$, y de área igual a la del triángulo esférico antedicho, que, como puede comprobarse, es de 140468 kilómetros cuadrados.

9. Dadas cinco circunferencias de centros O, O', M, N y P , se trazan los ejes radicales de los pares de círculos $O-M, O-N, O-P$, así como los de $O'-M, O'-N$ y $O'-P$.

Los tres primeros ejes, al cortarse entre sí, forman un triángulo ABC , y los segundos otro triángulo $A'B'C'$.

Demostrar que estos dos triángulos son homológicos y determinar su centro y eje de homología.

10. En una semiesfera de radio R , limitada por un círculo máximo de plano Q , se inscriben dos esferas que son tangentes en puntos $A, A', A'' \dots$ a la semiesfera y en B, B', B'' al plano Q . Se pide: 1.º Demostrar que las rectas $AB, A'B', A''B''$, etc., pasan siempre por un punto fijo P . 2.º Hállese en función de R la potencia del punto P con relación a las esferas inscritas. 3.º Probar que si dos de estas esferas son tangentes en un punto M el plano común de tangencia pasa también por P .

11. Primero. Constrúyase un triedro trirrectángulo cuyas aristas pasen por tres puntos conocidos.

Segundo. Cortar el triedro anterior por un plano de forma que la sección obtenida sea igual a un triángulo dado. Condiciones de posibilidad.

Tercero. Desde el vértice del triedro de referencia y en la parte interior del mismo trácese una semirrecta y demuéstrese que la suma de los ángulos que la misma forma con las caras y las aristas es igual a tres rectos y también que la suma de los ángulos que dicha semirrecta forma con las aristas es superior a la suma de los ángulos que forma con las caras.

12. Demostrar que si una superficie cónica y una cilíndrica están circunscritas a una misma superficie esférica, se cortan siempre según curvas planas, y en qué caso dichas curvas serán circulares.

En este último supuesto, es decir, si la curva es una circunferencia, calcúlese el área del cuerpo determinado por el encuentro de las tres superficies: la cónica, la cilíndrica y la esférica, sabiendo que el radio de la esfera es la unidad y que vale 30° el ángulo en el vértice (eje y generatriz) de la superficie cónica.

13. Demostrar que a la serie de triángulos $ABC, A_1B_1C_1, \dots$, que tienen común la dirección de la base BC , el punto medio de la misma y el ortocentro, corresponde un haz de rectas paralelas determinadas para cada triángulo por el vértice A y el punto de intersección de la base con la recta que une los pies de las alturas trazadas desde B y C .

14. Calcular el ángulo C en un triángulo esférico, conocida su área $S=138148$ metros cuadrados, los lados $a=57^{\circ} 14' 20''$ y $b=54^{\circ} 7' 37''$ y el radio de la esfera $R=500$ metros.

INGENIEROS DE MONTES (1946-47).

1. Las longitudes de seis segmentos rectilíneos son proporcionales a los números 14, 15, 16, 17, 18 y 19. Tomando dichos segmentos como aristas, formamos diversos tetraedros, de tal modo que, en cada uno de estos tetraedros, entren como aristas los seis segmentos citados. Hallar cuántos tetraedros distintos, es decir, no superponibles, pueden formarse en estas condiciones.

2. Nos dan dos circunferencias secantes A y A' de radios diferentes y centros O y O' , respectivamente.

Queremos fijar otras dos circunferencias B y C que cumplan a la vez con las siguientes condiciones:

1.ª El radio de B ha de ser el mismo que el radio de C .

2.ª Las circunferencias B y C han de ser tangentes entre sí.

3.ª Ambas circunferencias B y C han de ser simultáneamente tangentes interiormente a la circunferencia A y tangentes exteriormente a la circunferencia A' .

Se pide, debidamente razonada, la construcción geométrica que nos dé el punto de tangencia de la circunferencia B con la C .

En la construcción y en su deducción se emplearán exclusivamente rectas y arcos de circun-

ferencias, prescindiendo en absoluto de elipses, hipérbolas, parábolas y de curvas de mayor grado y trascendentes.

3. Hallar, sin emplear las tablas, el valor numérico de

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

4. Dos triángulos equiláteros iguales están situados en dos planos horizontales, de tal modo que las proyecciones ortogonales de los seis vértices sobre un mismo plano paralelo a los anteriores, formen un hexágono regular de 3 cm. de lado.

Uniendo cada vértice del triángulo superior con los dos más próximos del inferior formaremos otros nuevos triángulos.

Las distancias entre los dos planos primeramente citados, es tal que los nuevos triángulos resultan equiláteros.

Se pide la representación a escala natural de la figura, en la perspectiva caballera, tomando como geometral (XY) el plano del triángulo inferior y siendo uno de los tres lados de este triángulo perpendicular al plano del cuadro.

Coficiente de reducción según el eje Y , $\frac{1}{2}$.

Angulo de la línea de fuga, 120° sexagesimales.

5. Sobre la superficie supuesta perfectamente esférica de la Tierra se da un triángulo esférico ABC cuyos datos son: $a=60^\circ 37' 48''$; $b=119^\circ 22' 12''$; $B=115^\circ 36' 31''$. Un cuarto punto D situado respecto del BC al mismo lado que A dista 1.720 Km. de C y la suma de sus distancias a A y B es 20.000 Km. Todas las distancias medidas según arcos de círculo máximo. Hallar los elementos, lados y ángulos del triángulo ABC . Se supondrá que el metro es igual a la diezmilésima parte del cuadrante terrestre.

6. Un barco sale de un puerto B con rumbo a otro C situado al Este del primero y tal que su latitud se diferencia en $10^\circ 38'$ de la de aquél. Si en vez de seguir esa derrota el barco fuese primero por el meridiano de B para una vez alcanzado el paralelo de C arribar por él a este puerto recorrería 885,44 millas más que si siguiese por el paralelo de B hasta el meridiano de C para llegar a éste siguiendo su meridiano. Las coordenadas de B son: latitud, $51^\circ 13' 50''$ Norte; longitud, $56^\circ 27' 30''$ W. Se pide: 1.º Determinar en millas la distancia BC . 2.º Coordenadas geométricas de C . 3.º Rumbos de salida y llegada cuando se sigue el círculo máximo de BC . 4.º Distancias que en cada caso se recorrerán sobre cada paralelo.

7. Representar en perspectiva caballera un octaedro regular cuya diagonal AB tiene por extremos $A(10, 0, 0)$, $B(10, 20, 20)$ centímetros, siendo perpendicular al geometral el plano diagonal que pase por ella.

La reducción de las coordenadas perpendiculares al cuadro es de $\frac{1}{2}$ y la escala del dibujo también de $\frac{1}{2}$.

El eje de las Y positivas forma en la perspectiva con el de las X positivas un ángulo de 150° en el sentido de las agujas del reloj. El eje de las Z positivas 90° en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

8. Determinar el radio de la esfera que, conteniendo en su superficie al círculo inscrito en una de las caras del octaedro regular de arista conocida e igual a a , sea ortogonal a la esfera tangente a las aristas del sólido.

9. Sean tres puntos A , B y C de la superficie terrestre, cuyas latitudes respectivas, todas ellas septentrionales, son: $A) 64^\circ 44' 30''$; $B) 64^\circ 40' 26''$; $C) 74^\circ 57' 6''$.

Se sabe que el punto C se encuentra a la misma distancia de A , que de B , que del Polo Norte.

Se desea conocer en Km. la mínima distancia entre A y B , recorrida sobre la superficie terrestre.

Se admitirá que la Tierra es perfectamente esférica y que un arco de un cuadrante de meridiano de dicha esfera ideal, tiene exactamente 10000 kilómetros.

10. Mediante una inversión, construir un círculo que pase por dos puntos dados y sea ortogonal a otro círculo también dado; y explicar brevemente el procedimiento seguido.

11. Conocido $\operatorname{tg} a = b$, determinar en función de b , $x = \operatorname{tg} \frac{a}{4}$. Hallar todas las soluciones y aplicar el resultado general que se obtenga al caso en que $b = \sqrt{3}$, determinando todos los valores numéricos de x correspondientes a este caso.

12. Se inscribe en un tetraedro regular de arista a una esfera tangente a sus aristas. Hallar en función de la arista el volumen de la porción de esfera exterior al tetraedro.

INGENIEROS NAVALES (1945-47).

1. Demostrar que el tetraedro $ABCD$ y el tetraedro $A'B'C'D'$, que tiene por vértices los puntos de unión de las medianas de las caras del primero, son homotéticos. ¿Cuál es la relación de las áreas y la relación de los volúmenes?

2. Construir una hipérbola equilátera, cuando se conocen cuatro puntos de ella.

3. Se dan dos ejes cualesquiera OX y OY y una recta que los corte HG ; del mismo lado del ángulo de los ejes en que está situada la recta HG se toma, sobre el eje OX , una distancia OA y sobre el eje OY , otra OB . Por un punto de esta recta M se trazan las rectas MA y MB que cortan a los ejes OY y OX en los puntos C y D , respectivamente.

Hallar la envolvente de la recta CD y el lugar geométrico del punto medio de esta recta, cuando M varía.

4. Hallar las horas oficiales de orto y ocaso (aparentes) del Sol, en el puerto de Mahón, el día 20 de junio de 1947.

5. Sobre los cuatro lados de un cuadrado $ABCD$ y al exterior del mismo, se construyen triángulos equiláteros ABE , BCF , CDG , DAH .

También sobre la diagonal AC se construyen los triángulos equiláteros ACM y ACP y sobre la diagonal BD los triángulos equiláteros BDN y BDQ .

Llamando a al número que mide la longitud del lado del cuadrado $ABCD$. Se pide calcular en función de a :

1.º El área del cuadrado $EFGH$.

2.º El área del cuadrado $MNPQ$.

3.º El área común a los dos anteriores cuadrados $EFGH$ y $MNPQ$.

6. Se da un paralelepípedo rectángulo de bases $ABCD$ y $A'B'C'D'$ de altura $DD' = h$. Las dimensiones de la base son: $AD = a$, $CD = b$ (a mayor que b).

1.º Hacer pasar por DD' dos planos que corten a las caras opuestas según la recta MM' (para la cara $AA'BD$) y NN' (para la cara $BB'C'C$) de tal manera que el sólido sea partido en tres partes equivalentes.

2.º Calcular la relación de los volúmenes de los dos sólidos $MBNM'B'N'$ y $MDNM'D'N'$.

3.º Hallar la relación que debe ligar a a y b para que el diedro de arista MN' ($MM'N'NDD'$) sea recto.

4.º Si en estas condiciones se hace girar al paralelepípedo alrededor de DD' como eje, ¿cuál es el volumen del sólido engendrado por el sólido $MBNM'B'N'$?

Tomar a igual a 3 m. y h igual a 0,2 m.

7. De dos puntos A y B situados en un mismo meridiano y en el mismo hemisferio a 800 kilómetros de distancia parten simultáneamente dos móviles recorriendo cada uno su paralelo en el mismo sentido y con velocidades iguales a 100 kilómetros por hora. El paralelo de A es 2.000 kilómetros más largo que el paralelo de B . Determinar la distancia en kilómetros a que se encuentran uno de otro, los dos móviles, a los tres días de haber emprendido la marcha.

8. Un dirigible ha salido de la ciudad de A navegando por círculo máximo hasta B , desde esta ciudad fué a C y desde esta última al punto de partida. Sabemos que los arcos de salida y llegada forman un ángulo de 70° , que el recorrido total fué de 33.333,33 Kms. y que el área del triángulo esférico es un décimo de la total de la superficie de la Tierra.

Hallar las distancias entre las tres ciudades.

9. En un triángulo se conocen: $c+a=410,8$ m., $c+b=322,20$ m. y $C=52^{\circ} 6' 44''$. Resolver el triángulo.

10. Dado un cuadrado $ABCD$; $M, N; P, Q$ son los centros de los lados AB, BC, CD, DA . Demostrar que las rectas DM, AN, BP, CQ determinan un cuadrado cuya área es la quinta parte del $ABCD$.

11. Se dan dos triángulos equiláteros ABC y DBC , que tienen común el lado BC . Por el punto D se traza una secante variable que corta a la prolongación del lado AB en E , y al lado AC en F (F situado entre A y C).

Hallar el lugar geométrico del punto de encuentro M de las rectas BF y CE .

12. Se da un triángulo ABC circunscrito a un círculo O ; luego se forma un segundo triángulo abc , cuyos vértices a, b y c son los puntos medios de los lados BC, CA y AB del primero; por los vértices a, b y c de este segundo triángulo se trazan las tangentes al círculo que encuentran a los lados opuestos bc, ca y ab respectivamente en los puntos m, n y p . Demostrar que estos puntos están en línea recta.

13. Trazar por un vértice de un exágono regular una recta que divida el área de éste en dos partes, siendo una de ellas tres veces mayor que la otra.

INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN (1945-47).

1. Las longitudes de los lados de un triángulo son $a=7$ cm., $b=5$ cm. y $c=8$ cm. Hallar la distancia medida sobre la mediana correspondiente al lado a desde el vértice A hasta su intersección con la circunferencia circunscrita. Hallar también el área total y el volumen de un tetraedro regular circunscrito a una esfera cuyo radio es la longitud hallada anteriormente.

2. Una esfera tiene de radio 1 dm. y una pirámide triangular tiene su vértice en el centro de la esfera y una altura de 3 dm. Hallar el área total del sólido común a estos cuerpos sabiendo que dos caras de la pirámide tienen de ángulos en el vértice $113^{\circ} 2' 56''$ y $82^{\circ} 39' 28''$ y el diedro que forman estas caras es de $138^{\circ} 50' 13''$.

3. Se da una asíntota y un punto P de una hipérbola. Uno de los focos de la curva describe la perpendicular trazada desde P a la asíntota dada.

Hallar el lugar del punto Q de intersección de la segunda asíntota con la directriz correspondiente al foco considerado.

4. Determinar el lugar geométrico del punto de intersección de la normal en un punto de una parábola con la circunferencia descrita, tomando como diámetro el radio vector en dicho punto. El foco de la parábola es el polo.

5. Dados dos planos cualesquiera P y Q oblicuos a los de proyección y un punto A no situado en ellos, determinar las proyecciones de una recta que pasando por este punto forme respectivamente con cada uno de los citados planos los ángulos conocidos x y p .

NOTA.—El lector que quiera hallar más enunciados y sus soluciones puede consultar la colección de la Revista *Matemática Elemental*, de la que hemos transcrito los anteriores enunciados.

